

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Zahlen und Vektoren	1
§1. Mengen und Abbildungen.....	1
1.1 Mengen – 1.2 Mengenoperationen – 1.3 Abbildungen	
§2. Die reellen Zahlen.....	3
2.1 Bezeichnungen – 2.2 Ungleichungen – 2.3 Intervalle – 2.4 Schranken – 2.5 Der Betrag – 2.6 Die vollständige Induktion – 2.7 Binomialkoeffizienten und die binomische Formel – Aufgaben	
§3. Die Ebene.....	11
3.1 Kartesische Koordinatensysteme – 3.2 Winkel – 3.3 Sinus, Cosinus – 3.4 Drehungen	
§4. Vektoren	17
4.1 Kartesische Koordinatensysteme im Raum – 4.2 Vektoren – 4.3 Die Addition von Vektoren – 4.4 Die skalaren Vielfachen eines Vektors – 4.5 Der Betrag – 4.6 Vektoren im Koordinatensystem	
§5. Produkte	22
5.1 Der Winkel zwischen zwei Vektoren – 5.2 Das Skalarprodukt – 5.3 Das Vektorprodukt – 5.4 Das Spatprodukt – Aufgaben	
§6. Geraden und Ebenen	34
6.1 Parameterdarstellungen einer Geraden – 6.2 Die Koordinatengleichungen einer Geraden – 6.3 Die Momentengleichung der Geraden – 6.4 Abstand Punkt-Gerade – 6.5 Abstand Gerade-Gerade – 6.6 Parameterdarstellungen einer Ebene – 6.7 Parameterfreie Darstellungen einer Ebene – 6.8 Die Gerade als Schnitt zweier Ebenen – 6.9 Die Winkel zwischen zwei Ebenen und zwischen einer Ebene und einer Geraden – Aufgaben	
§7. Gebundene Vektoren	47
7.1 Gebundene Vektoren – 7.2 Ein System gebundener Vektoren – 7.3 Die Reduktion eines Systems gebundener Vektoren – Aufgaben	
§8. Die komplexen Zahlen.....	53
8.1 Die Menge der komplexen Zahlen – 8.2 Die vier Grundrechenarten in \mathbb{C} – 8.3 Die Konjugation und der Betrag komplexer Zahlen – 8.4 Anwendungen	

Kapitel 2. Funktionen, Grenzwerte, Stetigkeit	58
§1. Funktionen (Grundbegriffe)	58
1.1 Funktionen – 1.2 Monotonie – 1.3 Das Rechnen mit Funktionen	
§2. Polynome und rationale Funktionen	61
2.1 Polynome – 2.2 Polynomnullstellen – Faktorisierung – 2.3 Polynom- interpolation – 2.4 Der Graph – 2.5 Rationale Funktionen, Polynomdi- vision – 2.6 Der Definitionsbereich D – 2.7 Ergänzung: Polynome über \mathbb{C} – Aufgaben	
§3. Die Kreisfunktionen	75
3.1 Definition und einfache Eigenschaften – 3.2 Die Tangens- und Cotangensfunktion – 3.3 Die Polardarstellung komplexer Zahlen – 3.4 Anwendungen der De Moivre-Formeln – 3.5 Harmonische Schwin- gungen – Aufgaben	
§4. Zahlenfolgen und Grenzwerte	88
4.1 Folgen – 4.2 Definition des Grenzwerts; konvergente Zahlenfolgen	
§5. Rechenregeln für Grenzwerte und Konvergenzkriterien	93
5.1 Rechenregeln – 5.2 Grenzwertbestimmung durch Abschätzung – 5.3 Monotone Folgen – 5.4 Die Exponentialfunktion – 5.5 Für Fortge- schrittene: Das Cauchy-Konvergenzkriterium – Aufgaben	
§6. Funktionengrenzwerte, Stetigkeit	103
6.1 Definitionen – 6.2 Die 6 elementaren Methoden der Grenzwertbe- stimmung – 6.3 Asymptoten – 6.4 Stetigkeit – Aufgaben	
Kapitel 3. Differentiation	112
§1. Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion	112
1.1 Die Definition der Ableitung – 1.2 Die geometrische Deutung der Ableitung: Tangentenanstieg – 1.3 Die analytische Deutung der Ab- leitung: Lineare Approximation – 1.4 Die physikalische Deutung der Ableitung: Geschwindigkeit – 1.5 Stetigkeit ist notwendig für Differen- zierbarkeit – 1.6 Differentiationsregeln – 1.7 Die Differentiation der Polynome und der rationalen Funktionen – 1.8 Die Ableitung der Kreisfunktionen – 1.9 Die Kettenregel – 1.10 Höhere Ableitungen – Aufgaben	
§2. Anwendungen der Differentiation	121
2.1 Maxima und Minima einer Funktion – 2.2 Der Mittelwertsatz – 2.3 Wendepunkte – 2.4 Die Regeln von De L'Hospital – 2.5 Kurven- diskussion – 2.6 Nullstellen und Fixpunkte – 2.7 Kubische Splines – Aufgaben	

