

# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Analytische Geometrie in der Ebene . . . . .</b>	<b>21</b>
§ 1. Grundsätzliches über die analytische Geometrie . . . . .	21
§ 2. Koordinaten . . . . .	22
§ 3. Rechtwinkliges Koordinatensystem . . . . .	22
§ 4. Rechtwinklige Koordinaten . . . . .	23
§ 5. Winkelbereiche oder Quadranten . . . . .	24
§ 6. Schiefwinkliges Koordinatensystem . . . . .	25
§ 7. Die Geradengleichung . . . . .	25
§ 8. Gegenseitige Lage von Punkt und Kurve . . . . .	27
§ 9. Gegenseitige Lage zweier Kurven . . . . .	27
§ 10. Der Abstand zwischen zwei Punkten . . . . .	28
§ 11. Teilabschnitte mit gegebenem Verhältnis . . . . .	28
§ 12. Die Determinante zweiter Ordnung . . . . .	30
§ 13. Der Flächeninhalt eines Dreiecks . . . . .	30
§ 14. Die Geradengleichung in der nach $y$ aufgelösten Form . . . . .	31
§ 15. Achsenparallele Geraden . . . . .	33
§ 16. Die allgemeine Geradengleichung . . . . .	34
§ 17. Konstruktion einer Geraden aus ihrer Gleichung . . . . .	35
§ 18. Parallelitätsbedingungen für Geraden . . . . .	36
§ 19. Schnittpunkte von Geraden . . . . .	37
§ 20. Bedingung für die Orthogonalität zweier Geraden . . . . .	38
§ 21. Der Winkel zwischen zwei Geraden . . . . .	39
§ 22. Bedingung dafür, daß drei Punkte auf einer Geraden liegen . . . . .	42
§ 23. Gleichung einer Geraden durch zwei gegebene Punkte . . . . .	42
§ 24. Geradenbüschel . . . . .	43
§ 25. Die Gleichung einer Geraden, die parallel zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt verläuft . . . . .	46
§ 26. Die Gleichung einer Geraden durch einen gegebenen Punkt und orthogonal zu einer gegebenen Geraden . . . . .	46
§ 27. Gegenseitige Lage einer Geraden und eines Punktpaares . . . . .	47
§ 28. Der Abstand eines Punktes von einer Geraden . . . . .	47
§ 29. Die Polarparameter der Geraden . . . . .	49
§ 30. Die Normalform der Geradengleichung . . . . .	51
§ 31. Die Bestimmung der Geradengleichung in Normalform . . . . .	52
§ 32. Achsenabschnitte . . . . .	53
§ 33. Die Abschnittsgleichung der Geraden . . . . .	54
§ 34. Koordinatentransformation (Erläuterung der Methode) . . . . .	54
§ 35. Verschiebung des Koordinatenursprungs . . . . .	55

§ 36. Die Parallelverschiebung als Abbildung . . . . .	56
§ 37. Grundsätzliches über Vektoren und Skalare . . . . .	56
§ 38. Bezeichnungen für Vektoren . . . . .	57
§ 39. Kollineare Vektoren . . . . .	57
§ 40. Der Nullvektor . . . . .	58
§ 41. Entgegengesetzte Vektoren . . . . .	58
§ 42. Die Gleichheit von Vektoren . . . . .	58
§ 43. Freie und gebundene Vektoren . . . . .	59
§ 44. Die Rückführung von Vektoren auf einen gemeinsamen Anfangspunkt . . . . .	60
§ 45. Vektoraddition . . . . .	60
§ 46. Die Summe mehrerer Vektoren . . . . .	62
§ 47. Die Vektorsubtraktion . . . . .	63
§ 48. Die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl . . . . .	64
§ 49. Beziehungen zwischen kollinearen Vektoren . . . . .	65
§ 50. Die Projektion eines Punktes auf eine Achse . . . . .	66
§ 51. Die Projektion eines Vektors auf eine Achse . . . . .	67
§ 52. Grundlegende Theoreme über die Projektionen eines Vektors . . . . .	68
§ 53. Das Skalarprodukt zweier Vektoren . . . . .	70
§ 54. Eigenschaften des Skalarprodukts . . . . .	72
§ 55. Behandlung geometrischer Probleme mit Hilfe von Vektoren . . . . .	73
§ 56. Vektorielle Darstellung einer Geraden . . . . .	75
§ 57. Darstellung eines Vektors in einem rechtwinkligen Koordinatensystem . . . . .	75
§ 58. Achsendrehung . . . . .	77
§ 59. Darstellung einer Drehung durch eine Matrix . . . . .	78
§ 60. Das Rechnen mit Matrizen . . . . .	80
§ 61. Die transponierte und die inverse Matrix . . . . .	82
§ 62. Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	83
§ 63. Matrizen höherer Ordnung . . . . .	84
§ 64. Quadratische Formen . . . . .	85
§ 65. Algebraische Kurven und ihr Grad . . . . .	86
§ 66. Der Kreis . . . . .	87
§ 67. Bestimmung des Mittelpunktes und des Radius eines Kreises . . . . .	89
§ 68. Die Ellipse als gestauchter Kreis . . . . .	90
§ 69. Eine zweite Definition der Ellipse . . . . .	92
§ 70. Konstruktion einer Ellipse aus ihren Achsen . . . . .	95
§ 71. Die Hyperbel . . . . .	96
§ 72. Die Form einer Hyperbel. Scheitel und Achsen . . . . .	98
§ 73. Konstruktion einer Hyperbel aus ihren Achsen . . . . .	99
§ 74. Die Asymptoten der Hyperbel . . . . .	100
§ 75. Konjugierte Hyperbeln . . . . .	101
§ 76. Die Parabel . . . . .	102
§ 77. Konstruktion einer Parabel bei gegebenem Parameter $p$ . . . . .	103
§ 78. Die Parabel als Kurve mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ . . . . .	104
§ 79. Die Leitlinien einer Ellipse und einer Hyperbel . . . . .	107
§ 80. Allgemeine Definition von Ellipse, Hyperbel und Parabel . . . . .	109
§ 81. Kegelschnitte . . . . .	112

