

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	11
1.1 Die Operationen	11
1.2 Rechenhierarchie	11
1.3 Allgemeines zu Mengen	13
1.4 Zahlenmengen	14
1.4.1 \mathbb{N} : die natürlichen Zahlen	14
1.4.2 \mathbb{Z} : die ganzen Zahlen	15
1.4.3 \mathbb{Q} : die rationalen Zahlen	15
1.4.4 \mathbb{R} : die reellen Zahlen	16
1.4.5 \mathbb{C} : die komplexen Zahlen	16
1.4.6 Zusammenfassung	16
1.5 Zahlenintervalle notieren und visualisieren	17
1.6 Der Betrag einer Zahl	18
Aufgaben	19
Checkup	21
2 Das Rechnen mit ganzen Zahlen (Rechnen in \mathbb{Z})	23
2.1 Addition und Subtraktion	23
2.2 Multiplikation	24
2.3 Potenzen	27
2.3.1 Potenzieren und die Grundoperationen	27
2.3.2 Wichtige Spezialfälle	29
2.4 Die binomischen Formeln	29
2.5 Faktorzerlegung (Zerlegen von Summen und Differenzen in Faktoren)	31
2.5.1 Faktorzerlegung mit Ausklammern	31
2.5.2 Faktorzerlegung mit binomischen Formeln	32
2.5.3 Faktorzerlegung mit Zweiklammeransatz	34
Aufgaben	36
Checkup	41
3 Das Rechnen mit Bruchtermen (Rechnen in \mathbb{Q})	43
3.1 Konventionen und Notationen	43
3.2 Brüche und Dezimalzahlen	43
3.2.1 Brüche in Dezimalzahlen umwandeln	44
3.2.2 Dezimalzahlen in Brüche umwandeln	44
3.2.3 Periodische Dezimalzahlen in Brüche umwandeln	45
3.3 Runden	46
3.4 Genauigkeit, Fehlerfortpflanzung und signifikante Stellen	47
3.5 Vorzeichen bei Brüchen	49
3.6 Erweitern und Kürzen	49
3.6.1 Spezialfall I: Ausklammern von negativen Faktoren	50
3.6.2 Spezialfall II: Ausklammern aus Klammertermen mit Exponenten	50
3.7 Brüche gleichnamig machen: das kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches)	52

3.8	Addition und Subtraktion von Brüchen	53
3.8.1	Spezialfall III: Erweitern mit bzw. ausklammern von (-1)	54
3.9	Multiplikation von Brüchen	55
3.10	Division von Brüchen	58
3.11	Doppelbrüche	60
	Aufgaben	63
	Checkup	71

4 Lineare Gleichungen mit einer Variablen 73

4.1	Allgemeine Einleitung zu Gleichungen	73
4.1.1	Aussage und Aussageform	73
4.1.2	Äquivalenzumformung und Termumformung	73
4.1.3	Grundmenge, Definitionsmenge, Lösungsmenge	74
4.1.4	Arten von Gleichungen	75
4.1.5	Arten von Variablen	75
4.2	Lösen einer linearen Gleichung mit einer Variablen	75
4.2.1	Gleichungen bei denen die Lösungsvariable entfällt	79
4.3	Lineare Gleichungen mit Parametern	80
	Aufgaben	84
	Checkup	86

5 Gleichungssysteme mit zwei Variablen 87

5.1	Gleichungen mit zwei Variablen	88
5.2	Gleichungssysteme mit zwei Variablen	89
5.3	Lösen von Gleichungssystemen	90
5.4	Einsetzungsverfahren	91
5.5	Gleichsetzungsverfahren	93
5.6	Additionsverfahren	95
5.7	Gleichungssysteme mit Variablen im Nenner	99
5.7.1	Ausnahmen bei Gleichungssystemen mit Variablen im Nenner	105
5.8	Substitutionsverfahren	107
5.9	Gleichungssysteme mit Parametern	112
	Aufgaben	115
	Checkup	121

6 Quadratische Gleichungen 123

6.1	Vorbemerkungen	123
6.2	Normalformen der quadratischen Gleichungen	123
6.3	Lösen von rein-quadratischen Gleichungen	124
6.4	Lösen von gemischt-quadratischen Gleichungen	126
6.4.1	Faktorzerlegung	126
6.4.2	Quadratische Ergänzung	128
6.4.3	abc-Formel	131
6.4.4	Normierte Form	134
6.4.5	Mathematische Herleitung der abc-Formel	136
6.4.6	Lösungsdiskussion	137

6.5	Sätze von Vieta	138
6.6	Quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten	139
6.7	Quadratische Gleichungen mit Parametern	142
	Aufgaben	144
	Checkup	147

7 Gleichungen: Textaufgaben 149

7.1	Lösen von Textaufgaben	149
7.2	Zahlenaufgaben	149
7.3	Altersaufgaben	155
7.4	Kapital und Zins	158
7.5	Verteilungsaufgaben	163
7.6	Mischungsaufgaben	166
7.7	Zeitaufgaben	170
7.8	Bewegung	176
7.9	Geometrie	179
7.10	Diverses	182
	Aufgaben	186
	Checkup	201

