

Jetzt mit  
eLearning

# *besser  
lernen*

# Experimentalphysik 3

Atome und Kerne

Martin Erdmann  
Günter Flügge



## Zugangscode

Falls Sie beim Kauf Ihres eBooks keinen Zugangscode erhalten haben, kontaktieren Sie uns bitte über die folgende Seite und halten Sie Ihre Rechnung/Bestellbestätigung bereit:  
<https://www.pearson.de/ebook-zugangscode>



## 6.1 Spektroskopische Bezeichnungen

Die heute üblichen Bezeichnungen der Energieniveaus von Elektronen aufgrund spektroskopischer Messungen sind historisch bedingt und haben sich sowohl in der Atom-, Kern- als auch der Teilchenphysik durchgesetzt. Spektroskopische Bezeichnungen funktionieren nach folgendem Schema mit der Erklärung der Variablen in ►Tabelle 6.1:

$$n^{2S+1}L_J \quad (6.1)$$

$n$	Hauptquantenzahl
$S$	Gesamtspin
$2S + 1$	Multiplizität = Anzahl Einstellmöglichkeiten Gesamtspin
$L$	Gesamtbahndrehimpuls
$J$	Gesamtdrehimpuls

**Tabelle 6.1** Bedeutung der Variablen bei spektroskopischen Bezeichnungen von Elektron-Energieniveaus (6.1)

Die Multiplizität bezeichnet die Anzahl der Einstellmöglichkeiten des Gesamtspins  $S$ , womit die Spinprojektionen auf eine ausgezeichnete Achse (z. B.  $z$ -Achse) gemeint sind. Zum Beispiel ergeben sich im Wasserstoff mit dem Elektronenspin  $s = 1/2$  zwei Spinprojektionen  $m_s = \pm 1/2$  und damit für den Gesamtspin  $2S + 1 = 2$  Einstellmöglichkeiten. Dieser Fall wird als Dublett bezeichnet. Weitere übliche Benamungen bei Atomen mit mehreren Elektronen sind in ►Tabelle 6.2 gezeigt.

$S$	$2S + 1$	Bezeichnung
0	1	Singulett
1/2	2	Dublett
1	3	Triplett
3/2	4	Quartett
2	5	Quintett

**Tabelle 6.2** Bezeichnungen der Multiplizitäten  $2S + 1$  für den Gesamtspin  $S$

Für den Wert des Bahndrehimpulses  $L$  wird häufig anstelle der Zahl ein Buchstabe benutzt, der sich aus historischen Bezeichnungen ableitet. Wie in ►Tabelle 6.3 gezeigt ist, werden für Einzelzustände Kleinbuchstaben und für Gesamtzustände Großbuchstaben verwendet. In den spektroskopischen Bezeichnungen (6.1) wird üblicherweise der Großbuchstabe für  $L$  verwendet.

Bahndrehimpuls	Einzelzustand $\ell$	Gesamtzustand $L$	Bezeichnung
0	$s$	$S$	sharp
1	$p$	$P$	principal
2	$d$	$D$	diffuse
3	$f$	$F$	fundamental
4	$g$	$G$	–

**Tabelle 6.3** Bezeichnungen und Wortherkunft für Bahndrehimpulse: Kleinbuchstaben für Einzelzustände, Großbuchstaben für Gesamtzustände. Bei spektroskopischen Bezeichnungen (6.1) wird der Großbuchstabe verwendet.

Die Quantenzahl  $J$  des Gesamtdrehimpulses aus Gesamtbahndrehimpuls und Gesamtspin kann die Werte  $J = |L - S|, |L - S| + 1, \dots, L + S$  annehmen (5.64). Er wird bei spektroskopischen Bezeichnungen (6.1) numerisch angegeben.