§ 82. Die Durchmesser eines Kegelschnitts . . . . .	113
§ 83. Die Durchmesser der Ellipse . . . . .	114
§ 84. Die Durchmesser der Hyperbel . . . . .	115
§ 85. Die Durchmesser der Parabel . . . . .	117
§ 86. Kurven zweiten Grades . . . . .	119
§ 87. Die Form der allgemeinen Gleichung zweiten Grades . . . . .	120
§ 88. Vereinfachung der Gleichung zweiten Grades. Allgemeine Bemerkungen . . . . .	121
§ 89. Vorläufige Transformation der Gleichung zweiten Grades . . . . .	121
§ 90. Endgültige Transformation der Gleichung zweiten Grades . . . . .	124
§ 91. Über Verfahren zur Erleichterung der Vereinfachung von Gleichungen zweiten Grades . . . . .	130
§ 92. Bestimmung des Typs einer Kurve zweiten Grades . . . . .	131
§ 93. Die Bestimmung der Geraden, aus denen eine zerfallende Kurve zweiter Ordnung besteht . . . . .	135
§ 94. Zentralsymmetrische und nichtzentralsymmetrische Kurven zweiten Grades . . . . .	137
§ 95. Die Bestimmung des Zentrums zentralsymmetrischer Kurven zweiter Ordnung . . . . .	139
§ 96. Die Vereinfachung der Gleichung einer zentralsymmetrischen Kurve zweiter Ordnung . . . . .	140
§ 97. Die gleichseitige Hyperbel als grafische Darstellung der Gleichung $y = \frac{k}{x}$ . . . . .	142
§ 98. Die gleichseitige Hyperbel als grafische Darstellung der Gleichung $y = \frac{mx + n}{px + q}$ . . . . .	143
§ 99. Polarkoordinaten . . . . .	146
§ 100. Die Beziehung zwischen Polarkoordinaten und rechtwinkligen Koordinaten . . . . .	148
§ 101. Die Archimedische Spirale . . . . .	151
§ 102. Die Polargleichung der Geraden . . . . .	153
§ 103. Die Polargleichung eines Kegelschnitts . . . . .	153
II. Analytische Geometrie im Raum . . . . .	155
§ 104. Räumliche Vektoren . . . . .	155
§ 105. Rechtwinkliges Koordinatensystem im Raum . . . . .	156
§ 106. Die Koordinaten eines Punktes . . . . .	158
§ 107. Die Koordinaten eines Vektors . . . . .	159
§ 108. Der Winkel zwischen den Koordinatenachsen und einem Vektor . . . . .	161
§ 109. Anwendungen des Skalarprodukts . . . . .	162
§ 110. Rechts- und Linkssysteme von drei Vektoren . . . . .	164
§ 111. Das Vektorprodukt zweier Vektoren . . . . .	166
§ 112. Die Eigenschaften des Vektorprodukts . . . . .	168
§ 113. Die Vektorprodukte der Achsenvektoren . . . . .	169
§ 114. Die Darstellung des Vektorprodukts durch die Koordinaten der Faktoren . . . . .	170
§ 115. Komplanare Vektoren . . . . .	172
§ 116. Das gemischte Produkt . . . . .	172