§3. Umkehrfunktionen	139
3.1 Grundlagen – 3.2 n -te Wurzel, rationale Exponenten – 3.3 Arcussinus, Arcuscosinus, Arcustangens – Aufgaben	
§4. Die Exponential- und Logarithmusfunktion	147
4.1 Die e -Funktion – 4.2 Die Kurve $y = e^x$ – 4.3 Exponentiell wachsende bzw. fallende Prozesse – 4.4 Der natürliche Logarithmus – 4.5 Allgemeine Exponentialfunktionen und Logarithmen – 4.6 Die Hyperbelfunktionen \sinh , \cosh , \tanh – Aufgaben	
Kapitel 4. Integration	161
§1. Das bestimmte Integral	161
1.1 Die Definition des bestimmten Integrals – 1.2 Die geometrische Deutung – 1.3 Elementare Integrationsregeln und der Mittelwertsatz – 1.4 Differentiation und Integration – Aufgaben	
§2. Integrationsregeln	169
2.1 Linearität – 2.2 Partielle Integration – 2.3 Die Substitutionsmethode – 2.4 Symmetrien beachten – 2.5 Ausblicke – Aufgaben	
§3. Die Integration der rationalen Funktionen	179
3.1 Die Partialbruchzerlegung – 3.2 Die Integration – 3.3 Die Integration von $R(e^x)$ – 3.4 Die Integration von $R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)$, $ae-bc \neq 0$ – 3.5 Die Integration von $R(\sin x, \cos x)$ – 3.6 Trigonometrische und hyperbolische Substitutionen – Aufgaben	
§4. Uneigentliche Integrale	185
4.1 Die Definition der uneigentlichen Integrale – 4.2 Ein Konvergenz-Test – 4.3 Ein an beiden Grenzen uneigentliches Integral – 4.4 Ausnahmestellen im Innern des Integrationsintervalls – Aufgaben	
§5. Kurven, Längen- und Flächenmessung	190
5.1 Die Parameterdarstellung – 5.2 Tangente und Normale – 5.3 Kurvenlänge – 5.4 Krümmung und Krümmungskreis – 5.5 Die Polardarstellung einer ebenen Kurve – 5.6 Flächeninhalte – Aufgaben	
§6. Weitere Anwendungen des Integrals	204
6.1 Abkürzende Redeweisen – 6.2 Das Volumen eines Rotationskörpers – 6.3 Die Mantelfläche – Aufgaben	
§7. Numerische Integration	206
Aufgaben	

