

Inhalt

Vorwort 5
 Zum richtigen Gebrauch dieses Buches 6

Inhalt 11

1 Mengenlehre 21
 Aufgabe 1.1 Verknüpfung von Mengen 21
 Aufgabe 1.2 Verknüpfung von Mengen 23
 Aufgabe 1.3 Bestimmung einer Zahlenmenge 24
 Aufgabe 1.4 Bekannte Zahlen-Grundmengen 26
 Aufgabe 1.5 Mengen-Operationssymbole 26

2 Elementarmathematik 29
 Aufgabe 2.1 Periodische Dezimalbrüche 29
 Aufgabe 2.2 Gauß'sche Summenformel 30
 Aufgabe 2.3 Betragsgleichungen mit Fallunterscheidungen 32
 Aufgabe 2.4 pq-Formel in den reellen und komplexen Zahlen 36
 Aufgabe 2.5 Ungleichungen mit Fallunterscheidungen 37
 Aufgabe 2.6 Wurzelgleichungen 44
 Aufgabe 2.7 Rechnen mit Logarithmen 47
 Aufgabe 2.8 Gleichungen mit Logarithmen 49
 Aufgabe 2.9 Anwendungsbeispiel zu Logarithmen 50
 Aufgabe 2.10 Zahlensysteme verschiedener Basen 51
 Aufgabe 2.11 Bruchrechnung in S-adischen Systemen 54
 Aufgabe 2.12 Rechnen im Dualsystem 59
 Aufgabe 2.13 B-Komplement-Darstellung 62
 Aufgabe 2.14 Ungleichungen mit Fallunterscheidungen 64
 Aufgabe 2.15 Binomialkoeffizienten 67
 Aufgabe 2.16 Binomialkoeffizienten 68
 Aufgabe 2.17 Der binomische Lehrsatz 69
 Aufgabe 2.18 Winkelfunktionen, Additionstheoreme 70

Aufgabe 2.19 Polynomdivision	73
Aufgabe 2.20 Faktorisierung von Polynomen	73
Aufgabe 2.21 Polynomdivision mittels Horner-Schema	75
Aufgabe 2.22 Nullstellen von Polynomen	76
Aufgabe 2.23 Symmetrie von Funktionen	77
Aufgabe 2.24 Bildung von Umkehrfunktionen	78
Aufgabe 2.25 Funktionsdarstellung in Polarkoordinaten	79
Aufgabe 2.26 Geradengleichung	81
Aufgabe 2.27 Logarithmische Funktionsdarstellung	82
Aufgabe 2.28 Bestimmung einer Parabel	83
Aufgabe 2.29 Textbeispiel – Exponentialfunktion	83
Aufgabe 2.30 Textbeispiel – Cosinus Hyperbolicus	85
Aufgabe 2.31 Goniometrische Gleichungen	86
Aufgabe 2.32 Vollständige Induktion	90
3 Aussagenlogik	93
Vorbemerkung zur Notation	93
Aufgabe 3.1 Erstellen von Wahrheitstabellen	94
Aufgabe 3.2 Konjunktive und disjunktive Normalform	96
Aufgabe 3.3 Vereinfachen Boole'scher Ausdrücke	97
Aufgabe 3.4 Karnaugh-Veitch-Diagramme	98
Aufgabe 3.5 Beweise in Boole'scher Algebra	101
Aufgabe 3.6 Spezielle Verknüpfungen	103
4 Geometrie und Vektorrechnung	105
Aufgabe 4.1 Berechnungen in Dreieck und Viereck	105
Aufgabe 4.2 Winkelfunktionen – berechnen spezieller Werte	107
Aufgabe 4.3 Textbeispiel - Kreisberechnung	108
Aufgabe 4.4 Winkelfunktionen – Werte ohne Taschenrechner	109
Aufgabe 4.5 Additionstheoreme	110
Aufgabe 4.6 Textbeispiel – Navigation	111
Aufgabe 4.7 Textbeispiel – Kugelabschnitt	112
Aufgabe 4.8 Textbeispiel – Kegel	113
Aufgabe 4.9 Textbeispiel – Kreis	114

