

# Inhaltsverzeichnis

<b>1.</b>	<b>Mengen und Zahlen . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1.	Klassen und Mengen, Relationen und Funktionen . . . . .	13
1.2.	Zahlen und Folgen . . . . .	19
1.2.1.	Natürliche Zahlen . . . . .	20
1.2.2.	Ganze Zahlen . . . . .	21
1.2.3.	Rationale Zahlen . . . . .	21
1.2.4.	Reelle Zahlen . . . . .	22
1.2.5.	Komplexe Zahlen . . . . .	29
1.3.	Kombinatorik . . . . .	32
1.3.1.	Permutationen . . . . .	32
1.3.2.	Variationen und Kombinationen . . . . .	33
1.4.	Aufgaben zu 1.1.—1.3. . . . .	35
<b>2.</b>	<b>Reelle Funktionen reeller Veränderlicher . . . . .</b>	<b>37</b>
2.1.	Funktionen und ihre Darstellung . . . . .	37
2.2.	Einfachste Funktionen . . . . .	48
2.2.1.	Rationale Funktionen . . . . .	48
2.2.2.	Potenzfunktionen und Exponentialfunktionen . . . . .	50
2.2.3.	Logarithmus . . . . .	54
2.2.4.	Trigonometrische (Kreis-)Funktionen . . . . .	57
2.2.5.	Zyklotomische Funktionen . . . . .	63
2.2.6.	Hyperbelfunktionen und ihre Umkehr . . . . .	64
2.3.	Aufgaben zu 2.1.—2.2. . . . .	66
<b>3.</b>	<b>Algebraische Gleichungen und Matrizen . . . . .</b>	<b>67</b>
3.1.	Algebraische Gleichungen mit einer Unbekannten . . . . .	67
3.1.1.	Sätze über die reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen und deren Berechnung . . . . .	68
3.2.	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	72
3.2.1.	Determinanten . . . . .	72
3.2.2.	Auflösung linearer Gleichungssysteme mit Hilfe von Determinanten . . . . .	75
3.3.	Matrizen . . . . .	76
3.3.1.	Allgemeine Definitionen und Verknüpfungsregeln . . . . .	76
3.3.2.	Spezielle Matrizen . . . . .	78

3.3.3.	Eigenwerte, Eigenvektoren . . . . .	80
3.4.	Lineare Transformationen . . . . .	83
3.4.1.	Allgemeines über Transformationen . . . . .	83
3.4.2.	Orthogonale Transformationen . . . . .	85
3.5.	Aufgaben zu 3.1.—3.4. . . . .	90
<b>4.</b>	<b>Differentialrechnung . . . . .</b>	<b>91</b>
4.1.	Ableitung der Funktionen mit einer Veränderlichen . . . . .	91
4.1.1.	Ableitung und Differentialquotient . . . . .	91
4.1.2.	Differentiale als unendlich kleine Größen . . . . .	95
4.1.3.	Differentialquotient einer Potenz mit beliebigem Exponenten . . . . .	96
4.1.4.	Differentialquotient einer Funktion mit einem konstanten Koeffizienten und einer vielgliedrigen Summe . . . . .	98
4.1.5.	Differentialquotient einer Exponentialfunktion . . . . .	98
4.1.6.	Differentialquotienten trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen . . . . .	99
4.1.7.	Differentialquotient eines Produkts und eines Quotienten . . . . .	100
4.1.8.	Differentialquotient der Umkehrfunktion . . . . .	102
4.1.9.	Stufenweise Differentiation (Kettenregel) . . . . .	104
4.1.10.	Differentiation von Funktionen in Parameterdarstellung . . . . .	108
4.1.11.	Ableitungen und Differentialquotienten höherer Ordnung . . . . .	108
4.1.12.	Höhere Differentialquotienten einer Potenz . . . . .	110
4.1.13.	Höhere Differentialquotienten exponentieller und trigonometrischer Funktionen . . . . .	110
4.1.14.	Wiederholte Differentiation eines Produkts . . . . .	111
4.1.15.	Höhere Differentialquotienten einer Funktion, die indirekt von der Veränderlichen abhängt . . . . .	112
4.1.16.	Zweiter Differentialquotient für Funktionen in Parameterdarstellung . . . . .	112
4.2.	Einige Anwendungen des Differentialquotienten . . . . .	113
4.2.1.	Maxima und Minima einer Funktion . . . . .	113
4.2.2.	Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . . .	116
4.2.3.	Regel von BERNOULLI und DE L'HOSPITAL zur Bestimmung von Grenzwerten . . . . .	118
4.2.4.	TAYLORSCHER SATZ . . . . .	121
4.3.	Ableitung der Funktionen mit mehreren Veränderlichen . . . . .	125
4.3.1.	Partielle Differentialquotienten und totales Differential . . . . .	125
4.3.2.	Einfluß der Meßgenauigkeit auf das Endergebnis . . . . .	129
4.3.3.	Höhere partielle Differentialquotienten . . . . .	130
4.3.4.	Bedingungen dafür, daß $\varphi(x,y) dx + \psi(x,y) dy$ ein vollständiges Differential ist . . . . .	131
4.3.5.	Differentiation von Funktionen, wenn neue Veränderliche eingeführt werden . . . . .	132
4.4.	Einige Anwendungen der partiellen Ableitungen . . . . .	146
4.4.1.	TAYLORSCHER SATZ für eine Funktion mit mehreren Veränderlichen . . . . .	136
4.4.2.	Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	137
4.4.3.	Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Veränderlicher bei Bestehen von Nebenbedingungen . . . . .	139
4.5.	Aufgaben zu 4.1.—4.4. . . . .	140