8 Potenzen 203

8.1	Einführung in Potenzen / Wurzeln / Logarithmen	203
8.1.1	Erläuterungen zu den Operationen 3. Stufe	203
8.1.2	Begriffe	204
8.1.3	Das Potenzieren und seine zwei Umkehroperationen	204
8.2	Rechenregeln für Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten	205
8.2.1	Addition / Subtraktion	205
8.3	Rechenregeln für Potenzen mit gleicher Basis	205
8.3.1	Multiplikation	205
8.3.2	Division	206
8.3.3	Potenzieren	206
8.4	Rechenregeln für Potenzen mit gleichem Exponenten	207
8.4.1	Multiplikation	207
8.4.2	Division	207
8.5	Übersicht über die Rechenhierarchie und Rechengesetze	208
8.6	Wichtige Spezialfälle	209
8.7	Rechenbeispiele	210
8.8	Potenzen mit Klammertermen als Basis	212
8.9	Potenzgleichungen	213
8.9.1	Potenzgleichungen mit ganzzahligen Exponenten	214
8.9.2	Potenzgleichungen mit rationalen Exponenten	215
8.9.3	Potenzgleichungen mit Klammertermen als Basis	216
8.10	Die Zehnerpotenz	218
8.10.1	Konkrete Anwendungen	220
	Aufgaben	221
	Checkup	226

9	Wurzeln	227
9.1	Die Quadratwurzel	227
9.1.1	Definition der Quadratwurzel	227
9.1.2	Lösungen von Quadratwurzeln	228
9.2	Die allgemeine Wurzel	228
9.2.1	Potenzschreibweise von allgemeinen Wurzeln	229
9.2.2	Allgemeine Wurzeln mit dem Taschenrechner	229
9.3	Rechnen mit Wurzeln	230
9.3.1	Addition / Subtraktion	230
9.3.2	Wurzeln kürzen / erweitern und vereinfachen	230
9.3.3	Multiplikation / Division / Potenzieren / Wurzelziehen bei gleicher Basis	232
9.3.4	Multiplikation / Division bei gleichem Wurzelexponent mit unterschiedlicher Basis	233
9.3.5	Wurzelterme mit Parametern im Wurzelexponenten	234
9.3.6	Nenner wurzelfrei machen	235
9.4	Wurzelgleichungen	236
	Aufgaben	243
	Checkup	247
10	Logarithmen	249
10.1	Grundregel des Logarithmierens	249
10.2	Logarithmusgleichungen	251
10.2.1	Logarithmusgleichungen mit der Variablen im Exponenten	251
10.2.2	Logarithmusgleichungen mit der Variablen im Numerus	252
10.2.3	Logarithmusgleichungen mit der Variablen in der Basis	253
10.3	Rechenregeln bei Logarithmen	255
10.4	Logarithmusgleichungen mit Logarithmusgesetzen lösen	257
10.5	Basiswechsel und der 10er-Logarithmus lg	257
10.6	Exponentialgleichungen	259
	Aufgaben	265
	Checkup	271
11	Datenanalyse	273
11.1	Einführung und Grundbegriffe	273
11.2	Merkmale charakterisieren	277
11.3	Die Urliste, die geordnete Stichprobe und die Rangliste	278
11.3.1	Die Urliste und ihre Weiterverarbeitung (Verdichtung)	278
11.4	Kategorielle Merkmale: Häufigkeitstabelle, Auswertung und Visualisierung	279
11.5	Quantitative Merkmale: Häufigkeitstabelle, Auswertung und Visualisierung	283
11.5.1	Die diskrete Häufigkeitstabelle	283
11.5.2	Die stetige (klassierte) Häufigkeitstabelle	288
11.6	Verteilungen in Diagrammen charakterisieren	292
11.6.1	Anzahl der Häufungspunkte bei Verteilungen	292
11.6.2	Schiefe (Asymmetrie)	293
11.7	Lagemasse berechnen (Mittelwert, Median, Modus, Quartile)	294
11.7.1	Mittelwert (arithmetisches Mittel)	294
11.7.2	Median (Zentralwert)	298

11.7.3	Wann den Mittelwert und wann den Median verwenden?	301
11.7.4	Modus	304
11.7.5	Anwendungsbeispiele zu Mittelwert / Median / Modus	305
11.7.6	Geometrisches Mittel	307
11.7.7	Quartile	308
11.8	Streuungsmaße berechnen	311
11.8.1	Spannweite	312
11.8.2	Interquartilsabstand (IQR)	313
11.8.3	Standardabweichung	313
11.9	Lage- und Streuungsmaße in Excel berechnen	317
11.10	Visualisierung von Lage- und Streuungsmassen im Boxplot	318
11.10.1	Boxplot zeichnen	319
11.10.2	Interpretation der Daten im Boxplot	322
11.10.3	Boxplot für mehrere Untergruppen eines Merkmals	325
11.11	Bivariate Daten: Auswertung, Visualisierung und Interpretation	326
11.11.1	Kategorielle Merkmale: Kontingenztafel und Visualisierung	326
11.11.2	Quantitative Merkmale: Kontingenztafel und Visualisierung	328
11.11.3	Korrelation	330
11.11.4	Scheinkorrelation	331
11.11.5	Kausalität	332
	Aufgaben	333
	Checkup	347