Aufgabe 4.10 Textbeispiel – Kugel.....	116
Aufgabe 4.11 Vektorprodukte	119
Aufgabe 4.12 Lineare Abhängigkeit von Vektoren.....	120
Aufgabe 4.13 Abstand eines Punktes zu einer Geraden.....	121
Aufgabe 4.14 Ebenengleichung in verschiedenen Formen.....	122
Aufgabe 4.15 Lage von Punkten in einer Ebene.....	124
Aufgabe 4.16 Abstand eines Punktes von einer Ebene	125
Aufgabe 4.17 Abstand eines Punktes von einer Geraden	127
Aufgabe 4.18 Ebenengleichung in kartesischen Koordinaten	128
Aufgabe 4.19 Schnittpunkt von Geraden	129
Aufgabe 4.20 Schnittgeraden von Ebenen	131
Aufgabe 4.21 Schnittpunkt der Mittelsenkrechten im Dreieck.....	133
Aufgabe 4.22 Ellipsengleichung	135
Aufgabe 4.23 Ellipse und Hyperbel als Kegelschnitte.....	136
Aufgabe 4.24 Koordinatentransformation – Drehung	140
Aufgabe 4.25 Polarkoordinaten	141
Aufgabe 4.26 Kugelkoordinaten	142
Aufgabe 4.27 Textbeispiel – Vektorrechnung	144
5 Lineare Algebra.....	147
Aufgabe 5.1 Multiplikation von Matrizen.....	147
Aufgabe 5.2 Matrixmultiplikation, Falk'sches Schema	148
Aufgabe 5.3 Berechnung von Determinanten.....	150
Aufgabe 5.4 Regel von Sarrus für 3×3 -Determinanten.....	151
Aufgabe 5.5 Inversion von Matrizen	152
Aufgabe 5.6 Rang von Matrizen	154
Aufgabe 5.7 Lösen linearer Gleichungssysteme	155
Aufgabe 5.8 Lösen linearer Gleichungssysteme	157
Aufgabe 5.9 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen	158
Aufgabe 5.10 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen.....	160
6 Differentialrechnung.....	163
Aufgabe 6.1 Berechnung von Differentialquotienten	163
Aufgabe 6.2 Ableiten: Summenregel, Faktorregel, Produktregel	164

Aufgabe 6.3 Ableiten mit Produktregel.....	165
Aufgabe 6.4 Ableiten mit Quotientenregel.....	166
Aufgabe 6.5 Ableiten mit Kettenregel.....	167
Aufgabe 6.6 Mehrfache Verschachtelung der Kettenregel.....	168
Aufgabe 6.7 Vermischtes Anwenden von Ableitungsregeln.....	170
Aufgabe 6.8 Höhere Ableitungen.....	173
Aufgabe 6.9 Implizites Ableiten.....	174
Aufgabe 6.10 Ableiten in Parameterdarstellung und Polarkoordinaten	175
Aufgabe 6.11 Kurvendiskussionen verschiedenster Art.....	180
Aufgabe 6.12 Beispiel – Harmonischer Oszillator.....	198
Aufgabe 6.13 Maximalwertaufgabe – Biegebalken	199
Aufgabe 6.14 Maximalwertaufgabe – Flächenbestimmung.....	200
Aufgabe 6.15 Maximalwertaufgabe – Konservendose.....	201
Aufgabe 6.16 Maximalwertaufgabe – Dreieck.....	203
Aufgabe 6.17 Maximalewertaufgabe – Fertigungslosgröße.....	204
Aufgabe 6.18 Krümmung von Kurven.....	207
7 Integralrechnung.....	211
Aufgabe 7.1 Integration von Polynomen.....	211
Aufgabe 7.2 Integration mittels Substitution.....	212
Aufgabe 7.3 Partielle Integration	216
Aufgabe 7.4 Integration nach geeigneter Umformung.....	219
Aufgabe 7.5 Integration nach Partialbruchzerlegung.....	222
Aufgabe 7.6 Substitutionen mit Rechenrick.....	231
Aufgabe 7.7 Demonstrationsbeispiel Integrationskonstante	236
Aufgabe 7.8 Integration abschnittsweise gegebener Funktionen.....	238
Aufgabe 7.9 Bestimmte Integrale mit Substitution	240
Aufgabe 7.10 Uneigentliche Integrale.....	241
Aufgabe 7.11 Spezielle bestimmte Integrale	242
Aufgabe 7.12 Linearer-, quadratischer- und Betragsmittelwert	245
Aufgabe 7.13 Flächenberechnung mittels Integralrechnung.....	247
Aufgabe 7.14 Numerische Integration: Simpson-Verfahren	251
Aufgabe 7.15 Schnittflächen zwischen Funktionen	254
Aufgabe 7.16 Integration in Parameterdarstellung.....	257

