

## INHALT

EINLEITUNG	13
1 FUNKTIONSBEGRIFF, EINFACHE FUNKTIONEN, TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN	19
1.1 Der mathematische Funktionsbegriff und seine Bedeutung für die Physik	19
1.1.1 Zusammenhänge in der Physik und ihre mathematische Beschreibung	19
1.1.2 Der Funktionsbegriff	20
1.2 Koordinatensystem, Ortsvektor	23
1.2.1 Bestimmung der Lage eines Punktes bei gegebenen Koordinaten	24
1.3 Graphische Darstellung von Funktionen	25
1.3.1 Ermittlung des Graphen aus der Funktionsgleichung für die Gerade	27
1.3.2 Bestimmung der Funktionsgleichung einer Geraden aus ihrem Graphen	29
1.3.3 Graphische Darstellung von Funktionen	29
1.3.4 Veränderung von Funktionsgleichungen und ihrer Graphen	32
1.4 Winkelfunktionen, trigonometrische Funktionen	34
1.4.1 Einheitskreis	34
1.4.2 Sinusfunktion	35
1.4.3 Kosinusfunktion	43
1.4.4 Zusammenhang zwischen Kosinus- und Sinusfunktion	44
1.4.5 Tangens, Kotangens	45
1.4.6 Additionstheorem, Superposition von trigonometrischen Funktionen	46
Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen	50
Tabelle spezieller Funktionswerte	50
Übungsaufgaben	51
Lösungen	53
2 POTENZEN, LOGARITHMUS, UMKEHRFUNKTION	56
2.1 Potenzen, Exponentialfunktion	56
2.1.1 Potenzen	56
2.1.2 Rechenregeln für Potenzen	57
2.1.3 Exponentialfunktion	59
2.2 Logarithmus, Logarithmusfunktion	63
2.2.1 Logarithmus	63
2.2.2 Rechenregeln für Logarithmen	67
2.2.3 Logarithmusfunktion	70

2.3	Umkehrfunktion (inverse Funktion), mittelbare Funktion	71
2.3.1	Umkehrfunktion oder inverse Funktion	71
2.3.2	Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion	74
2.3.3	Mittelbare Funktion, Funktion einer Funktion	75
	Übungsaufgaben	77
	Lösungen	79
3	DIFFERENTIALRECHNUNG	80
3.1	Folge und Grenzwert	80
3.1.1	Die Zahlenfolge	80
3.1.2	Grenzwert einer Zahlenfolge	81
3.1.3	Grenzwert einer Funktion	85
3.2	Stetigkeit	88
3.3	Reihe und Grenzwert	89
3.3.1	Geometrische Reihe	91
3.4	Die Ableitung einer Funktion	92
3.4.1	Die Steigung einer Geraden	92
3.4.2	Die Steigung einer beliebigen Kurve	92
3.4.3	Der Differentialquotient	95
3.4.4	Physikalische Anwendung: Die Geschwindigkeit	96
3.4.5	Das Differential	98
3.5	Die praktische Berechnung des Differentialquotienten	99
3.5.1	Differentiationsregeln	99
3.5.2	Ableitung einfacher Funktionen	102
3.5.3	Die Differentiation komplizierter Funktionen	107
3.6	Höhere Ableitungen	110
3.7	Maxima und Minima	111
	Differentiationsregeln	115
	Ableitung einfacher Funktionen	115
	Übungsaufgaben	116
	Lösungen	119
4	INTEGRALRECHNUNG	121
4.1	Die Stammfunktion	121
4.1.1	Grundproblem der Integralrechnung	121
4.2	Flächenproblem und bestimmtes Integral	123
4.3	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Die Flächenfunktion als Stammfunktion von $f(x)$	126
4.4	Berechnung des bestimmten Integrals	129
4.4.1	Beispiele für das bestimmte Integral	131

4.5	Zur Technik des Integrierens	134
4.5.1	Verifizierungsprinzip	134
4.5.2	Stammintegrale	135
4.5.3	Konstanter Faktor und Summe	136
4.5.4	Integration durch Substitution	137
4.5.5	Partielle Integration	139
4.6	Rechenregeln für bestimmte Integrale	140
4.7	Substitution bei bestimmten Integralen	142
4.8	Mittelwertsatz der Integralrechnung	144
4.9	Uneigentliche Integrale	144
4.10	Arbeit im Gravitationsfeld	146
	Integrationsregeln und -techniken	148
	Tabelle der wichtigsten Grundintegrale	149
	Übungsaufgaben	150
	Lösungen	153
5	VEKTORRECHNUNG I	156
5.1	Skalare und Vektoren	156
5.2	Addition von Vektoren	160
5.2.1	Summe zweier Vektoren: Geometrische Addition	160
5.3	Subtraktion von Vektoren	161
5.3.1	Der Gegenvektor	161
5.3.2	Differenz zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ : Geometrische Subtraktion	162
5.4	Komponente und Projektion eines Vektors	163
5.5	Komponentendarstellung im Koordinatensystem	165
5.5.1	Ortsvektor	165
5.5.2	Einheitsvektoren	165
5.5.3	Komponentendarstellung eines Vektors	166
5.5.4	Darstellung der Summe zweier Vektoren in Komponentenschreibweise	168
5.5.5	Differenz von Vektoren in Komponenten- schreibweise	170
5.6	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	171
5.7	Betrag eines Vektors	172
	Übungsaufgaben	174
	Lösungen	177