§ 117. Die Eigenschaften des gemischten Produktes . . . . .	174
§ 118. Die Determinante dritter Ordnung . . . . .	175
§ 119. Die Darstellung des gemischten Produktes durch die Koordinaten seiner Faktoren . . . . .	177
§ 120. Das doppelte Vektorprodukt . . . . .	178
§ 121. Die Gleichung einer Ebene . . . . .	179
§ 122. Parameterdarstellung einer Ebene . . . . .	180
§ 123. Ermittlung der Parameterdarstellung einer Ebene aus ihrer linearen Gleichung . . . . .	180
§ 124. Spezialfälle der Lage von Ebenen bezüglich des Koordi- naten systems . . . . .	181
§ 125. Die Bedingung für die Parallelität von Ebenen . . . . .	182
§ 126. Die Bedingung für die Orthogonalität zweier Ebenen . . . . .	183
§ 127. Der Winkel zwischen zwei Ebenen . . . . .	183
§ 128. Die Gleichung einer Ebene durch einen gegebenen Punkt und parallel zu einer gegebenen Ebene . . . . .	184
§ 129. Bestimmung einer Ebene durch drei Punkte . . . . .	184
§ 130. Achsenabschnitte . . . . .	185
§ 131. Die Abschnittsgleichung einer Ebene . . . . .	185
§ 132. Die Gleichung einer Ebene durch zwei Punkte und ortho- gonal zu einer gegebenen Ebene . . . . .	186
§ 133. Die Gleichung einer Ebene durch einen gegebenen Punkt und orthogonal zu zwei Ebenen . . . . .	187
§ 134. Der Schnittpunkt dreier Ebenen . . . . .	188
§ 135. Gegenseitige Lage von Ebene und Punktepaar . . . . .	189
§ 136. Der Abstand zwischen Punkt und Ebene . . . . .	189
§ 137. Die Polarparameter der Ebene . . . . .	190
§ 138. Die Normalform der Ebenengleichung . . . . .	192
§ 139. Die Bestimmung der Ebenengleichung in Normalform . . . . .	193
§ 140. Die Gleichung einer Geraden im Raum . . . . .	194
§ 141. Bedingung dafür, daß zwei Gleichungen ersten Grades eine Gerade darstellen . . . . .	196
§ 142. Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene . . . . .	197
§ 143. Richtungsvektoren . . . . .	198
§ 144. Der Winkel zwischen einer Geraden und den Koordinaten- achsen . . . . .	200
§ 145. Der Winkel zwischen zwei Geraden . . . . .	200
§ 146. Der Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene . . . . .	201
§ 147. Die Bedingungen für die Parallelität und Orthogonalität zwischen Gerade und Ebene . . . . .	201
§ 148. Ebenenbüschel . . . . .	202
§ 149. Die Projektionen einer Geraden auf die Koordinaten- ebenen . . . . .	204
§ 150. Die symmetrischen Geradengleichungen . . . . .	206
§ 151. Die Bestimmung der Geradengleichungen in symmetri- scher Form . . . . .	207
§ 152. Die Parameterdarstellung der Geraden . . . . .	209
§ 153. Der Schnitt einer Ebene mit einer Geraden in Parameter- form . . . . .	209
§ 154. Die Gleichung einer Geraden durch zwei gegebene Punkte . . . . .	210

§ 155. Die Gleichung einer Ebene durch einen gegebenen Punkt senkrecht zu einer gegebenen Geraden . . . . .	210
§ 156. Die Gleichung einer Geraden durch einen gegebenen Punkt senkrecht zu einer gegebenen Ebene . . . . .	211
§ 157. Die Gleichung einer Ebene durch einen gegebenen Punkt und durch eine gegebene Gerade . . . . .	211
§ 158. Die Gleichung einer Ebene durch einen gegebenen Punkt und parallel zu zwei gegebenen Geraden . . . . .	212
§ 159. Die Gleichung einer Ebene durch eine gegebene Gerade und parallel zu einer anderen gegebenen Geraden . . . .	213
§ 160. Die Gleichung einer Ebene durch eine gegebene Gerade senkrecht zu einer gegebenen Ebene . . . . .	213
§ 161. Die Gleichung der Senkrechten von einem gegebenen Punkt auf eine gegebene Gerade . . . . .	214
§ 162. Die Länge der Senkrechten von einem gegebenen Punkt auf eine gegebene Gerade . . . . .	215
§ 163. Die Bedingungen dafür, daß sich zwei Geraden schneiden oder in einer Ebene liegen . . . . .	217
§ 164. Die Gleichung einer Geraden, die senkrecht zu zwei gegebenen Geraden ist . . . . .	218
§ 165. Der kürzeste Abstand zwischen zwei Geraden . . . . .	220
§ 166. Koordinatentransformation . . . . .	223
§ 167. Die Gleichung einer Fläche . . . . .	224
§ 168. Zylinderflächen, deren Erzeugende parallel zu einer der Koordinatenachsen sind . . . . .	224
§ 169. Die Gleichung einer Kurve . . . . .	226
§ 170. Die Projektion einer Kurve auf eine Koordinatenebene . .	227
§ 171. Algebraische Flächen und ihr Grad . . . . .	230
§ 172. Die Kugelfläche . . . . .	230
§ 173. Das Ellipsoid . . . . .	231
§ 174. Das einschalige Hyperboloid . . . . .	234
§ 175. Das zweischalige Hyperboloid . . . . .	236
§ 176. Der Kegel zweiter Ordnung . . . . .	238
§ 177. Das elliptische Paraboloid . . . . .	240
§ 178. Das hyperbolische Paraboloid . . . . .	242
§ 179. Die Flächen zweiten Grades . . . . .	243
§ 180. Geradlinige Erzeugende der Flächen zweiten Grades . .	246
§ 181. Rotationsflächen . . . . .	247
§ 182. Determinanten zweiter und dritter Ordnung . . . . .	248
§ 183. Determinanten höherer Ordnung . . . . .	251
§ 184. Eigenschaften der Determinanten . . . . .	253
§ 185. Ein praktisches Verfahren zur Berechnung von Determinanten . . . . .	255
§ 186. Anwendung der Determinanten auf die Untersuchung und Lösung von Gleichungssystemen . . . . .	257
§ 187. Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten . . . . .	257
§ 188. Zwei Gleichungen mit drei Unbekannten . . . . .	259
§ 189. Das homogene System von zwei Gleichungen mit drei Unbekannten . . . . .	260
§ 190. Drei Gleichungen mit drei Unbekannten . . . . .	262