Aufgabe 7.17 Integration in Polarkoordinaten.....	260
Aufgabe 7.18 Bogenlängenberechnung mittels Integration.....	262
Aufgabe 7.19 Berechnung eines Rotationsvolumens.....	264
Aufgabe 7.20 Berechnung eines Rotationsvolumens.....	265
Aufgabe 7.21 Berechnung einer Rotationsoberfläche.....	267
Aufgabe 7.22 Bogenlängenberechnung	269
 8 Komplexe Zahlen	271
Aufgabe 8.1 Grundrechenarten mit komplexen Zahlen	271
Aufgabe 8.2 Umwandlung zwischen Darstellungsformen.....	272
Aufgabe 8.3 Berechnungen in verschiedenen Darstellungsformen	276
Aufgabe 8.4 Anwendungsbeispiel zur Euler-Formel	278
Aufgabe 8.5 Wurzeln und Logarithmen.....	279
Aufgabe 8.6 Vertiefende Rechenbeispiele	286
Aufgabe 8.7 Winkelfunktionen und Hyperbelfunktionen	288
Aufgabe 8.8 Faktorisierung komplexer Polynome	290
Aufgabe 8.9 Komplexwertige Partialbruchzerlegung	293
Aufgabe 8.10 Lösungsmengen komplexzahliger Gleichungen.....	294
Aufgabe 8.11 Zeichnen von Ortskurven	299
Aufgabe 8.12 Arbeiten mit Ortskurven.....	300
Aufgabe 8.13 Textbeispiel – komplexe Wechselstromwiderstände	302
Aufgabe 8.14 Textbeispiel – komplexe Wechselstromwiderstände	303
 9 Funktionen mehrerer Variabler und Vektoranalysis	305
Aufgabe 9.1 Parameterdarstellung einer mehrdimensionaler Funktion	305
Aufgabe 9.2 Höhenliniendiagramme mehrdim. Funktionen.....	307
Aufgabe 9.3 Partielle Ableitungen, Satz von Schwarz.....	309
Aufgabe 9.4 Partielle Ableitungen, Satz von Schwarz.....	310
Aufgabe 9.5 Totales Differential, lineare Näherung	311
Aufgabe 9.6 Totales Differential, lineare Näherung	313
Aufgabe 9.7 Ebenengleichung einer Tangentialebene	315
Aufgabe 9.8 Differentialformen, Integrabilitätsbedingung.....	316
Aufgabe 9.9 Ableiten implizit gegebener Funktionen	318
Aufgabe 9.10 Extremwerte mehrdimensionaler Funktionen	320

Aufgabe 9.11 Gleichung eines Rotationsparaboloids.....	323
Aufgabe 9.12 Unbestimmte Mehrfachintegrale	323
Aufgabe 9.13 Bestimmte Mehrfachintegrale.....	325
Aufgabe 9.14 Textbeispiel – Mehrfachintegral	326
Aufgabe 9.15 Flächenberechnung in Polarkoordinaten	327
Aufgabe 9.16 Schwerpunktsberechnung einer Fläche	328
Aufgabe 9.17 Schwerpunktsberechnung einer Fläche	329
Aufgabe 9.18 Schwerpunktsberechnung in Polarkoordinaten	330
Aufgabe 9.19 Schwerpunktsberechnung einer Fläche.....	333
Aufgabe 9.20 Schwerpunktsberechnung eines Rotationsvolumens	334
Aufgabe 9.21 Massenträgheitsmomente der Rotation.....	336
Aufgabe 9.22 Vektorwertiges Integral.....	337
Aufgabe 9.23 Volumenintegration in Kugelkoordinaten.....	340
Aufgabe 9.24 Gradienten von Skalarfeldern	342
Aufgabe 9.25 Richtungsableitungen in Skalarfeldern	343
Aufgabe 9.26 Richtungsableitungen in Skalarfeldern	344
Aufgabe 9.27 Totales Differential im Skalarfeld.....	345
Aufgabe 9.28 Vektorfelder, Konservatives Kraftfeld	346
Aufgabe 9.29 Linienintegrale in Vektorfeldern.....	348
Aufgabe 9.30 Das Potentialfeld eines Vektorfeldes	350
Aufgabe 9.31 Divergenz und Rotation von Vektorfeldern	351
Aufgabe 9.32 Das Potentialfeld eines Vektorfeldes	353
Aufgabe 9.33 Das Potentialfeld eines Vektorfeldes	354
Aufgabe 9.34 Bsp. für ein zentralsymmetrisches Potentialfeld.....	355
Aufgabe 9.35 Vektorfelder in Kugelkoordinaten	356
 10 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.....	359
Aufgabe 10.1 Textbeispiel – Permutationen.....	359
Aufgabe 10.2 Textbeispiel – Kombinationen	359
Aufgabe 10.3 Textbeispiel – Variationen.....	360
Aufgabe 10.4 Textbeispiel Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	361
Aufgabe 10.5 Textbeispiel Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	363
Aufgabe 10.6 Textbeispiel Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	363
Aufgabe 10.7 Textbeispiel Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	365

