

INHALTSVERZEICHNIS

ZUR EINFÜHRUNG VON HANS AEBLI	11
-------------------------------------	----

ERSTER TEIL

<i>Einleitung: Verlagerung und spontanes Messen</i>	15
---	----

KAPITEL I: Die Vorstellung von den Verlagerungen	16
---	----

1. Verfahren und allgemeine Ergebnisse	18
2. Die Stadien I und II: Fehlende Koordinierung der Anhaltspunkte, fehlende Vorstellung von den Verlagerungen	21
3. Teilstadium III A: Partielle Koordinierung der dargestellten Verlagerungen in Verbindung mit den Anhaltspunkten	30
4. Teilstadium III B: Gesamtkoordinierung der Bezüge, Vorstellung der vollständigen Gruppe der Verlagerungen	35
5. Schlußfolgerungen: Die Gruppe der Verlagerungen und das Koordinatensystem; räumlicher Egozentrismus und Gruppierung	37

KAPITEL II: Das spontane Messen	43
--	----

1. Verfahren und allgemeine Ergebnisse	46
2. Stadium I: Direkter Wahrnehmungsvergleich; ausschließlich visuelle Übertragungen	50
3. Stadium II: Das Auftreten der Verlagerungen. Teilstadium II A: Die manuelle Übertragung als Ergänzung der visuellen Übertragung	58
4. Stadium II: Auftreten der Verlagerungen. Teilstadium II B: Körperliche Übertragungen oder Nachahmung des gemessenen Gegenstandes	64
5. Die Übergänge zwischen den Stufen II B und III A: Allmähliche Entdeckung des unabhängigen Mittelgliedes	72
6. Stadium III: Operatorisches gemeinsames Maß. Teilstadium III A: Transitivität der qualitativen Kongruenzrelationen; noch keine Wiederholung einer Einheit	79
7. Stadium III: Operatorisches gemeinsames Maß. Teilstadium III B: Herausbildung einer Metrik durch stetiges Wiederholen der Einheit	86
8. Schlußfolgerungen: Die Vorstellung von den Verlagerungen und die Probleme des Messens	88

ZWEITER TEIL

<i>Erbaltung und Messung von Längen</i>	93
---	----

KAPITEL III: Die Konstruktion der Abstandsrelationen	94
---	----

1. Verfahren und allgemeine Ergebnisse	96
2. Stadium I: Keine Gesamtabstände	99

3. Stadium II, Teilstadium II A: Keine Erhaltung des Gesamtabstandes; Asymmetrie der Abstandsrelationen	102
4. Teilstadium II B, Typ A: Keine Erhaltung des Gesamtabstandes, aber Entdeckung der Symmetrie der Intervallrelationen	108
5. Stadium II, Teilstadium II B, Typ B: Erhaltung des Gesamtabstandes, aber Asymmetrie der Intervallrelationen	110
6. Stadium III: Erhaltung des Abstandes	112
KAPITEL IV: Die Erhaltung der Längen bei Verlagerung der Gegenstände und die Beziehung zwischen Abständen und Längen	119
1. Die Länge der Linien und die Übereinstimmung ihrer Endpunkte	121
2. Das Abschätzen der Längen zweier Geraden, die zueinander verschoben werden. Stadium I und Teilstadium II A: Keine Erhaltung der Länge	125
3. Das Abschätzen der Länge zweier verschobener Geraden. Teilstadium II B: Übergangsreaktionen	128
4. Das Abschätzen der Länge zweier verschobener Geraden. Stadium III: Operatorische Erhaltung	132
KAPITEL V: Erhaltung und Messung der Längen	135
<i>I. Die Erhaltung der Längen bei Verformung der zu vergleichenden Linien</i>	136
1. Die Stufen I und II A: Fehlende Erhaltung der Länge	137
2. Teilstadium II B: Übergangsreaktionen	144
3. Stadium III: Operatorische Erhaltung	147
<i>II. Das Messen der Längen</i>	150
4. Die Stufen I und II A: Verschiedene Vergleichsverfahren, die der Transitivität und dem Messen vorausgehen	150
5. Teilstadium II B: Übergangsreaktionen	158
6. Stadium III: Das operatorische Messen	160
KAPITEL VI: Die Bestimmung einer Strecke auf einer Geraden	163
1. Verfahren und allgemeine Ergebnisse	165
2. Die Stufen I und II A: Ausschließliche Abschätzung der Länge der Strecken nach den Zielpunkten	166
3. Teilstadium II B: Übergangsreaktionen	173
4. Stadium III: Die operatorische Handhabung des Maßes	179
5. Schlußfolgerung: Qualitative Koordinierung der Teilungs- und Verlagerungsoperationen; operatorische Synthese dieser Operationen zu metrischen Operationen (Wiederholung der Einheit)	183
DRITTER TEIL	
<i>Rechtwinklige Koordinaten, Winkel und Kurven</i>	189
KAPITEL VII: Die Bestimmung eines Punktes auf einer Ebene oder in einem Raum	190