§ 191. $n$ Gleichungen . . . . .	265
III. Die Grundbegriffe der mathematischen Analysis . . . . .	269
§ 192. Einführende Bemerkungen . . . . .	269
§ 193. Die rationalen Zahlen . . . . .	270
§ 194. Die reellen Zahlen . . . . .	270
§ 195. Die Zahlengerade . . . . .	271
§ 196. Variable und konstante Größen . . . . .	271
§ 197. Funktionen . . . . .	272
§ 198. Methoden zur Angabe einer Funktion . . . . .	273
§ 199. Der Definitionsbereich einer Funktion . . . . .	275
§ 200. Intervalle . . . . .	276
§ 201. Klassifikation der Funktionen . . . . .	278
§ 202. Die Bezeichnung von Funktionen . . . . .	279
§ 203. Der Wertevorrat einer Funktion . . . . .	280
§ 204. Das Rechnen mit Zahlenfolgen . . . . .	281
§ 205. Der Grenzwert einer Folge . . . . .	281
§ 206. Der Grenzwert von Funktionen . . . . .	283
§ 207. Nullfolgen . . . . .	285
§ 208. Beschränkte Größen . . . . .	286
§ 209. Unbeschränkte und unbegrenzt wachsende Größen . . . . .	286
§ 210. Eine Beziehung zwischen unbegrenzt wachsenden und gegen Null strebenden Größen . . . . .	287
§ 211. Erweiterung des Grenzwertbegriffs . . . . .	287
§ 212. Die Grundtheoreme über Grenzwerte . . . . .	288
§ 213. Bemerkungen zu den Sätzen über Grenzwerte . . . . .	289
§ 214. Die Zahl $e$ . . . . .	290
§ 215. Der Grenzwert $\sin x/x$ für $x \rightarrow 0$ . . . . .	291
§ 216. Äquivalenz von Nullfolgen . . . . .	291
§ 217. Vergleich gegen Null strebender Größen . . . . .	292
§ 218. Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt . . . . .	294
§ 219. Eigenschaften von Funktionen, die in einem Punkt stetig sind . . . . .	296
§ 220. Stetigkeit einer Funktion in einem abgeschlossenen Intervall . . . . .	297
§ 221. Eigenschaften von Funktionen, die in einem abgeschlossenen Intervall stetig sind . . . . .	298
IV. Differentialrechnung . . . . .	300
§ 222. Einführende Bemerkungen . . . . .	300
§ 223. Die Geschwindigkeit . . . . .	300
§ 224. Die Definition der Ableitung einer Funktion . . . . .	301
§ 225. Die Tangente . . . . .	303
§ 226. Die Ableitungen einiger einfacher Funktionen . . . . .	304
§ 227. Eigenschaften der Ableitung . . . . .	305
§ 228. Das Differential . . . . .	306
§ 229. Die mechanische Deutung des Differentials . . . . .	307
§ 230. Die geometrische Bedeutung des Differentials . . . . .	307
§ 231. Differenzierbare Funktionen . . . . .	308
§ 232. Die Differentiale einiger einfacher Funktionen . . . . .	310

§ 233. Die Eigenschaften des Differentials . . . . .	311
§ 234. Die Invarianz des Ausdrucks $f'(x) dx$ . . . . .	311
§ 235. Beschreibung der Ableitung durch Differentiale. . . . .	312
§ 236. Zusammengesetzte Funktionen . . . . .	313
§ 237. Das Differential einer zusammengesetzten Funktion . . . . .	313
§ 238. Die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion („Kettenregel“) . . . . .	314
§ 239. Die Differentiation eines Produkts . . . . .	314
§ 240. Die Differentiation eines Quotienten . . . . .	315
§ 241. Die Umkehrfunktion . . . . .	316
§ 242. Der natürliche Logarithmus . . . . .	318
§ 243. Die Differentiation des Logarithmus . . . . .	319
§ 244. Die logarithmische Differentiation . . . . .	320
§ 245. Die Differentiation der Exponentialfunktion . . . . .	321
§ 246. Die Differentiation der trigonometrischen Funktionen . . . . .	322
§ 247. Die Differentiation der Umkehrfunktionen zu den trigono- metrischen Funktionen . . . . .	322
§ 248. Das Differential in der Näherungsrechnung . . . . .	323
§ 249. Anwendung der Differentialrechnung auf die Fehler- abschätzung . . . . .	325
§ 250. Differentiation impliziter Funktionen . . . . .	326
§ 251. Eine in Parameterform gegebene Kurve . . . . .	328
§ 252. In Parameterform gegebene Funktionen . . . . .	330
§ 253. Die Zykloide . . . . .	332
§ 254. Die Gleichung der Tangente an eine ebene Kurve . . . . .	333
§ 255. Die Gleichung der Normalen . . . . .	335
§ 256. Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	336
§ 257. Die Bedeutung der zweiten Ableitung in der Mechanik . . . . .	337
§ 258. Differentiale höherer Ordnung . . . . .	338
§ 259. Darstellung der höheren Ableitungen durch Differentiale . . . . .	340
§ 260. Höhere Ableitungen von Funktionen, die in Parameter- form gegeben sind . . . . .	340
§ 261. Höhere Ableitungen impliziter Funktionen . . . . .	341
§ 262. Die LEIBNIZsche Regel . . . . .	342
§ 263. Der Satz von ROLLE . . . . .	343
§ 264. Der Mittelwertsatz von LAGRANGE . . . . .	344
§ 265. Die Formel für einen endlichen Zuwachs . . . . .	346
§ 266. Die Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes (CAUCHY) . . . . .	348
§ 267. Untersuchung eines unbestimmten Ausdrucks der Form $0/0$ . . . . .	350
§ 268. Untersuchung eines unbestimmten Ausdrucks der Form $\infty/\infty$ . . . . .	353
§ 269. Unbestimmte Ausdrücke anderer Form . . . . .	353
§ 270. Historische Betrachtungen über die TAYLORSche Formel . . . . .	355
§ 271. Die TAYLOR-Formel . . . . .	359
§ 272. Anwendung der TAYLOR-Formel auf die Berechnung von Funktionswerten . . . . .	361
§ 273. Zunehmende und abnehmende Funktionen . . . . .	368
§ 274. Kriterien für die Zunahme oder Abnahme einer Funktion in einem Punkt. . . . .	370
§ 275. Maximum und Minimum . . . . .	371