<b>5.</b>	<b>Aus der analytischen Geometrie . . . . .</b>	<b>143</b>
5.1.	Lineare Gebilde . . . . .	144
5.2.	Ebene Kurven, insbesondere Kurven zweiten Grades. . . . .	146
5.2.1.	Gleichungen der Tangente und Normale einer Kurve. . . . .	146
5.2.2.	Bogenelement einer Kurve . . . . .	149
5.2.3.	Krümmung und Krümmungsradius . . . . .	149
5.2.4.	Kreis . . . . .	151
5.2.5.	Ellipse . . . . .	151
5.2.6.	Hyperbel und Parabel . . . . .	155
5.2.7.	Ausgeartete Kegelschnitte . . . . .	159
5.2.8.	Diskussion der Kurven zweiten Grades. Hauptachsentransformation. . . . .	159
5.3.	Flächen zweiten Grades . . . . .	165
5.3.1.	Rotationsflächen zweiten Grades . . . . .	165
5.3.2.	Allgemeine Flächen zweiten Grades . . . . .	168
5.4.	Aufgaben zu 5.1.—5.3. . . . .	171
<b>6.</b>	<b>Integralrechnung . . . . .</b>	<b>173</b>
6.1.	Bestimmtes Integral . . . . .	174
6.1.1.	Definition und Eigenschaften eines bestimmten Integrals . . . . .	174
6.1.2.	Bogenlänge. . . . .	178
6.2.	Unbestimmtes Integral . . . . .	179
6.2.1.	Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration. . . . .	179
6.2.2.	Stammfunktionen zu den einfachsten Funktionen . . . . .	180
6.3.	Integrationsmethoden für analytisch auswertbare Integrale . . . . .	182
6.3.1.	Integral einer Summe oder Differenz von Funktionen . . . . .	182
6.3.2.	Partielle Integration . . . . .	183
6.3.3.	Einführung einer neuen Veränderlichen . . . . .	185
6.3.4.	Anwendung der Integrationsmethoden auf einige Funktionenklassen . . . . .	188
6.4.	Einige Anwendungen der Integration . . . . .	199
6.4.1.	Integraldarstellung des Restgliedes der TAYLORSCHEN Entwicklung . . . . .	199
6.4.2.	Einige geometrische Anwendungen . . . . .	200
6.5.	Uneigentliche Integrale, Parameterintegrale und Kurvenintegrale . . . . .	202
6.6.	Mehrfache Integrale . . . . .	211
6.6.1.	Doppelintegrale . . . . .	211
6.6.2.	Dreifache Integrale . . . . .	216
6.7.	Aufgaben zu 6.1.—6.6. . . . .	218
<b>7.</b>	<b>Vektor- und Tensorrechnung . . . . .</b>	<b>221</b>
7.1.	Definition des Vektors und Tensors . . . . .	221
7.2.	Vektoralgebra . . . . .	227
7.2.1.	Addition, Subtraktion, lineare Abhängigkeit . . . . .	227
7.2.2.	Skalares Produkt zweier Vektoren . . . . .	229
7.2.3.	Vektorprodukt zweier Vektoren . . . . .	231
7.2.4.	Mehrfache Produkte von Vektoren . . . . .	234
7.2.5.	Einige Anwendungen . . . . .	235