Aufgabe 10.8 Textbeispiel Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	366
Aufgabe 10.9 Textbeispiel Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	367
Aufgabe 10.10 Textbeispiel zum konsequenten logischen Denken	369
Aufgabe 10.11 Diskrete Verteilung: Erwartungswert und Varianz	370
Aufgabe 10.12 Kontinuierliche Verteilung: Dichtefunktion, Verteilungsfunktion.....	372
Aufgabe 10.13 Binomialverteilung	380
Aufgabe 10.14 Kontinuierliche Verteilung: Erwartungswert, Varianz	381
Aufgabe 10.15 Gauß-Verteilung, ihre Kenngrößen	383
Aufgabe 10.16 Konfidenzintervalle der Gauß-Verteilung	386
Aufgabe 10.17 Stichprobe und Grundgesamtheit	388
Aufgabe 10.18 Spezielle Konfidenzintervalle bei Gauß.....	390
Aufgabe 10.19 Verschiedene Mittelwerte	391
Aufgabe 10.20 Textbeispiel – Poissonverteilung	392
Aufgabe 10.21 Textbeispiel – Poissonverteilung	393
Aufgabe 10.22 Textbeispiel – Exponentialverteilung	393
Aufgabe 10.23 Textbeispiel – Hypergeometrische Verteilung	395
Aufgabe 10.24 Das Geburtstagsproblem	396
Aufgabe 10.25 Das Rosinenproblem	400
Aufgabe 10.26 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung	402
Aufgabe 10.27 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung	403
Aufgabe 10.28 Regressionsgerade	404
Aufgabe 10.29 Nichtlineare Regression	407
Aufgabe 10.30 Regressionsgerade	410
Aufgabe 10.31 Nichtlineare Regression	411
Aufgabe 10.32 Chi-Quadrat-Test einer Gleichverteilung	414
Aufgabe 10.33 Chi-Quadrat-Test einer Gauß-Verteilung.....	415
11 Folgen und Reihen.....	421
Aufgabe 11.1 Erkennen von Bildungsgesetzen.....	421
Aufgabe 11.2 Grenzwerte konvergenter Folgen	421
Aufgabe 11.3 Endliche Reihe (als Summenformel).....	423
Aufgabe 11.4 Textbeispiel zum konsequenten logischen Denken	424
Aufgabe 11.5 Zinseszins-Berechnung (geometrische Reihe)	424
Aufgabe 11.6 Zinseszins-Berechnung (geometrische Reihe)	425
Aufgabe 11.7 Effektiver Jahreszins (geometrische Folge).....	426

Aufgabe 11.8 Kapitalwert zum verschiedenen Zeitpunkten.....	426
Aufgabe 11.9 Tilgungsrechnung, Ratentilgung	428
Aufgabe 11.10 Tilgungsrechnung, Annuitätentilgung	430
Aufgabe 11.11 Binomialkoeffizienten	432
Aufgabe 11.12 Binomischer Lehrsatz	433
Aufgabe 11.13 Näherungsrechnung – Binomischer Lehrsatz	434
Aufgabe 11.14 Grenzwert einer unendl. geometrischen Reihe	435
Aufgabe 11.15 Textbeispiel zu einer endlichen Reihe	435
Aufgabe 11.16 Grenzwerte konvergenter Reihen.....	436
Aufgabe 11.17 Konvergenzuntersuchungen an Reihen.....	438
Aufgabe 11.18 Konvergenzuntersuchungen an Reihen.....	442
Aufgabe 11.19 Konvergenzradien von Potenzreihen	442
Aufgabe 11.20 Konvergenzradius einer komplexen Potenzreihe.....	445
Aufgabe 11.21 Entwicklung von Mac Laurin-Reihen.....	446
Aufgabe 11.22 Entwicklung von Taylor-Reihen	452
Aufgabe 11.23 Verknüpfen von Potenzreihen.....	454
Aufgabe 11.24 Integration einer Potenzreihe	456
Aufgabe 11.25 Restgliedabschätzung nach Lagrange	456
Aufgabe 11.26 Näherungspolynome aus Potenzreihen	457
Aufgabe 11.27 Näherungspolynome aus Potenzreihen	459
Aufgabe 11.28 L'Hospital'sche Regel.....	462
Aufgabe 11.29 Funktionswerte aus Taylorreihen.....	464
Aufgabe 11.30 Reellwertige Fourier-Reihe.....	466
Aufgabe 11.31 Reellwertige Fourier-Reihe.....	468
Aufgabe 11.32 Reellwertige Fourier-Reihe.....	471
Aufgabe 11.33 Komplexwertige Fourier-Reihe	473
12 Gewöhnliche Differentialgleichungen.....	475
Aufgabe 12.1 Die Methode der Variablentrennung	475
Aufgabe 12.2 Aufsuchen von Partikulärlösungen von Dgln.	477
Aufgabe 12.3 Implizite Lösungen von Dgln.	484
Aufgabe 12.4 Isoklinen von Differentialgleichungen	485
Aufgabe 12.5 Singuläre Lösungen von Differentialgleichungen	487
Aufgabe 12.6 Exakte Differentialgleichungen	489