Kapitel 5. Potenzreihen	212
§1. Unendliche Reihen	212
1.1 Grundbegriffe – 1.2 Absolute Konvergenz – Aufgaben	
§2. Reihen von Funktionen	221
2.1 Gleichmäßige Konvergenz – 2.2 Gleichmäßig konvergente Funktionenreihen – Aufgaben	
§3. Potenzreihen	226
3.1 Der Konvergenzradius – 3.2 Berechnung des Konvergenzradius – 3.3 Die Differentiation und Integration von Potenzreihen – 3.4 Die Potenzreihendarstellung einiger Funktionen – 3.5 Die Binomialreihe – 3.6 Potenzreihen mit dem Zentrum $a \neq 0$ – 3.7 Koeffizientenvergleich – Aufgaben	
§4. Der Satz von Taylor; Taylor-Reihen	237
4.1 Die Taylor-Formel – 4.2 Die Taylor-Reihe – 4.3 Methoden der Reihenentwicklung – Aufgaben	
§5. Anwendungen (an Beispielen)	244
5.1 Grenzwertberechnungen – 5.2 Näherungsformeln (Approximation) – 5.3 Die Reihendarstellung und Berechnung einer Integralfunktion mit nicht elementar integrierbarem Integranden – 5.4 Potenzreihenansatz zur Lösung einfacher Differentialgleichungen – Aufgaben	
Kapitel 6. Lineare Algebra	250
§1. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen	250
1.1 Was ist eine Matrix? – 1.2 Addition, Subtraktion und Multiplikation mit einem Zahlenfaktor – 1.3 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen – 1.4 Das Gaußsche Lösungsverfahren – Aufgaben	
§2. Die Matrizenmultiplikation	265
2.1 „Zeile mal Spalte“ – 2.2 Die Multiplikation zweier Matrizen – 2.3 Rechenregeln – 2.4 Die Transponierte einer Matrix – 2.5 Invertierbare Matrizen – 2.6 Diagonal- und Dreiecksmatrizen – Aufgaben	
§3. Vektorräume	274
3.1 Der „abstrakte“ Vektorraum – 3.2 Unterräume, Linearkombinationen, lineare Hülle – 3.3 Basis und Dimension – Aufgaben	
§4. Elementarmatrizen und elementare Umformungen	286
4.1 Zeilenraum und Spaltenraum – 4.2 Elementarmatrizen – 4.3 Der Rang und die P - Q -Normalform – 4.4 Rechenverfahren – Aufgaben	

§5. Determinanten	299
5.1 Einführung – 5.2 Definition der Determinante einer $n \times n$ -Matrix – 5.3 Rechenregeln für Determinanten – 5.4 Die Entwicklung von $\det A$ nach einer beliebigen Zeile oder Spalte – 5.5 Beispiele – 5.6 Anwendungen – Aufgaben	
§6. Lineare Abbildungen und Eigenwerte	311
6.1 Lineare Abbildungen – 6.2 $V = W = \mathbb{R}^n$ – 6.3 Längen und Winkel im \mathbb{R}^n ; Orthogonalität – 6.4 Speziell: Spiegelungen und Drehungen – 6.5 Das Schmidtsche Orthonormierungsverfahren – 6.6 Basiswechsel, Koordinatentransformation – 6.7 Eigenwerte, Eigenvektoren – 6.8 Die orthogonale Gruppe – Aufgaben	
§7. Symmetrische Matrizen und quadratische Formen	339
7.1 Quadratische Formen – 7.2 Die Hauptachsentransformation – 7.3 Quadriken – 7.4 Die nichtorthogonale Diagonalisierung einer symmetrischen Matrix – 7.5 Positiv definite Matrizen – Aufgaben	
Kapitel 7. Funktionen in mehreren Variablen: Differentiation	359
§1. Kurven im \mathbb{R}^n	360
1.1 Parameterdarstellungen – 1.2 Das begleitende Dreibein, Krümmung, Torsion – 1.3 Ergänzung: Der natürliche Parameter und die Frenet-schen Formeln – Aufgaben	
§2. Reellwertige Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher	370
2.1 Grundlagen – 2.2 Grenzwerte und Stetigkeit – 2.3 Partielle Ableitungen, der Gradient – 2.4 Die totale Ableitung und lineare Approximation – 2.5 Einfache Anwendungen – 2.6 Die Richtungsableitung, der Anstieg und die Kettenregel – Aufgaben	
§3. Anwendungen der Differentiation	391
3.1 Die Bedeutung des Gradienten – 3.2 Approximation höherer Ordnung; die Taylor-Formel – 3.3 Implizite Funktionen – 3.4 Lokale Minima und Maxima – 3.5 Ausgleichsrechnung – 3.6 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen – Aufgaben	
§4. Vektorwertige Funktionen	418
4.1 Die Differentiation – 4.2 Die Kettenregel – 4.3 Räumliche Skalaren- und Vektorfelder – 4.4 Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace-Operator – Aufgaben	

