

# Inhalt

## I. Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen

§ 1.	Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	11
1.	Quasilineare Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen . . . . .	11
2.	Das Cauchysche Problem und die Charakteristiken . . . . .	14
3.	Quasilineare Differentialgleichungen mit beliebig vielen Veränderlichen . . . . .	18
4.	Beispiele . . . . .	22
5.	Ein Hilfssatz . . . . .	23
6.	Nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	27
7.	Charakteristische Mannigfaltigkeiten . . . . .	30
8.	Die Cauchysche Methode . . . . .	31
9.	Das Cauchysche Problem . . . . .	33
10.	Die Eindeutigkeit der Lösung . . . . .	35
11.	Der singuläre Fall . . . . .	37
12.	Nichtlineare Differentialgleichungen mit beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen . . . . .	39
13.	Vollständiges, allgemeines und singuläres Integral . . . . .	41
14.	Das vollständige Integral und das Cauchysche Problem . . . . .	43
15.	Beispiele . . . . .	45
16.	Differentialgleichungen mit beliebig vielen Veränderlichen . . . . .	48
17.	Der Satz von JACOBI . . . . .	50
18.	Systeme zweier Differentialgleichungen erster Ordnung . . . . .	51
19.	Die Methode von LAGRANGE und CHARPIT . . . . .	53
20.	Systeme linearer Differentialgleichungen . . . . .	55
21.	Vollständige und Jacobische Systeme . . . . .	57
22.	Die Integration vollständiger Systeme . . . . .	59
23.	Die Poissonschen Klammern . . . . .	60
24.	Die Methode von JACOBI . . . . .	63
25.	Kanonische Systeme . . . . .	64
26.	Beispiele . . . . .	65
27.	Die Majorantenmethode . . . . .	66
28.	Der Satz von S. KOWALEWSKAJA . . . . .	69
29.	Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	74
§ 2.	Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	76
30.	Die Typen der Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . . .	76
31.	Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	78
32.	Normalformen bei zwei unabhängigen Veränderlichen . . . . .	80
33.	Das Cauchysche Problem . . . . .	83
34.	Charakteristische Streifen . . . . .	85
35.	Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	87
36.	Reelle und komplexe Charakteristiken . . . . .	89

---

37.	Die grundlegenden Sätze . . . . .	90
38.	Vorintegrale . . . . .	92
39.	Die Monge-Ampèresche Differentialgleichung . . . . .	93
40.	Charakteristiken bei beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen . . . . .	94
41.	Bicharakteristiken . . . . .	97
42.	Der Zusammenhang mit einem Variationsproblem . . . . .	100
43.	Ausbreitung von Unstetigkeiten . . . . .	103
44.	Starke Unstetigkeiten . . . . .	104
45.	Die Riemannsche Integrationsmethode . . . . .	108
46.	Charakteristische Anfangswerte . . . . .	112
47.	Existenzsätze . . . . .	113
48.	Die Formel der partiellen Integration und die Greensche Formel . . . . .	117
49.	Die Methode von VOLTERRA . . . . .	119
50.	Die Formel von SOBOLEV . . . . .	122
51.	Die Formel von SOBOLEV (Fortsetzung) . . . . .	125
52.	Die Konstruktion der Funktion $\sigma$ . . . . .	127
53.	Allgemeine Anfangsbedingungen . . . . .	131
54.	Die verallgemeinerte Wellengleichung . . . . .	133
55.	Die Wellengleichung für beliebig viele unabhängige Veränderliche . . . . .	134
56.	Die energetische Ungleichung . . . . .	137
57.	Der Eindeutigkeitssatz und der Satz über die stetige Abhängigkeit der Lösungen . . . . .	141
58.	Der Fall der Wellengleichung . . . . .	144
59.	Der Satz über die Einbettung in den Raum stetiger Funktionen und einige seiner Folgerungen . . . . .	146
60.	Verallgemeinerte Lösungen von Gleichungen zweiter Ordnung . . . . .	150
61.	Über die Existenz und Eindeutigkeit verallgemeinerter Lösungen des Cauchyschen Problems für die Wellengleichung . . . . .	155
62.	Elliptische Differentialgleichungen . . . . .	156
<b>§ 3.</b>	<b>Systeme partieller Differentialgleichungen</b>	<b>160</b>
63.	Charakteristiken bei Systemen partieller Differentialgleichungen . . . . .	160
64.	Die kinematischen Kompatibilitätsbedingungen . . . . .	164
65.	Die dynamischen Kompatibilitätsbedingungen . . . . .	166
66.	Die Differentialgleichungen der Hydrodynamik . . . . .	167
67.	Die Gleichungen der Elastizitätstheorie . . . . .	170
68.	Anisotrope elastische Körper . . . . .	172
69.	Elektromagnetische Wellen . . . . .	173
70.	Starke Unstetigkeiten in der Elastizitätstheorie . . . . .	178
71.	Charakteristiken und große Frequenzen . . . . .	181
72.	Der Fall zweier unabhängiger Veränderlicher . . . . .	183
73.	Beispiele . . . . .	185