1. Verfahren und allgemeine Ergebnisse	190
2. Die Stufen I und II A: Bestimmung des Punktes nach dem Augenmaß ohne Verwendung der Meßwerkzeuge oder Verwendung derselben als Wahrnehmungsstütze, ohne Messen	193
3. Teilstadium II B: Beginnendes, aber eindimensionales Messen	195
4. Übergangsfälle zwischen den Stufen II B und III A: Übergang vom eindimensionalen zum zweidimensionalen Messen	200
5. Teilstadium III A: Empirische Entdeckung des zweidimensionalen Messens	204
6. Teilstadium III B: Operatorische Handhabung des zweidimensionalen Messens	208
7. Das Messen in drei Dimensionen und Schlussfolgerungen	209
KAPITEL VIII: <i>Das Messen von Winkeln</i>	213
<i>I. Das Messen der Winkel</i>	213
1. Die Stufen II A und II B: Völlig fehlendes Messen der Winkel	214
2. Stufe III A: Bemühen um Parallelität der Neigungen, aber Mißerfolg beim Messen der Winkelöffnungen	218
3. Stufe III B: Das Messen der Winkelöffnungen	221
4. Stadium IV: Wahl der Normalöffnung des Winkels	224
<i>II. Das Messen von Dreiecken</i>	226
5. Stufe II A und II B: Kein Messen bzw. eindimensionales Messen ohne Koordinierung der Seiten	227
6. Stufe III A: Empirische Entdeckung des Messens von Neigungen und Winkeln	231
7. Stufe III B: Einführung des Höhenmaßes zusätzlich zur Länge der Seiten	233
8. Stadium IV: Konstruktion einer Senkrechten außerhalb des Dreiecks	234
9. Das Messen eines unregelmäßigen Polygons	236
<i>III. Die Summe der Winkel im Dreieck</i>	238
10. Stadium II: Kein Verständnis der Relationen	241
11. Stufe III A: Beginnende Induktion der Relationen	243
12. Stufe III B: Generalisierung des Gesetzes	247
13. Stadium IV: Formale Notwendigkeit	250
KAPITEL IX: <i>Zwei Probleme des geometrischen Ortes: Die geradlinigen Orter und der Kreis</i>	256
1. Verfahren und allgemeine Ergebnisse	256
2. Stadium I: Begriff der Abstandsgleichheit noch bedeutungslos	260
3. Stadium II: Verständnis der Abstandsgleichheit und allmähliches Verständnis des Ortes	262
4. Stadium III: Direkte operatorische Konstruktion des „Ortes“	271