§ 276. Notwendige Bedingung für ein Maximum oder ein Minimum . . . . .	372
§ 277. Erste hinreichende Bedingung für ein Maximum oder Minimum . . . . .	373
§ 278. Regel für die Bestimmung der Maxima und Minima . . .	374
§ 279. Zweite hinreichende Bedingung für Maxima und Minima .	378
§ 280. Die Bestimmung des größten und des kleinsten Werts einer Funktion . . . . .	380
§ 281. Die Konvexität ebener Kurven. Wendepunkte . . . . .	383
§ 282. Die konkave Seite . . . . .	383
§ 283. Regel für die Bestimmung eines Wendepunkts . . . . .	385
§ 284. Die Asymptoten . . . . .	386
§ 285. Die Untersuchung von Asymptoten, die parallel zu den Koordinatenachsen sind . . . . .	387
§ 286. Untersuchung der Asymptoten, die nicht zur Ordinatenachse parallel sind . . . . .	389
§ 287. Verfahren zur Konstruktion von grafischen Darstellungen	391
§ 288. Lösung von Gleichungen. Allgemeine Bemerkungen . . .	396
§ 289. Die Lösung von Gleichungen. Die Sehnenmethode (Regula falsi) . . . . .	397
§ 290. Die Lösung von Gleichungen. Die Tangentenmethode . .	399
§ 291. Kombination der Sehnenmethode mit der Tangentenmethode . . . . .	401
 V. Integralrechnung . . . . .	 404
§ 292. Einführende Bemerkungen . . . . .	404
§ 293. Die Stammfunktion . . . . .	406
§ 294. Das unbestimmte Integral . . . . .	407
§ 295. Geometrische Erklärung der Integration . . . . .	408
§ 296. Berechnung der Integrationskonstanten aus den Anfangsdaten . . . . .	411
§ 297. Eigenschaften des unbestimmten Integrals . . . . .	412
§ 298. Integraltafel . . . . .	413
§ 299. Unbestimmte Integration . . . . .	415
§ 300. Die Substitutionsmethode (Integration unter Verwendung einer Hilfsvariablen) . . . . .	415
§ 301. Partielle Integration . . . . .	417
§ 302. Integration einiger trigonometrischer Ausdrücke . . .	418
§ 303. Trigonometrische Transformation . . . . .	422
§ 304. Rationale Funktionen . . . . .	423
§ 305. Verfahren zur Integration von gebrochenen rationalen Funktionen . . . . .	424
§ 306. Die Integration von Partialbrüchen . . . . .	425
§ 307. Die Integration rationaler Funktionen (allgemeine Methode) . . . . .	428
§ 308. Die Faktorenerlegung eines Polynoms . . . . .	434
§ 309. Über die Integrierbarkeit der elementaren Funktionen	435
§ 310. Einige von Radikalen abhängige Integrale . . . . .	436
§ 311. Das Integral eines Binomialausdrucks . . . . .	437
§ 312. Integrale der Form $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ . . . . .	439