## II. Randwertprobleme

<b>§ 1.</b>	<b>Randwertprobleme bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung . . . . .</b>	<b>188</b>
74.	Die Greensche Funktion einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung . . . . .	188
75.	Überführung in eine Integralgleichung . . . . .	191
76.	Die Symmetrie der Greenschen Funktion . . . . .	193
77.	Eigenwerte und Eigenfunktionen des Randwertproblems . . . . .	194
78.	Über das Vorzeichen der Eigenwerte . . . . .	196
79.	Beispiele . . . . .	197

---

80.	Die verallgemeinerte Greensche Funktion . . . . .	199
81.	Die Legendreschen Polynome . . . . .	204
82.	Die Hermiteschen und Laguerreschen Funktionen . . . . .	207
83.	Differentialgleichungen vierter Ordnung . . . . .	208
84.	Erweiterung des Entwicklungssatzes durch W. A. STEKLOW . . . . .	210
85.	Rechtfertigung der Fouriermethode für die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	213
86.	Rechtfertigung der Fouriermethode für die Schwingungsgleichung . . . . .	215
87.	Die Eindeutigkeitssätze . . . . .	218
88.	Extremaleigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen . . . . .	219
89.	Ein Satz von COURANT . . . . .	223
90.	Ein asymptotischer Ausdruck für die Eigenwerte . . . . .	224
91.	Ein asymptotischer Ausdruck für die Eigenfunktionen . . . . .	228
92.	Das Ritzsche Verfahren . . . . .	230
93.	Ein Beispiel von RITZ . . . . .	231
§ 2.	Elliptische Differentialgleichungen . . . . .	233
94.	Das Newtonsche Potential . . . . .	233
95.	Das Potential einer Doppelschicht . . . . .	236
96.	Eigenschaften des Potentials einer einfachen Schicht . . . . .	243
97.	Die Normalableitung des Potentials einer einfachen Schicht . . . . .	244
98.	Die Normalableitung des Potentials einer einfachen Schicht (Fortsetzung) . . . . .	247
99.	Der direkte Wert der Normalableitung auf $S$ . . . . .	248
100.	Die Ableitung des Potentials einer einfachen Schicht nach einer beliebigen Richtung . . . . .	251
101.	Das logarithmische Potential . . . . .	255
102.	Integralformeln und Parallelflächen . . . . .	257
103.	Folgen harmonischer Funktionen . . . . .	261
104.	Formulierung der inneren Randwertprobleme für die Laplace'sche Gleichung . . . . .	264
105.	Äußere Probleme im ebenen Fall . . . . .	266
106.	Die Kelvintransformation . . . . .	269
107.	Die Eindeutigkeit der Lösung des Neumannschen Problems . . . . .	272
108.	Lösung der Randwertprobleme im dreidimensionalen Fall . . . . .	275
109.	Untersuchung der auftretenden Integralgleichungen . . . . .	277
110.	Übersicht über die Ergebnisse zur Lösbarkeit der betrachteten Randwertprobleme . . . . .	281
111.	Randwertprobleme in der Ebene . . . . .	282
112.	Die Integralgleichung der Kugelfunktionen . . . . .	284
113.	Das Wärmegleichgewicht eines Wärme ausstrahlenden Körpers . . . . .	285
114.	Das alternierende Verfahren von SCHWARZ . . . . .	286
115.	Beweis des Hilfssatzes . . . . .	289
116.	Das alternierende Verfahren von SCHWARZ (Fortsetzung) . . . . .	290
117.	Sub- und superharmonische Funktionen . . . . .	293
118.	Einige Hilfssätze . . . . .	296
119.	Die Methode der Unter- und Oberfunktionen . . . . .	297
120.	Untersuchung der Randwerte . . . . .	300
121.	Die Laplacesche Differentialgleichung im $n$ -dimensionalen Raum . . . . .	304
122.	Die Greensche Funktion des Laplaceschen Operators . . . . .	305
123.	Die Eigenschaften der Greenschen Funktion . . . . .	307
124.	Die Greensche Funktion für ebene Bereiche . . . . .	310
125.	Beispiele . . . . .	314
126.	Die Greensche Funktion und die inhomogene Differentialgleichung . . . . .	315
127.	Eigenwerte und Eigenfunktionen . . . . .	318
128.	Die Normalableitung der Eigenfunktionen . . . . .	322
129.	Die Extremaleigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen . . . . .	323