### Beispiel 19: Spektroskopische Bezeichnungen beim H-Atom

Die verschiedenen spektroskopischen Zustände beim Wasserstoff werden wie folgt bezeichnet:

Hauptquantenzahl $n$	Bahndrehimpuls $\ell$	Spin $s$	Gesamtdrehimpuls $j$	Spektroskopische Bezeichnung
1	0	1/2	1/2	$1^2S_{1/2}$
2	0	1/2	1/2	$2^2S_{1/2}$
2	1	1/2	1/2	$2^2P_{1/2}$
2	1	1/2	3/2	$2^2P_{3/2}$

## 6.2 Feinstrukturkonstante

Um die Größenordnungen der Energiekorrekturen einordnen zu können, führen wir die **Feinstrukturkonstante**  $\alpha$  ein. Sie ist ein dimensionsloses Maß für die **Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung** bei Abständen  $\sim 1\text{\AA}$ :

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \quad (6.2)$$

Üblicherweise wird der Kehrwert der Feinstrukturkonstanten angegeben:

$$\frac{1}{\alpha} = 137,035999084(21) \quad (6.3)$$

Nehmen wir z. B. die Energieniveaus (4.52) des Elektrons im Wasserstoffatom mit der Hauptquantenzahl  $n$  und Ladung  $Z = 1$ :

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8 h^2 \epsilon_0^2} \left( \frac{Z}{n} \right)^2 \quad (6.4)$$

Mit  $\alpha$  (6.2) können wir die Energien in kompakter Form aufschreiben:

$$E_n = -\alpha^2 \frac{m_e c^2}{2} \left( \frac{Z}{n} \right)^2 \quad (6.5)$$

Dabei ist die Bindungsenergie des Elektrons um das  $\alpha^2 \approx 10^{-4}$ -fache kleiner als die Ruheenergie  $m_e c^2$  des Elektrons.

## 6.3 Feinstruktur

Zur Erklärung der beobachteten Verschiebungen der Energieniveaus im Rahmen der Feinstruktur müsste man die relativistisch korrekte quantenmechanische Dirac-Gleichung ansetzen. Stattdessen beschreiben wir drei Korrekturterme zum nicht-relativistischen Hamilton-Operator, die **relativistische Korrektur** der kinetischen Energie, die **Spin-Bahn-Kopplung** und den **Darwin-Term** zur Korrektur der potentiellen Energie.

### 6.3.1 Relativistische Korrektur

Die Gesamtenergie eines Elektrons mit den Anteilen der kinetischen und potentiellen Energien lautet im nicht-relativistischen Fall ( $v \ll c$ ):

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{p^2}{2 m_e} + E_{\text{pot}} \quad (6.6)$$

Um die relativistischen Effekte auf den Term der kinetischen Energie abzuschätzen, betrachten wir nach Einsteins Energiebeziehung (1.9)

$$E_{\text{rel}} = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} = m_e c^2 \sqrt{1 + \left( \frac{p}{m_e c} \right)^2}. \quad (6.7)$$

Mit der Taylor-Entwicklung von  $\sqrt{1+x} = 1 + (1/2)x - (1/8)x^2 \dots$  folgt dann

$$\begin{aligned} E_{\text{rel}} &\approx m_e c^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{p}{m_e c} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{p}{m_e c} \right)^4 \right] \\ &= \frac{p^2}{2 m_e} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{m_e^3 c^2} + m_e c^2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Damit ergibt sich als Korrekturterm für die kinetische Energie

$$\Delta E_{\text{rel}} = -\frac{1}{8} \frac{p^4}{m_e^3 c^2}. \quad (6.9)$$

Den Erwartungswert für die relativistische Energiekorrektur erhält man über den entsprechenden Operator  $\Delta\hat{E}_{\text{rel}}$ :

$$\begin{aligned}\langle\Delta\hat{E}_{\text{rel}}\rangle &= \int \psi^* \Delta\hat{E}_{\text{rel}} \psi dV \\ &= -\frac{1}{8m_e^3 c^2} \int \psi^* (-i\hbar\nabla)^4 \psi dV\end{aligned}$$

Die Berechnung überlassen wir der Theorievorlesung und notieren hier das Ergebnis für die **relativistische Korrektur** der kinetischen Energie:

$$\Delta E_{\text{rel}} = -E_n Z^2 \alpha^2 \frac{1}{n} \left( \frac{3}{4n} - \frac{1}{\ell + \frac{1}{2}} \right) \quad (6.10)$$

Mit der Verwendung der Feinstrukturkonstanten  $\alpha$  (6.2) wird die Hierarchie der Größenordnungen sehr gut verdeutlicht. Die Bindungsenergie  $E_n$  (6.5) ist um den Faktor  $\alpha^2 \approx 10^{-4}$  kleiner als die Ruheenergie des Elektrons. Die relativistische Korrektur (6.10) ist nochmal um denselben Faktor  $\alpha^2 \approx 10^{-4}$  geringer. Beachten Sie, dass (6.10) vom Bahndrehimpuls  $\ell$  abhängt.