KAPITEL X: Der Kreis, die mechanischen Kurven und die Vorstellung von den zusammengesetzten Bewegungen	276
1. Verfahren und allgemeine Ergebnisse	277
2. Stadium I: Keine Vorstellung von den durch die Bewegung beschriebenen Kurven, nicht einmal vom Kreis	280
3. Die Reaktionen im Teilstadium II A: Zeichnen der Bahnen, aber fehlende Differenzierung der Kurven	282
4. Stufe II B: Einsetzende Differenzierung der durch einfache und durch zusammengesetzte Bewegungen erzeugten Kurven	289
5. Stadium III, Stufe III A und III B: Unmittelbare Konstruktion der einfachen Kurven, fortschreitende empirische Konstruktion der zusammengesetzten Kurven	299
6. Stadium IV: Direkte deduktive Lösungen	307
VIERTER TEIL	
Flächen und Volumina	313
KAPITEL XI: Erhaltung und Messung der Flächen sowie die Subtraktion zweier kongruenter Teilflächen von zwei gleichen Gesamtflächen	315
I. Die Subtraktion der kongruenten Teilflächen von zwei gleichen Gesamtflächen	315
1. Verfahren und allgemeine Ergebnisse	316
2. Stufe II A: Abschätzen mittels der Wahrnehmung; Fehlen der operatorischen Addition und Subtraktion	318
3. Stufe II B: Übergangsreaktionen; Stadium III: Operatorische Komposition	323
II. Die Erhaltung und die Messung von Flächen	329
4. Verfahren und allgemeine Ergebnisse	329
5. Die Erhaltung der Flächen; Stufe II A: Fehlende Erhaltung	331
6. Die Erhaltung der Flächen; Stufe II B: Übergangsreaktionen	338
7. Die Erhaltung der Flächen; Stufe III A: Operatorische Erhaltung	341
8. Die Erhaltung der Flächen innerhalb und außerhalb einer geschlossenen Grenze	343
9. Das Messen von Flächen	
I. Die Abdeckmethode	350
10. Das Messen von Flächen	
II. Wiederholtes Abtragen der Einheit	355
KAPITEL XII: Die Teilung der Flächen und der Begriff des Bruchteils	361
1. Verfahren und allgemeine Ergebnisse	361
2. Stadium I: Die Schwierigkeiten des Teilens in zwei gleiche Hälften	363
3. Das Teilstadium II A und die Schwierigkeiten beim Teilen in Drittel	373

4. Teilstadium II B und Stadium III: Allmähliches, dann sofortiges Ge-	
lingen der Dreiteilung	381
5. Das Teilen in fünf oder sechs gleiche Teile (Stufe III B)	384
6. Die Beziehungen zwischen den Teilen und dem Ganzen und die Erhal-	
tung der Gesamtheit	388
7. Schlußfolgerungen. Die Teilung der Flächen und der Begriff des	
Bruchteils	395
KAPITEL XIII: <i>Das Verdoppeln von Flächen und Volumina</i>	399
1. Verfahren und allgemeine Ergebnisse	400
2. Stadium II: Keine Verdoppelung möglich, nicht einmal Verdoppelung	
der Längen	403
3. Teilstadium III A: Verdoppelung der Flächen reduziert auf die Ver-	
doppelung der Seitenlänge (bzw. des Durchmessers); Verdoppelung	
der Längen gelingt mittels der Anschauung	406
4. Teilstadium III B: Versuche zur Herstellung einer Beziehung zwischen	
der Länge der Grenzlinien und den zu verdoppelnden Flächen bzw.	
Volumina	411
5. Stadium IV: Verständnis der multiplikativen Relationen zwischen den	
Längen und den Flächen bzw. Rauminhalteten	416
Anhang: Die Beziehungen zwischen dem linearen Messen und dem	
Messen der Flächen in Quadrateinheiten	419
KAPITEL XIV: <i>Erbaltung und Messung der Volumina</i>	421
1. Verfahren und allgemeine Ergebnisse	423
2. Teilstadium II A: Veränderung der Volumina; eindimensionale Ver-	
gleiche	427
3. Teilstadium II B: Übergangsreaktionen	433
4. Teilstadium III A: Logische Multiplikation der Relationen und Er-	
haltung des inneren Volumens	437
5. Teilstadium III B: Beginn der metrischen Relationen	443
6. Stadium IV: Mathematische Multiplikation der dreidimensionalen	
Größen, Erhaltung des besetzten Volumens	448
 FÜNFTER TEIL	
<i>Schlußfolgerungen</i>	453
KAPITEL XV: <i>Die drei Ebenen der euklidischen Konstruktion</i>	454
<i>I. Der Übergang von den topologischen Relationen zu den elemen-</i>	
<i>tarischen euklidischen Begriffen der Erhaltung (Stufe III A)</i>	455
<i>II. Die Entwicklung des Messens (Stufe III B)</i>	463
<i>III. Die Berechnung der Flächen und der Volumina (Stufe IV)</i>	472