<b>7.3.</b>	<b>Differentialgeometrie der Raumkurven und Flächen . . . . .</b>	<b>238</b>
7.3.1.	Differentialgeometrie der Raumkurven . . . . .	238
7.3.2.	Differentialgeometrie der Flächen . . . . .	242
<b>7.4.</b>	<b>Felder und Integralsätze . . . . .</b>	<b>250</b>
7.4.1.	Gradient . . . . .	250
7.4.2.	Vektorfelder . . . . .	252
7.4.3.	Rotation und Integralsatz von STOKES . . . . .	256
7.4.4.	Divergenz und Integralsatz von GAUSS . . . . .	260
7.4.5.	Sprungflächen . . . . .	263
7.4.6.	Vektorumformungen . . . . .	265
7.4.7.	Vektoroperationen in allgemeinen krummlinigen Koordinaten . . . . .	266
7.4.8.	Vektoroperationen in krummlinigen orthogonalen Koordinaten . . . . .	272
7.4.9.	Spezielle Vektorfelder . . . . .	274
<b>7.5.</b>	<b>Aufgaben zu 7.1.—7.4. . . . .</b>	<b>279</b>
<b>8.</b>	<b>Reihen, FOURIER-Integral und <math>\delta</math>-Funktion . . . . .</b>	<b>280</b>
8.1.	Reihen . . . . .	280
8.2.	Potenzreihen . . . . .	283
8.2.1.	Asymptotische Reihen . . . . .	287
8.3.	FOURIERSche Reihen . . . . .	290
8.4.	Vektorräume, Funktionenräume . . . . .	297
8.4.1.	Vektorräume, HILBERT-Räume . . . . .	297
8.4.2.	Integrationsräume . . . . .	301
8.4.3.	Lineare Operatoren . . . . .	305
8.5.	FOURIER-Integral . . . . .	306
8.6.	$\delta$ -Funktion . . . . .	309
8.7.	Aufgaben zu 8.1.—8.6. . . . .	314
<b>9.</b>	<b>Funktionen einer komplexen Veränderlichen . . . . .</b>	<b>316</b>
9.1.	Ableitung, Integral und Reihen . . . . .	316
9.1.1.	Ableitung einer komplexen Funktion . . . . .	316
9.1.2.	Konforme Abbildung . . . . .	318
9.1.3.	Anwendung der konformen Abbildung . . . . .	321
9.1.4.	Integrale komplexer Funktionen . . . . .	323
9.1.5.	Potenzreihe, TAYLORSche Reihe, Analytische Fortsetzung . . . . .	325
9.1.6.	LAURENTSche Reihe, Residuum . . . . .	329
9.1.7.	Anwendung des Residuensatzes . . . . .	332
9.2.	LAPLACE-Transformation . . . . .	335
9.2.1.	Operationen . . . . .	336
9.2.2.	Korrespondenzen . . . . .	340
9.3.	Aufgaben zu 9.1.—9.2. . . . .	343
<b>10.</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen und spezielle Funktionen . . . . .</b>	<b>344</b>
10.1.	Allgemeines über Differentialgleichungen . . . . .	344
10.1.1.	Auftreten von Differentialgleichungen, ein Beispiel aus der Physik . . . . .	344
10.1.2.	Einteilung der Differentialgleichungen . . . . .	345