§ 313. Integrale der Form $\int R(\sin x, \cos x) dx$ . . . . .	441
§ 314. Das bestimmte Integral . . . . .	441
§ 315. Eigenschaften des bestimmten Integrals . . . . .	446
§ 316. Die geometrische Deutung des bestimmten Integrals . . . . .	447
§ 317. Deutung des bestimmten Integrals in der Mechanik . . . . .	449
§ 318. Abschätzung des bestimmten Integrals . . . . .	450
§ 319. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . . .	451
§ 320. Das bestimmte Integral als Funktion seiner oberen Grenze . . . . .	452
§ 321. Das Differential eines Integrals . . . . .	454
§ 322. Das Integral eines Differentials. Die Formel von NEWTON-LEIBNIZ . . . . .	456
§ 323. Die Berechnung des bestimmten Integrals mit Hilfe des unbestimmten Integrals . . . . .	457
§ 324. Partielle bestimmte Integration . . . . .	458
§ 325. Substitutionsmethoden bei der bestimmten Integration . . . . .	459
§ 326. Uneigentliche Integrale . . . . .	460
§ 327. Integrale mit unendlichen Grenzen . . . . .	461
§ 328. Integrale über Funktionen mit Unstetigkeitsstellen . . . . .	465
§ 329. Über die näherungsweise Berechnung eines Integrals . . . . .	468
§ 330. Rechtecksformeln . . . . .	470
§ 331. Die Trapezformel . . . . .	472
§ 332. Die SIMPSONSCHE Formel (Parabolische Trapezformel) . . . . .	473
§ 333. Der Flächeninhalt von Figuren, die durch rechtwinklige Koordinaten beschrieben werden . . . . .	475
§ 334. Übersicht über die Anwendung des bestimmten Integrals . . . . .	477
§ 335. Der Flächeninhalt von Figuren, die durch Polarkoordinaten gegeben sind . . . . .	478
§ 336. Das Volumen eines Körpers . . . . .	480
§ 337. Das Volumen eines Rotationskörpers . . . . .	482
§ 338. Die Bogenlänge einer ebenen Kurve . . . . .	483
§ 339. Das Differential der Bogenlänge . . . . .	484
§ 340. Die Bogenlänge und ihr Differential in Polarkoordinaten . . . . .	485
§ 341. Der Flächeninhalt einer Rotationsfläche . . . . .	487
 VI. Überblick über ebene und räumliche Kurven . . . . .	 489
§ 342. Die Krümmung . . . . .	489
§ 343. Krümmungsmittelpunkt, Krümmungsradius und Krümmungskreis einer ebenen Kurve . . . . .	490
§ 344. Formeln für die Krümmung, den Krümmungsradius und den Krümmungsmittelpunkt einer ebenen Kurve . . . . .	492
§ 345. Die Evolute einer ebenen Kurve . . . . .	495
§ 346. Eigenschaften der Evolute einer ebenen Kurve . . . . .	497
§ 347. Die Evolvente einer ebenen Kurve . . . . .	498
§ 348. Die Parameterform von Raumkurven . . . . .	498
§ 349. Schraubenlinien . . . . .	500
§ 350. Die Bogenlänge einer Raumkurve . . . . .	502
§ 351. Die Tangente an eine Raumkurve . . . . .	503
§ 352. Die Normalebene . . . . .	505
§ 353. Vektorfunktionen mit skalarem Argument . . . . .	506
§ 354. Grenzwerte von Vektorfunktionen . . . . .	507

§ 355. Die Ableitung einer Vektorfunktion . . . . .	507
§ 356. Das Differential einer Vektorfunktion . . . . .	509
§ 357. Eigenschaften der Ableitungen und der Differentiale von Vektorfunktionen . . . . .	510
§ 358. Die Schmiegeebene . . . . .	512
§ 359. Die Hauptnormale. Das begleitende Dreibein . . . . .	514
§ 360. Gegenseitige Lage von Kurve und Ebene . . . . .	515
§ 361. Die Einheitsvektoren des begleitenden Dreibeins . . . . .	515
§ 362. Krümmungsmittelpunkt, Krümmungsachse und Krümmungsradius einer Raumkurve . . . . .	517
§ 363. Formeln für die Krümmung, den Krümmungsradius und den Krümmungsmittelpunkt von Raumkurven . . . . .	518
§ 364. Über das Vorzeichen der Krümmung . . . . .	520
§ 365. Die Torsion . . . . .	520
 VII. Unendliche Reihen . . . . .	 523
§ 366. Einführende Bemerkungen . . . . .	523
§ 367. Definition der unendlichen Reihe . . . . .	523
§ 368. Konvergente und divergente unendliche Reihen . . . . .	524
§ 369. Notwendige Bedingung für die Konvergenz einer unendlichen Reihe . . . . .	525
§ 370. Der Rest einer unendlichen Reihe . . . . .	527
§ 371. Einfache Operationen mit unendlichen Reihen . . . . .	529
§ 372. Positive unendliche Reihen . . . . .	530
§ 373. Vergleich von positiven Reihen . . . . .	531
§ 374. Das d'ALEMBERTSche Kriterium für positive Reihen . . . . .	533
§ 375. Das Integralkriterium für die Konvergenz . . . . .	534
§ 376. Alternierende Reihen. Das Kriterium von LEIBNIZ . . . . .	536
§ 377. Absolute und bedingte Konvergenz . . . . .	537
§ 378. Das d'ALEMBERTSche Kriterium für beliebige Reihen . . . . .	539
§ 379. Umordnen der Glieder einer unendlichen Reihe . . . . .	539
§ 380. Zusammenfassen der Glieder einer unendlichen Reihe . . . . .	540
§ 381. Multiplikation von unendlichen Reihen . . . . .	541
§ 382. Die Division von unendlichen Reihen . . . . .	543
§ 383. Reihen mit veränderlichen Gliedern . . . . .	545
§ 384. Der Konvergenzbereich einer Reihe mit veränderlichen Gliedern . . . . .	545
§ 385. Über gleichmäßige und ungleichmäßige Konvergenz . . . . .	548
§ 386. Definition der gleichmäßigen und ungleichmäßigen Konvergenz . . . . .	551
§ 387. Geometrische Deutung der gleichmäßigen und ungleichmäßigen Konvergenz . . . . .	551
§ 388. Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz; reguläre Reihen . . . . .	552
§ 389. Die Stetigkeit der Summe einer unendlichen Reihe . . . . .	553
§ 390. Die Integration von unendlichen Reihen . . . . .	554
§ 391. Die Differentiation von unendlichen Reihen . . . . .	557
§ 392. Potenzreihen . . . . .	558
§ 393. Konvergenzintervall und Konvergenzradius einer Potenzreihe . . . . .	559