---

130.	Die Helmholtzsche Gleichung und das Ausstrahlungsprinzip . . . . .	325
131.	Der Eindeutigkeitssatz . . . . .	327
132.	Die Prinzipien der Grenzamplitude und der Grenzabsorption . . . . .	328
133.	Randwertprobleme für die Helmholtzsche Differentialgleichung . . . . .	330
134.	Die Beugung einer elektromagnetischen Welle . . . . .	335
135.	Der Vektor der magnetischen Feldstärke . . . . .	337
136.	Der Eindeutigkeitssatz über die Lösung des Dirichletschen Problems für elliptische Differentialgleichungen . . . . .	338
137.	Die Differentialgleichung $\Delta v - \lambda v = 0$ . . . . .	341
138.	Ein asymptotischer Ausdruck für die Eigenwerte . . . . .	345
139.	Der Beweis des Satzes aus [138] . . . . .	350
140.	Lineare Differentialgleichungen allgemeinerer Gestalt . . . . .	357
141.	Der Greensche Tensor . . . . .	358
142.	Das ebene statische Problem der Elastizitätstheorie . . . . .	360
143.	Über die Ergebnisse von SCHAUDER . . . . .	362
144.	Die verallgemeinerten Lösungen der Klasse $W_2^2(D)$ . . . . .	365
145.	Die erste grundlegende (energetische) Ungleichung . . . . .	369
146.	Der Raum $W_{2,0}^2(D)$ und die zweite grundlegende Ungleichung . . . . .	371
147.	Einige Ausführungen über Hilbertsche Räume und über Operatoren in Hilbertschen Räumen . . . . .	378
148.	Über die Lösbarkeit des Dirichletschen Problems im Raum $W_2^2(D)$ . . . . .	381
149.	Über die Fredholmsche Lösbarkeit des Dirichletschen Problems . . . . .	385
150.	Über das Spektrum symmetrischer Operatoren . . . . .	390
<b>§ 3.</b>	<b>Parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen . . . . .</b>	<b>395</b>
151.	Die Abhängigkeit der Lösung der Wärmeleitungsgleichung von der Anfangs- und Randbedingung sowie von der Störfunktion . . . . .	395
152.	Die Potentiale der Wärmeleitungsgleichung im eindimensionalen Fall . . . . .	397
153.	Wärmequellen im mehrdimensionalen Fall . . . . .	400
154.	Die Greensche Funktion der Wärmeleitungsgleichung . . . . .	401
155.	Anwendung der Laplacetransformation . . . . .	402
156.	Anwendung des Differenzenverfahrens . . . . .	406
157.	Die Fouriermethode zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung . . . . .	409
158.	Die inhomogene Differentialgleichung . . . . .	411
159.	Die Eigenschaften der Lösungen der Wärmeleitungsgleichung . . . . .	414
160.	Die verallgemeinerten Potentiale einer einfachen Schicht und einer Doppelschicht im eindimensionalen Fall . . . . .	416
161.	Sub- und superparabolische Funktionen . . . . .	421
162.	Parabolische Gleichungen in allgemeiner Gestalt. Die energetische Ungleichung . . . . .	422
163.	Die Fouriermethode für parabolische Differentialgleichungen . . . . .	426
164.	Die zweite grundlegende Ungleichung und die Lösbarkeit des ersten Anfangs-Randwertproblems . . . . .	430
165.	Hyperbolische Gleichungen in allgemeiner Gestalt. Die energetische Ungleichung für das erste Anfangs-Randwertproblem . . . . .	433
166.	Die Fouriermethode für Gleichungen vom hyperbolischen Typus . . . . .	436
167.	Ein Randwertproblem für die Kugel . . . . .	440
168.	Die Schwingungen des Innengebietes einer Kugel . . . . .	444
169.	Untersuchung der Lösung . . . . .	447
170.	Das Randwertproblem der Telegraphengleichung . . . . .	449
<b>Literaturhinweise . . . . .</b>	<b>452</b>	
<b>Namen- und Sachverzeichnis . . . . .</b>	<b>467</b>	