<b>10.1.3.</b>	<b>Integrationskonstanten in den Lösungen von Differentialgleichungen . . . . .</b>	<b>345</b>
<b>10.2.</b>	<b>Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .</b>	<b>347</b>
<b>10.2.1.</b>	<b>Graphische Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung . . . . .</b>	<b>347</b>
<b>10.2.2.</b>	<b>Trennung der Veränderlichen . . . . .</b>	<b>348</b>
<b>10.2.3.</b>	<b>Gleichungen mit totalen Differentialen . . . . .</b>	<b>349</b>
<b>10.2.4.</b>	<b>Lineare Differentialgleichung erster Ordnung . . . . .</b>	<b>350</b>
<b>10.3.</b>	<b>Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung . . . . .</b>	<b>350</b>
<b>10.3.1.</b>	<b>Erniedrigung der Ordnung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung . . . . .</b>	<b>351</b>
<b>10.3.2.</b>	<b>Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .</b>	<b>352</b>
<b>10.3.3.</b>	<b>Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten . . . . .</b>	<b>357</b>
<b>10.3.4.</b>	<b>Nichtlineare Differentialgleichungen . . . . .</b>	<b>362</b>
<b>10.4.</b>	<b>Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen . . . . .</b>	<b>363</b>
<b>10.5.</b>	<b>Zylinderfunktionen und Kugelfunktionen . . . . .</b>	<b>366</b>
<b>10.5.1.</b>	<b>Zylinderfunktionen (BESSELSche Funktionen) . . . . .</b>	<b>367</b>
<b>10.5.2.</b>	<b>Kugelfunktionen (LEGENDRESche Funktionen) . . . . .</b>	<b>373</b>
<b>10.6.</b>	<b>Aufgaben zu 10.1.—10.5. . . . .</b>	<b>378</b>
<b>11.</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen . . . . .</b>	<b>380</b>
<b>11.1.</b>	<b>Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .</b>	<b>380</b>
<b>11.2.</b>	<b>Quasilineare und lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .</b>	<b>383</b>
<b>11.2.1.</b>	<b>Charakteristikenmethode . . . . .</b>	<b>383</b>
<b>11.2.2.</b>	<b>Randbedingungen . . . . .</b>	<b>389</b>
<b>11.2.3.</b>	<b>Lösungsmethoden linearer Differentialgleichungen . . . . .</b>	<b>390</b>
<b>11.3.</b>	<b>Quasilineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung . . . . .</b>	<b>391</b>
<b>11.4.</b>	<b>LAPLACESche und POISSONSche Differentialgleichung (Potentialtheorie) . . . . .</b>	<b>393</b>
<b>11.4.1.</b>	<b>Lösung der LAPLACESchen Gleichung durch Produktansatz . . . . .</b>	<b>393</b>
<b>11.4.2.</b>	<b>Anwendung der GREENSchen Formeln auf harmonische Funktionen . . . . .</b>	<b>398</b>
<b>11.4.3.</b>	<b>Lösung der POISSONSchen Gleichung mit Hilfe der GREENSchen Funktion . . . . .</b>	<b>399</b>
<b>11.5.</b>	<b>Wellengleichung . . . . .</b>	<b>403</b>
<b>11.6.</b>	<b>Diffusionsgleichung . . . . .</b>	<b>407</b>
<b>11.7.</b>	<b>Aufgaben zu 11.1.—11.6. . . . .</b>	<b>409</b>
<b>12.</b>	<b>Lineare Integralgleichungen . . . . .</b>	<b>409</b>
<b>12.1.</b>	<b>FREDHOLMSche Integralgleichungen . . . . .</b>	<b>411</b>
<b>12.1.1.</b>	<b>Entwicklungen nach Eigenfunktionen . . . . .</b>	<b>411</b>
<b>12.1.2.</b>	<b>Iterationsverfahren . . . . .</b>	<b>413</b>
<b>12.2.</b>	<b>ABELSche Integralgleichung . . . . .</b>	<b>415</b>
<b>12.3.</b>	<b>Aufgaben zu 12.1.—12.2. . . . .</b>	<b>417</b>
<b>13.</b>	<b>Variationsrechnung . . . . .</b>	<b>417</b>
<b>13.1.</b>	<b>Variationsprobleme mit einer Funktion einer Veränderlichen . . . . .</b>	<b>418</b>
<b>13.1.1.</b>	<b>Extremwerte von Integralen mit Nebenbedingungen . . . . .</b>	<b>422</b>

<b>12</b>	<b>Inhaltsverzeichnis</b>	
13.2.	Variationsprobleme mit mehreren Funktionen und Veränderlichen . . . . .	424
13.3.	Aufgaben zu 13.1.—13.2. . . . .	425
<b>14.</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> . . . . .	425
14.1.	Wahrscheinlichkeit und Verteilungsfunktion . . . . .	426
14.2.	Versuche mit abzählbarer Ereignismenge . . . . .	429
14.2.1.	Binomische Verteilung . . . . .	430
14.2.2.	Poisson-Verteilung . . . . .	431
14.2.3.	Erwartungswerte, Momente . . . . .	432
14.3.	Versuche mit nichtabzählbarer Ereignismenge . . . . .	436
14.3.1.	Normalverteilung (GAUSS-Verteilung) . . . . .	438
14.3.2.	Fehlerrechnung . . . . .	439
14.4.	Aufgaben zu 14.1.—14.3. . . . .	442
<b>15.</b>	<b>Numerische Methoden</b> . . . . .	443
15.1.	Auflösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	443
15.2.	Berechnung eines Polynomwerts . . . . .	444
15.3.	Interpolation . . . . .	444
15.3.1.	Polynome . . . . .	444
15.3.2.	Harmonische Analyse . . . . .	446
15.4.	Verbesserung einer annähernd bekannten Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ . . . . .	448
15.5.	Differentiation und Integration . . . . .	449
15.5.1.	Differentiation . . . . .	449
15.5.2.	Integration . . . . .	450
15.6.	Differentialgleichungen . . . . .	456
15.6.1.	Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	456
15.6.2.	Partielle Differentialgleichungen . . . . .	459
15.7.	Aufgaben zu 15.1.—15.6. . . . .	460
<b>16.</b>	<b>Lösungen der Aufgaben</b> . . . . .	466
	Literaturhinweise . . . . .	483
	Sachverzeichnis . . . . .	486