

## Inhalt

### § 1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten und Abbildungen

|                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. Definition differenzierbarer Mannigfaltigkeiten .....             | 1  |
| 1.2. Definition differenzierbarer Abbildungen .....                    | 4  |
| 1.3. Tangentenvektoren und Tangentialräume .....                       | 6  |
| 1.4. Induzierte Abbildungen .....                                      | 8  |
| 1.5. Abbildungssätze .....                                             | 10 |
| 1.6. Untermannigfaltigkeiten .....                                     | 12 |
| 1.7. Produktmannigfaltigkeiten .....                                   | 17 |
| 1.8. Vektorfelder .....                                                | 21 |
| 1.9. Das Liesche Klammerprodukt von Vektorfeldern .....                | 23 |
| 1.10. Das Tangentialbündel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit .. | 27 |

### § 2 Lineare Zusammenhänge

|                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1. Definition linearer Zusammenhänge .....                           | 35 |
| 2.2. Torsionstensor und Krümmungstensor .....                          | 37 |
| 2.3. Lokalisierung von Tensorfeldern und linearen Zusammenhängen ..... | 38 |
| 2.4. Die Zusammenhangsabbildung .....                                  | 43 |
| 2.5. Vektorfelder längs Abbildungen .....                              | 46 |
| 2.6. Parallelverschiebung .....                                        | 50 |
| 2.7. Geodätische .....                                                 | 56 |
| 2.8. Die Exponentialabbildung eines Sprays .....                       | 60 |
| 2.9. Der geodätische Spray eines linearen Zusammenhangs .....          | 64 |

### § 3 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

|                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------|----|
| 3.1. Definition einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ..... | 69 |
| 3.2. Isometrische Abbildungen .....                       | 71 |
| 3.3. Die Bogenlänge differenzierbarer Kurven .....        | 75 |
| 3.4. Riemannsche Zusammenhänge .....                      | 78 |

|                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------|-----|
| 3.5. Der Zusammenhang von Levi-Civita .....                 | 82  |
| 3.6. Krümmungsidentitäten und skalare Krümmungsgrößen ..... | 91  |
| 3.7. Relative Krümmungsgrößen .....                         | 102 |
| 3.8. Verschiedene Anmerkungen .....                         | 111 |

#### § 4 Extremaleigenschaften von Geodätischen

|                                               |     |
|-----------------------------------------------|-----|
| 4.1. Variationen von Geodätischen .....       | 121 |
| 4.2. Jacobifelder .....                       | 127 |
| 4.3. Konjugierte Punkte .....                 | 132 |
| 4.4. Das Gaußsche Lemma und Folgerungen ..... | 136 |
| 4.5. Die Indexform einer Geodätischen .....   | 142 |
| 4.6. Das Morsesche Indextheorem .....         | 148 |

#### § 5 Riemannsche Mannigfaltigkeiten als metrische Räume

|                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.1. Die Abstandsfunktion einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ..... | 156 |
| 5.2. Konvexe Mengen .....                                           | 159 |
| 5.3. Vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten .....              | 164 |
| 5.4. Der Schnittpunkt einer Riemannschen Mannigfaltigkeit .....     | 169 |

#### § 6 Vergleichssätze

|                                                    |     |
|----------------------------------------------------|-----|
| 6.1. Ein Indexvergleichssatz .....                 | 174 |
| 6.2. Der Vergleichssatz von Morse-Schoenberg ..... | 176 |
| 6.3. Der Vergleichssatz von Rauch .....            | 178 |
| 6.4. Der Winkelvergleichssatz von Toponogoff ..... | 182 |

#### § 7 Beziehungen zwischen Krümmung und topologischer Gestalt

|                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.1. Deformationen von Geodätischen .....                                                 | 197 |
| 7.2. Der Satz von Hadamard-Cartan .....                                                   | 200 |
| 7.3. Krümmung und Durchmesser .....                                                       | 212 |
| 7.4. Orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeiten .....                                   | 218 |
| 7.5. Der Injektivitätsradius der Exponentialabbildung im Falle<br>gerader Dimension ..... | 224 |

## VI

|                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.6. Ein Resultat der Theorie von Morse .....                                                | 242 |
| 7.7. Der Injektivitätsradius der Exponentialabbildung im Falle<br>beliebiger Dimension ..... | 253 |
| 7.8. Der Sphärensatz .....                                                                   | 256 |
| 7.9. Ausblicke .....                                                                         | 265 |
| § 8 Anhang                                                                                   |     |
| 8.1. Eine Hilfsfunktion .....                                                                | 272 |
| 8.2. Einige topologische Begriffe und Sätze .....                                            | 273 |
| 8.3. Die Zerlegung der Eins .....                                                            | 274 |
| 8.4. Sätze aus der Theorie der Differentialgleichungen .....                                 | 275 |
| 8.5. Integralkurven von Vektorfeldern .....                                                  | 276 |
| 8.6. Der maximale Fluß eines Vektorfeldes .....                                              | 278 |
| 8.7. Ein Fortsetzungssatz .....                                                              | 279 |
| 8.8. Einparameter-Gruppen von Diffeomorphismen .....                                         | 281 |
| Sachverzeichnis .....                                                                        | 283 |