§ 394. Die Bestimmung des Konvergenzradius . . . . .	560
§ 395. Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe in $x - x_0$ . . .	562
§ 396. Das Theorem von ABEL . . . . .	563
§ 397. Operationen mit Potenzreihen . . . . .	563
§ 398. Differentiation und Integration von Potenzreihen . . .	565
§ 399. Die TAYLOR-Reihe . . . . .	567
§ 400. Die Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe . .	568
§ 401. Die Entwicklung der elementaren Funktionen in Potenz- reihen . . . . .	569
§ 402. Die Anwendung der unendlichen Reihen auf die Berech- nung von Integralen . . . . .	574
§ 403. Hyperbolische Funktionen . . . . .	575
§ 404. Die Umkehrfunktionen für die hyperbolischen Funktionen	578
§ 405. Die Herkunft der Namen für die hyperbolischen Funk- tionen . . . . .	581
§ 406. Über komplexe Zahlen . . . . .	582
§ 407. Komplexe Funktionen von reellen Argumenten . . . .	583
§ 408. Die Ableitung einer komplexen Funktion . . . . .	585
§ 409. Komplexer Exponent einer positiven Zahl . . . . .	586
§ 410. Die EULERSche Formel . . . . .	587
§ 411. Trigonometrische Reihen . . . . .	588
§ 412. Historische Bemerkungen über die trigonometrischen Reihen . . . . .	588
§ 413. Die Orthogonalität des Systems der Funktionen $\cos nx$ und $\sin nx$ . . . . .	589
§ 414. Die Formeln von EULER-FOURIER . . . . .	591
§ 415. FOURIER-Reihen . . . . .	593
§ 416. Die FOURIER-Reihe einer stetigen Funktion . . . . .	594
§ 417. Die FOURIER-Reihen für gerade und ungerade Funktionen	597
§ 418. FOURIER-Reihen für unstetige Funktionen . . . . .	601

## VIII. Differential- und Integralrechnung für Funktionen mehrerer Variabler . . . . . 605

§ 419. Funktionen von zwei Variablen . . . . .	605
§ 420. Funktionen von drei und mehr Variablen . . . . .	606
§ 421. Verfahren zur Angabe von Funktionen mehrerer Variabler	607
§ 422. Grenzwerte von Funktionen mehrerer Variabler . . .	609
§ 423. Über die Größenordnung von Funktionen mehrerer Variabler . . . . .	610
§ 424. Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variabler . . . .	612
§ 425. Partielle Ableitungen . . . . .	612
§ 426. Geometrische Bedeutung der partiellen Ableitungen für den Fall von zwei Argumenten . . . . .	613
§ 427. Totaler Zuwachs und partieller Zuwachs . . . . .	614
§ 428. Das partielle Differential . . . . .	615
§ 429. Darstellung der partiellen Ableitung durch das Differential	616
§ 430. Das totale Differential . . . . .	616
§ 431. Die geometrische Bedeutung des totalen Differentials . .	618
§ 432. Die Invarianz des Ausdrucks $f_x dx + f_y dy + f_z dz$ für das totale Differential . . . . .	618

§ 433. Die Technik des Differenzierens . . . . .	619
§ 434. Differenzierbare Funktionen . . . . .	620
§ 435. Die Tangentialebene und die Flächennormale . . . . .	621
§ 436. Die Gleichung der Tangentialebene . . . . .	622
§ 437. Die Gleichung der Normalen . . . . .	623
§ 438. Differentiation zusammengesetzter Funktionen . . . . .	624
§ 439. Übergang von rechtwinkligen Koordinaten zu Polarkoordinaten . . . . .	625
§ 440. Formeln für die partiellen Ableitungen einer zusammengesetzten Funktion . . . . .	626
§ 441. Die totale Ableitung . . . . .	626
§ 442. Differentiation impliziter Funktionen von mehreren Argumenten . . . . .	627
§ 443. Partielle Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	629
§ 444. Die totalen Differentiale höherer Ordnung . . . . .	631
§ 445. Die Technik des mehrmaligen Differenzierens . . . . .	632
§ 446. Vereinbarung über die Bezeichnungsweise von Differentialen . . . . .	633
§ 447. Die TAYLORSche Formel für Funktionen von mehreren Variablen . . . . .	634
§ 448. Extremwerte (Maxima und Minima) von Funktionen mehrerer Argumente . . . . .	636
§ 449. Regel für die Bestimmung von Extremwerten . . . . .	637
§ 450. Hinreichende Bedingung für ein Extremum (für den Fall von zwei Variablen) . . . . .	638
§ 451. Das Doppelintegral . . . . .	639
§ 452. Die geometrische Bedeutung des Doppelintegrals . . . . .	641
§ 453. Eigenschaften des Doppelintegrals . . . . .	641
§ 454. Abschätzung des Doppelintegrals . . . . .	642
§ 455. Berechnung des Doppelintegrals (einfache Fälle) . . . . .	642
§ 456. Berechnung des Doppelintegrals (allgemeiner Fall) . . . . .	646
§ 457. Punktfunktionen . . . . .	649
§ 458. Das Doppelintegral in Polarkoordinaten . . . . .	650
§ 459. Der Flächeninhalt eines Flächenstücks . . . . .	653
§ 460. Das dreifache Integral . . . . .	656
§ 461. Berechnung des dreifachen Integrals (einfache Fälle) . . . . .	656
§ 462. Die Berechnung eines dreifachen Integrals (allgemeiner Fall) . . . . .	657
§ 463. Zylinderkoordinaten . . . . .	659
§ 464. Das dreifache Integral in Zylinderkoordinaten . . . . .	660
§ 465. Kugelkoordinaten . . . . .	660
§ 466. Das dreifache Integral in Kugelkoordinaten . . . . .	661
§ 467. Leitfaden für die Anwendung von Doppelintegralen und dreifachen Integralen . . . . .	663
§ 468. Das Trägheitsmoment . . . . .	664
§ 469. Einige physikalische und geometrische Größen, die sich durch Doppelintegrale ausdrücken lassen . . . . .	666
§ 470. Einige physikalische und geometrische Größen, die sich durch dreifache Integrale ausdrücken lassen . . . . .	668
§ 471. Das Kurvenintegral . . . . .	669
§ 472. Die Bedeutung des Kurvenintegrals in der Mechanik . . . . .	670