Aufgabe 12.7 Inhomogene lineare Differentialgleichungen	491
Aufgabe 12.8 Homogene lineare Dgln. 2. Ordnung	495
Aufgabe 12.9 Inhomogene lineare Dgln. 2. Ordnung.....	496
Aufgabe 12.10 Homogene lineare Dgln. n-ter Ordnung.....	498
Aufgabe 12.11 Inhomogene lineare Dgln. n-ter Ordnung.....	501
13 Funktionaltransformationen.....	503
Vorbemerkung.....	503
Aufgabe 13.1 Fourier-Transformationen	503
Aufgabe 13.2 Laplace-Transformationen nach Definition.....	506
Aufgabe 13.3 Laplace-Transformationen nach Korrespondenztabelle	508
Aufgabe 13.4 Laplace-Rücktransformationen, Faltungsprodukt	512
Aufgabe 13.5 Laplace- Rücktransformationen (allgemein).....	514
Aufgabe 13.6 Lösen von Dgln. mittels Laplace-Transformation.....	517
14 Musterklausuren (verschiedener Hochschulen)	521
Klausur 14.1: Analysis 1 (1. Semester).....	521
Klausur 14.2: Analysis 2 (2. Semester).....	522
Klausur 14.3: Erstes Semester (Grundlagen und Differentialrechnung).....	524
Klausur 14.4: Zweites Semester (verschiedene Themen)	525
Klausur 14.5: Drittes Semester (anwendungsnahe Themen)	527
Klausur 14.6: Drittes Semester (anwendungsnahe Themen)	528
Klausur 14.7: Erstes Semester (Master / Bachelor-Programm)	530
Klausur 14.8: Zweites Semester (Master / Bachelor-Programm).....	531
Lösungen zur Klausur Nr. 14.1	532
Lösungen zur Klausur Nr. 14.2	535
Lösungen zur Klausur Nr. 14.3	538
Lösungen zur Klausur Nr. 14.4	541
Lösungen zur Klausur Nr. 14.5	546
Lösungen zur Klausur Nr. 14.6	549
Lösungen zur Klausur Nr. 14.7	553
Lösungen zur Klausur Nr. 14.8	557

15 Anhang: Tabellen und Formeln.....	563
15.1 Formeln zu Kapitel 1	563
15.2 Formeln zu Kapitel 2	564
15.3 Formeln zu Kapitel 3	566
15.4 Formeln zu Kapitel 4	566
15.5 Formeln zu Kapitel 5	570
15.6 Formeln zu Kapitel 6	571
15.7 Formeln zu Kapitel 7	573
15.8 Formeln zu Kapitel 8	576
15.9 Formeln zu Kapitel 9	577
15.10 Formeln zu Kapitel 10	580
15.11 Formeln zu Kapitel 11	584
15.12 Formeln zu Kapitel 12	587
15.13 Formeln zu Kapitel 13	588
15.14 Tabelle 1: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	590
15.15 Tabelle 2: Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung.....	591
15.16 Tabelle 3: Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation.....	592
15.17 Tabelle 4: Einige Ableitungen und unbestimmte Integrale.....	593
15.18 Literaturhinweise.....	594
 Sachwortverzeichnis.....	 595