#### Beispiel 20: Relativistische Korrektur

Beim Wasserstoffatom im Grundzustand ( $n = 1$ ,  $\ell = 0$ ) erhalten wir die relativistische Korrektur mit (6.3) und (6.10):

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{rel}} &= -\frac{E_1 \alpha^2}{1} \left( \frac{3}{4 \cdot 1} - \frac{1}{0 + \frac{1}{2}} \right) \\ &= -(-13,6) \cdot \frac{1}{137^2} \cdot \underbrace{\left( \frac{3}{4} - 2 \right)}_{=-1,25} \text{ eV} \\ &= -9 \cdot 10^{-4} \text{ eV} = -0,9 \text{ meV}\end{aligned}$$

### 6.3.2 Spin-Bahn-Kopplung

In der klassischen Vorstellung eines Wasserstoffatoms befindet sich das Proton nahe des Atomschwerpunkts und das Elektron kreist um das Proton. Diese Argumentation basiert auf dem großen Massenunterschied zwischen Proton und Elektron von  $m_p \approx 2.000 m_e$ .

**Ruhsystem Elektron:** Im Folgenden vertauschen wir die Rollen und begeben uns zunächst in Gedanken mithilfe einer Lorentztransformation in das Ruhesystem des Elektrons. In der klassischen Vorstellung kreist nun das Proton um das ruhende Elektron und erzeugt dabei das Magnetfeld  $\vec{B}$  eines Kreisstroms senkrecht zur Kreisfläche (vergleiche ►Abbildung 5.3 und Gleichung (5.23)):

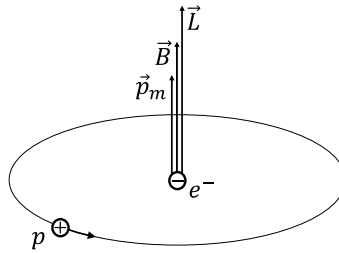
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{p}_m}{r^3} \quad (6.11)$$

Wegen der positiven elektrischen Elementarladung  $e$  des Protons stehen das Dipolmoment  $\vec{p}_m$  und der Proton-Bahndrehimpuls  $\vec{L}$  hier parallel zueinander (vergleiche mit (5.34), (5.39), siehe ►Abbildung 6.2):

$$\vec{p}_m = \frac{e \vec{L}}{2 m_p} = \underbrace{\frac{e \hbar}{2 m_p}}_{\equiv \mu_K} \frac{\vec{L}}{\hbar} = \mu_K \frac{\vec{L}}{\hbar} \quad (6.12)$$

Der Vorfaktor ist das Kernmagneton  $\mu_K$  (analog zum Bohrschen Magneton, siehe Kapitel 6.5). Das Magnetfeld (6.11) durch die Bahnbewegung des Protons zeigt ebenfalls parallel zum Bahndrehimpuls  $\vec{L}$ :

$$\vec{B} = \frac{\text{const.}}{r^3} \cdot \vec{L} \quad (6.13)$$



**Abbildung 6.2**

Im Ruhesystem des Elektrons kreist das Proton um das Elektron und erzeugt dadurch ein Magnetfeld  $\vec{B}$  parallel zum Drehimpuls  $\vec{L}$  und zum magnetischen Moment  $p_m$  des Elektrons.