Kapitel 8. Funktionen in mehreren Variablen: Integration	430
§1. Parameterintegrale	430
1.1 Parameterintegrale – Aufgaben	
§2. Kurvenintegrale	435
2.1 Das Kurvenintegral einer skalaren Funktion – 2.2 Anwendungen – 2.3 Die Integration eines Vektorfeldes längs einer Kurve – 2.4 An- wendungen und Beispiele – 2.5 Das Potential eines Gradientenfeldes – 2.6 Die praktische Bestimmung eines Potentials ($n = 3$) – Aufgaben	
§3. Die Integration über ebene Bereiche	454
3.1 Der Flächeninhalt – 3.2 Definition und einfache Eigenschaften des Doppelintegrals – 3.3 Die Berechnung des Doppelintegrals in kartesi- schen Koordinaten – 3.4 Weitere Anwendungen und Beispiele – 3.5 Der Satz von Green – Aufgaben	
§4. Die Integration über Flächen im Raum	467
4.1 Parameterdarstellungen – 4.2 Beispiele – 4.3 Der Flächeninhalt – 4.4 Das Oberflächenintegral einer skalaren Funktion – 4.5 Die Trans- formationsformel für Gebietsintegrale – 4.6 Das Oberflächenintegral eines Vektorfeldes – 4.7 Der Satz von Stokes – Aufgaben	
§5. Die Integration über dreidimensionale Bereiche	488
5.1 Definition und einfache Eigenschaften des Dreifachintegrals – 5.2 Einfache Anwendungsbeispiele – 5.3 Die Transformationsformel für Volumenintegrale – 5.4 Der Divergenzsatz – 5.5 Einige Anwendungen der Integralsätze – 5.6 Orthogonale krummlinige Koordinaten – Auf- gaben	
Literaturverzeichnis	505
Anhang: Pascal-Programme	507
Namen- und Sachverzeichnis	517

Inhalt von Band 2

Kapitel 9. Gewöhnliche Differentialgleichungen

- §1. Einführung
- §2. Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung
- §3. Spezielle Differentialgleichungen 2. Ordnung
- §4. Existenzsätze
- §5. Numerische Lösung des Anfangswertproblems 1. Ordnung
- §6. Die Laplace-Transformation
- §7. Lösung mittels Potenzreihenansatz
- §8. DGL-Systeme und DGLn höherer Ordnung
- §9. Lineare DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten
- §10. Stabilität, periodische Lösungen
- §11. Rand- und Eigenwertprobleme

Kapitel 10. Funktionentheorie

- §1. Punktmengen in der komplexen Ebene
- §2. Einige elementare Funktionen
- §3. Gebrochen-lineare Funktionen
- §4. Potenzreihen
- §5. Differentiation, analytische Funktionen
- §6. Integration
- §7. Anwendungen der Cauchy-Integralformel
- §8. Harmonische Funktionen und das Dirichlet-Problem
- §9. Laurent-Reihen und Singularitäten
- §10. Residuentheorie

Kapitel 11. Fourier-Analysis

- §1. Trigonometrische Polynome und Reihen
- §2. Fourier-Reihen
- §3. Konvergenz der Fourier-Reihe
- §4. Anwendungen (an Beispielen)
- §5. Diskrete Fourier-Analysis
- §6. Die Fourier-Transformation

Kapitel 12. Partielle Differentialgleichungen

- §1. Einführung
- §2. Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung
- §3. Lineare und quasilineare PDGn 2. Ordnung
- §4. Trennung der Variablen
- §5. Lösungen mit Laplace- und Fourier-Transformation
- §6. Lösungen mit Green-Funktion

Kapitel 13. Variationsrechnung

- §1. Funktionale und Variation
- §2. Die Euler-Differentialgleichung für $I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx$
- §3. Natürliche Randbedingungen, Transversalitätsbedingung
- §4. Variationsaufgaben mit allgemeineren Funktionalen
- §5. Variation mit Nebenbedingungen
- §6. Variationsrechnung mit Funktionen in mehreren Variablen
- §7. Das Wechselspiel Variationsaufgaben – Differentialgleichungen
- §8. Direkte Methoden