

# Inhaltsverzeichnis

## Teil 1

1	Einiges über Logik	1
1.1	Aussagenlogik (Junktorenlogik) . . . . .	2
1.2	Quantoren . . . . .	8
1.3	Mengen . . . . .	13
2	Relationen - Abbildungen	19
2.1	Geordnete Paare und Relationen . . . . .	19
2.2	Ordnungsrelationen . . . . .	21
2.3	Äquivalenzrelationen . . . . .	23
2.4	Abbildungen . . . . .	26
3	Zahlen	29
3.1	Die reellen Zahlen . . . . .	29
3.2	Die stufenweise Zahlenbereichserweiterung $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , eine Skizze . . . . .	40
3.3	Betrags- und Signums-Funktion . . . . .	47
3.4	Folgen, Rekursion und Induktion . . . . .	50
4	Der Grenzwertbegriff	61
4.1	Funktionen . . . . .	61
4.2	Grenzwert bei Funktionen . . . . .	66
4.3	Stetigkeit bei Funktionen . . . . .	77
4.4	Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	86
4.5	Reelle und komplexe Zahlenfolgen . . . . .	99
4.6	Reihen . . . . .	119
4.7	Potenzreihen . . . . .	140
5	Differentiation	149
5.1	Differenzierbarkeit . . . . .	149
5.2	Differentiation von Potenzreihen – Exponentialfunktion . . . . .	158
5.3	Mittelwertsätze – Monotonie – Extrema – Umkehrfunktionen . . . . .	167
5.4	Logarithmus und allgemeine Potenz . . . . .	184

5.5	Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung . . . . .	188
5.6	Taylor-Polynome und Taylor-Reihen . . . . .	212
6	Integration . . . . .	227
6.1	Definition des Integrals . . . . .	227
6.2	Eigenschaften des Integrals . . . . .	236
6.3	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	249
6.4	Explizit berechenbare Integrale – Integrationsmethoden . . . . .	259
6.5	Integration rationaler Funktionen . . . . .	264
6.6	Integrale, die sich auf Integrale rationaler Funktionen zurückführen lassen . . . . .	276
6.7	Inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung . . . . .	282
6.8	Uneigentliche Integrale . . . . .	288
7	Limesvertauschungen . . . . .	308
7.1	Gleichmäßige Konvergenz . . . . .	316
7.2	Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Grenzfunktionen . . . . .	325
7.3	Vertauschungen von limes und Integral . . . . .	332

## Lineare Algebra

8	Lineare Räume . . . . .	343
8.1	Zur Definition von linearen Räumen . . . . .	343
8.2	Skalarprodukt und Norm . . . . .	349
8.3	Lineare Unabhängigkeit – Dimension – Basis . . . . .	357
8.4	Teilräume – Summen, direkte Summen von Teilräumen . . . . .	373
8.5	Bemerkungen über „Vektoren“ in der klassischen Physik . . . . .	384
9	Affine Teilräume . . . . .	386
9.1	Affine Teilräume eines linearen Raumes . . . . .	386
9.2	Hyperebenen in euklidischen und unitären Räumen – Normalendarstellung . . . . .	392
10	Lineare Abbildungen und Matrizen . . . . .	397
10.1	Definition und Beispiele linearer Abbildungen . . . . .	397
10.2	Wertebereich, Nullraum und Invertierbarkeit linearer Abbildungen . . . . .	400
10.3	Matrizen – Matrixdarstellung linearer Abbildungen . . . . .	408
10.4	Adjungierte und inverse Abbildungen und Matrizen . . . . .	423

<b>11 Determinanten</b>	<b>439</b>
11.1 Vektorprodukt und Spatprodukt im $\mathbb{V}^3$ . . . . .	439
11.2 Existenz und Eindeutigkeit der Determinante . . . . .	445
<b>12 Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>467</b>
12.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen . . . . .	467
12.2 Lineare Gleichungssysteme mit quadratischer Koeffizientenmatrix . . . . .	474
12.3 Lösen beliebiger linearer $m \times n$ -Gleichungssysteme . . . . .	476
<b>13 Transformation von Koordinaten und Matrixdarstellung linearer Abbildungen</b>	<b>485</b>
13.1 Transformation von Koordinaten bei Basiswechsel . . . . .	485
13.2 Transformation von Matrixdarstellungen linearer Abbildungen bei Basiswechsel	490
13.3 Orthogonale Transformationen – unitäre Abbildungen . . . . .	496
<b>14 Dualräume – Multilinearformen – Tensoren</b>	<b>500</b>
14.1 Dualräume . . . . .	500
14.2 Multilinearformen und Tensoren – eine Skizze . . . . .	504
14.3 Beispiele zur Tensorrechnung ( <i>von Joachim Asch</i> ) . . . . .	512
<b>15 Eigenwerte linearer Abbildungen und Matrizen</b>	<b>520</b>
15.1 Eigenwerte – Eigenvektoren – Charakteristisches Polynom . . . . .	520
15.2 Eigenwerte und Eigenräume symmetrischer Abbildungen . . . . .	528
<b>Kleines Lexikon mathematischer Grundvokablen</b>	<b>548</b>
<b>Hinweise zu den Aufgaben</b>	<b>550</b>
<b>Literatur</b>	<b>565</b>
<b>Symbolliste</b>	<b>567</b>
<b>Index</b>	<b>569</b>

## Teil 2

16	Abbildungen aus dem $\mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^n$	583
17	Differentiation bei Abbildungen aus $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$	612
18	Kurvenintegrale	689
19	Integration im $\mathbb{R}^m$	748
20	Oberflächenintegrale	835
21	Integralsätze	862
22	Funktionentheorie	906
23	Gewöhnliche Differentialgleichungen: Lösungen und Lösungsmethoden bei speziellen Typen	981
24	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen	1014
25	Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung	1039
26	(Prä-) Hilbert-Räume – Weierstraß'scher Approximationssatz – Fourier-Reihen und Fourier-Transformation	1072
27	Lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung	1143
	Hinweise zu den Aufgaben	1213
	Literatur	1227
	Symbolliste	1229
	Index	1231