Das Elektron besitzt den Spin  $\vec{S}$ , mit dem ein magnetisches Dipolmoment  $\vec{\mu}_s$  (5.59) verbunden ist. Wir beachten dabei seinen  $g$ -Faktor  $g_s \approx -2$  (5.58):

$$\vec{\mu}_s = g_s \mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar} \quad (5.59)$$

Die Wechselwirkung des magnetischen Dipolmoments  $\vec{\mu}_s$  vom Elektronenspin mit dem Magnetfeld  $\vec{B}$  durch den Proton-Bahndrehimpuls  $\vec{L}$  ergibt eine Verschiebung des Elektron-Energieniveaus (5.26):

$$\Delta E = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = \frac{\text{const.}}{r^3} \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (6.14)$$

Dabei haben wir alle Konstanten zusammengefasst.

**Ruhesystem Proton:** Die Rücktransformation vom Elektron- in das Proton-Ruhesystem können wir durch eine Lorentztransformation erreichen, deren Berechnung wir der Theorievorlesung überlassen. Im Ergebnis ändert sich nur die Konstante in (6.14).

Die neue Konstante und die  $r^{-3}$ -Abhängigkeit fassen wir in der Variablen  $a$  zusammen, um die Energieschiebung durch das Skalarprodukt  $\vec{L} \cdot \vec{S}$  hervorzuheben:

$$a = \frac{\text{const.}'}{r^3} \hbar^2 \quad (6.15)$$

$$\Delta E = \frac{a}{\hbar^2} \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (6.16)$$



Den Bahndrehimpuls des Elektrons  $\vec{L}$  und seinen Spin  $\vec{S}$  fassen wir im Folgenden als quantenmechanische Operatoren auf, wobei uns der Erwartungswert ihres Skalarprodukt  $\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}$  interessiert. Der Operator des Gesamtdrehimpulses  $\hat{\vec{J}}$  setzt sich aus  $\hat{\vec{L}}$  und  $\hat{\vec{S}}$  zusammen. Durch Quadrieren und Umstellen der Terme erhalten wir den Erwartungswert des gesuchten Skalarprodukts mithilfe von (3.128), (5.41) und (5.63):

$$\begin{aligned}\hat{\vec{J}} &= \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}} \\ \hat{J}^2 &= \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}} \\ \hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}} &= \frac{1}{2} (\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2) \\ \langle \hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}} \rangle &= \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)]\end{aligned}\quad (6.17)$$

Damit lautet der Term für die Energieverschiebung der Energieniveaus in den Quantenzahlen  $j$ ,  $\ell$  und  $s$ :

$$\Delta E_{LS} = \frac{a}{2} [j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)] \quad (6.18)$$

Der Erwartungswert von  $a$  wird in der Theorie durch Anwendung der Wellenfunktion des Wasserstoffatoms berechnet, das Ergebnis geben wir hier an:

$$\begin{aligned}\langle a \rangle &= \text{const.}' \hbar^2 \int \psi^* \frac{1}{r^3} \psi dV \\ &= -E_n Z^2 \alpha^2 \frac{1}{n \cdot \ell \cdot (\ell + \frac{1}{2}) \cdot (\ell + 1)}\end{aligned}\quad (6.19)$$

**Spin-Bahndrehimpuls-Wechselwirkung:** Die Energieverschiebung  $\Delta E = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}$  (5.26) erfolgt aufgrund der Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Dipolmoment durch den Elektron-Spin und dem Magnetfeld aus der Elektron-Bahnbewegung. In Kurzform bezeichnen wir diesen Effekt als **Spin-Bahn-Kopplung des Elektrons**. Die Energieverschiebung beträgt:

$$\Delta E_{LS} = -E_n \frac{(Z\alpha)^2}{2n} \cdot \frac{j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)}{\ell \cdot (\ell + \frac{1}{2}) \cdot (\ell + 1)} \quad (6.20)$$

Interessant ist, dass hier, wie auch bei der relativistischen Korrektur (6.10), die Energieentartung in der Bahndrehimpulsquantenzahl  $\ell$  aufgehoben wird.

Die erste Aufspaltung in der ►Abbildung 6.1 (Feinstruktur) hängt aber gerade *nicht* von  $\ell$  ab. Man kann sie also nicht allein auf die Spin-Bahn-Kopplung zurückführen, sondern benötigt die relativistische Korrektur und den Darwin-Term aus dem nächsten Kapitel zur Erklärung, warum z. B.  $2S_{1/2}(\ell=0)$  und  $2P_{1/2}(\ell=1)$  in der Energie entartet sind.