§ 473. Die Berechnung des Kurvenintegrals . . . . .	671
§ 474. Die GREENSche Formel . . . . .	673
§ 475. Bedingung für die Unabhängigkeit des Kurvenintegrals vom Weg . . . . .	673
§ 476. Eine andere Form für die Bedingung aus dem letzten Paragraphen . . . . .	675

## IX. Differentialgleichungen . . . . . 678

§ 477. Grundbegriffe . . . . .	678
§ 478. Gleichungen erster Ordnung . . . . .	680
§ 479. Die geometrische Bedeutung einer Gleichung erster Ord- nung . . . . .	680
§ 480. Isoklinen . . . . .	683
§ 481. Partikuläre Lösung und allgemeine Lösung einer Gleichung erster Ordnung . . . . .	684
§ 482. Gleichungen mit separierten Variablen . . . . .	685
§ 483. Separation der Variablen. Singuläre Lösung . . . . .	686
§ 484. Gleichungen mit totalen Differentialen . . . . .	688
§ 485. Die homogene Gleichung . . . . .	689
§ 486. Lineare Gleichung erster Ordnung . . . . .	692
§ 487. Die CLAIRAUTSche Gleichung . . . . .	694
§ 488. Die Enveloppe . . . . .	696
§ 489. Die Integrierbarkeit von Differentialgleichungen . . . . .	697
§ 490. Näherungsweise Integration einer Gleichung erster Ord- nung nach der Methode von EULER . . . . .	697
§ 491. Integration von Differentialgleichungen mit Hilfe von un- endlichen Reihen . . . . .	699
§ 492. Über das Aufstellen von Differentialgleichungen . . . . .	701
§ 493. Gleichungen zweiter Ordnung . . . . .	705
§ 494. Gleichungen $n$ -ter Ordnung . . . . .	707
§ 495. Reduktion der Ordnung . . . . .	707
§ 496. Die lineare Gleichung zweiter Ordnung . . . . .	709
§ 497. Die lineare Gleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	711
§ 498. Die homogene lineare Gleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	711
§ 499. Die inhomogene lineare Gleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	715
§ 500. Die lineare Gleichung beliebiger Ordnung . . . . .	719
§ 501. Die Methode der Variation der Konstanten . . . . .	720
§ 502. Systeme von Differentialgleichungen. Lineare Systeme . . . . .	721

## X. Einige bemerkenswerte Kurven . . . . . 723

§ 503. Die Strophoide . . . . .	723
§ 504. Die Kissoide des DIOKLES . . . . .	725
§ 505. Das Kartesische Blatt . . . . .	727
§ 506. Die Versiera der AGNESI . . . . .	729
§ 507. Die Konchoide des NIKOMEDES . . . . .	730
§ 508. Die PASCALSche Schnecke. Die Kardioide . . . . .	734

§ 509. CASSINISCHE Linien . . . . .	738
§ 510. Die BERNOULLISCHE Lemniskate . . . . .	740
§ 511. Die ARCHIMEDISCHE Spirale . . . . .	741
§ 512. Die Kreisevolvente . . . . .	744
§ 513. Die logarithmische Spirale . . . . .	746
§ 514. Die Zykloide . . . . .	749
§ 515. Die Epizykloide und die Hypozykloide . . . . .	754
§ 516. Die Traktrix . . . . .	764
§ 517. Die Kettenlinie . . . . .	768
 XI. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik . . . . .	 772
§ 518. Grundlagen. Ereignisse . . . . .	772
§ 519. Wahrscheinlichkeiten . . . . .	774
§ 520. Beispiele. Berechnung elementarer Wahrscheinlichkeiten . . . . .	775
§ 521. Zufallsvariable . . . . .	776
§ 522. Verteilungsfunktionen . . . . .	776
§ 523. Spezielle Verteilungsfunktionen . . . . .	778
§ 524. Stichproben . . . . .	785
§ 525. Parameterschätzung. Konfidenzintervalle . . . . .	787
§ 526. Das GAUSSSCHE Fehlerfortpflanzungsgesetz . . . . .	790
§ 527. Ausgleichskurven . . . . .	791
 Tabellen . . . . .	 797
 Sachverzeichnis . . . . .	 828