6	VEKTORRECHNUNG II SKALARPRODUKT, VEKTORPRODUKT	179
6.1	Skalarprodukt	180
6.1.1	Sonderfälle	182
6.1.2	Kommutativ- und Distributivgesetz	183
6.2	Kosinussatz	183
6.3	Skalares Produkt in Komponentendarstellung	184
6.4	Vektorprodukt	185
6.4.1	Drehmoment	185
6.4.2	Das Drehmoment als Vektor	187
6.4.3	Definition des Vektorprodukts	188
6.4.4	Sonderfälle	189
6.4.5	Vertauschung der Reihenfolge	190
6.4.6	Allgemeine Fassung des Hebelgesetzes	191
6.5	Vektorprodukt in Komponentendarstellung	191
	Übungsaufgaben	193
	Lösungen	195
7	TAYLORREIHE UND POTENZREIHENENTWICKLUNG	197
7.0	Vorbemerkung	197
7.1	Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe	199
7.2	Gültigkeitsbereich der Taylorentwicklung (Konvergenzbereich)	204
7.3	Das Näherungspolynom	205
7.3.1	Abschätzung des Fehlers	207
7.4	Entwicklung der Funktion $f(x)$ an einer beliebigen Stelle, allgemeine Taylorentwicklung	208
7.5	Nutzen der Reihenentwicklung	209
7.5.1	Polynome als Näherungsfunktionen	209
7.5.2	Tabelle gebräuchlicher Näherungspolynome	211
7.5.3	Integration über Potenzreihenentwicklung	213
	Übungsaufgaben	215
	Lösungen	216
8	KOMPLEXE ZAHLEN	219
8.1	Definition und Eigenschaften der komplexen Zahlen	219
8.1.1	Die imaginäre Zahl	219
8.1.2	Komplexe Zahlen	220
8.1.3	Anwendungsgebiete	220
8.1.4	Rechenregeln	221
8.2	Komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene	222
8.2.1	Die Gaußsche Zahlenebene	222
8.2.2	Komplexe Zahlen in der Schreibweise mit Winkelfunktionen	223

8.3	Die Exponentialform einer komplexen Zahl	225
8.3.1	Eulersche Formel	225
8.3.2	Umkehrformeln zur Eulerschen Formel	226
8.3.3	Komplexe Zahlen als Exponenten	226
8.3.4	Multiplikation und Division	229
8.3.5	Potenzieren und Wurzelziehen	229
8.3.6	Periodizität von $r \cdot e^{ia}$	230
8.3.7	Beispiel	230
Definition und Formeln		231
Übungsaufgaben		232
Lösungen		235
9	DIFFERENTIALGLEICHUNGEN	237
9.1	Begriff der Differentialgleichung, Einteilung der Differentialgleichungen	237
9.2	Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	242
9.2.1	Der Exponentialansatz	245
9.2.2	Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	255
9.3	Variation der Konstanten	256
9.3.1	Variation der Konstanten für den Fall einer Doppelwurzel	256
9.3.2	Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Dgl.	258
9.4	Randwertprobleme	259
9.4.1	Randwertprobleme bei Dgl. 1. Ordnung	259
9.4.2	Randwertprobleme bei Dgl. 2. Ordnung	260
9.5	Anwendungen in der Physik	263
9.5.1	Der radioaktive Zerfall	263
9.5.2	Der harmonische Oszillator	264
Übungsaufgaben		273
Lösungen		275
10	FUNKTIONEN MEHRERER VERÄNDERLICHER, SKALARE FELDER UND VEKTORFELDER	278
10.0	Einleitung	278
10.1	Der Begriff der Funktion mehrerer Veränderlicher	279
10.2	Das skalare Feld	285
10.3	Das Vektorfeld	287
10.4	Spezielle Vektorfelder	291
10.4.1	Das homogene Vektorfeld	291
10.4.2	Das radialsymmetrische Feld	292
10.4.3	Ringförmiges Vektorfeld	294
Übungsaufgaben		295
Lösungen		297

11	PARTIELLE ABLEITUNG, TOTALES DIFFERENTIAL UND GRADIENT	300
11.1	Die partielle Ableitung	300
11.1.1	Mehrfache partielle Ableitung	303
11.2	Das totale Differential	304
11.3	Der Gradient	308
11.3.1	Gradient bei Funktionen zweier Veränderlicher	308
11.3.2	Gradient bei Funktionen dreier Veränderlicher	311
	Übungsaufgaben	315
	Lösungen	316
ANHANG	I: Grundbegriffe der Mengenlehre	319
ANHANG	II: Funktionsbegriff	321
ANHANG	III: Quadratische Gleichungen	322
ANHANG	IV: Funktionstabelle	323
REGISTER		326