### Aufgabe 9: Spin-Bahn-Kopplung

Berechnen Sie die Energieaufspaltung durch Spin-Bahn-Kopplung im Wasserstoffatom zwischen den Energieniveaus  $n=2$ ,  $\ell=1$ ,  $j=\frac{1}{2}$  und  $n=2$ ,  $\ell=1$ ,  $j=\frac{3}{2}$ .



### 6.3.3 Darwin-Term

Die halbklassische Herleitung der Spin-Bahn-Kopplung versagt für die Bahndrehimpulsquantenzahl  $\ell = 0$  aufgrund der Divergenz der Energieaufspaltung  $\Delta E_{LS}$  in (6.20). Die entsprechende Korrektur für  $\ell = 0$  liefert der sogenannte Darwin-Term (C.G.Darwin, 1928). Er beschreibt die Änderung der potentiellen Energie  $\Delta V$  aufgrund der Tatsache, dass das Elektron nicht exakt lokalisiert ist (manchmal als Zitterbewegung bezeichnet), sodass die elektromagnetische Wechselwirkung sich nicht nur auf den festen Abstand  $r$  bezieht, sondern auch von einem kleinen Bereich  $\Delta r$  um das Elektron herum abhängt.

Der Energieoperator lautet (von der ersten zur zweiten Zeile ist eine längere Rechnung erforderlich):

$$\hat{H}_{\text{Darwin}} = \frac{\hbar^2}{8m_e^2 c^2} \cdot \Delta V \quad (6.21)$$

$$= \frac{\hbar^2}{8m_e^2 c^2} 4\pi \left( \frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0} \right) |\psi(0)|^2 \quad (6.22)$$

Ein Beitrag ergibt sich nur dann, wenn im rechten Term  $\psi(0) \neq 0$  ist. Dafür muss der Bahndrehimpuls verschwinden, so dass die Korrektur nur für Zustände mit  $\ell = 0$  relevant ist. Als Korrekturterm ergibt sich (Theorievorlesung):

$$\Delta E_{\text{Darwin}} = -E_n \frac{Z^2 \alpha^2}{n} \quad \text{für } \ell = 0 \quad (6.23)$$

### 6.3.4 Feinstrukturaufspaltung

Für die Feinstrukturaufspaltung haben wir die drei Terme aus der relativistischen Korrektur und der Spin-Bahn-Kopplung sowie den Darwin-Term:

$$\Delta E_{\text{rel}} = -E_n Z^2 \alpha^2 \frac{1}{n} \left( \frac{3}{4n} - \frac{1}{\ell + \frac{1}{2}} \right) \quad (6.10)$$

$$\Delta E_{LS} = -E_n Z^2 \alpha^2 \frac{1}{n} \frac{1}{2} \frac{j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)}{\ell \cdot (\ell + \frac{1}{2}) \cdot (\ell + 1)} \quad (6.20)$$

$$\Delta E_{\text{Darwin}} = -E_n Z^2 \alpha^2 \frac{1}{n} \quad \text{für } \ell = 0 \quad (6.23)$$

Für den Fall  $\ell \geq 1$  müssen die Terme (6.10) und (6.20) addiert werden, indem man z.B. die Fälle  $\ell = j - 1/2$  und  $\ell = j + 1/2$  getrennt durchrechnet. Auch für  $\ell = 0$  ergibt eine einfache Addition von (6.10) und (6.23) dasselbe einheitliche Ergebnis der **Feinstrukturaufspaltung**:

$$\Delta E_{\text{FS}} = \Delta E_{\text{rel}} + \Delta E_{LS} (\ell \geq 1) + \Delta E_{\text{Darwin}} (\ell = 0) \quad (6.24)$$

$$\Delta E_{\text{FS}} = E_n Z^2 \alpha^2 \frac{1}{n} \cdot \left[ \frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right] \quad (6.25)$$

Die Größenordnungen werden mit der Feinstrukturkonstante  $\alpha$  (6.2) gut sichtbar. Die Feinstrukturaufspaltung der Energieniveaus ist  $\alpha^2/n$ -mal geringer als die Bindungsenergie des zugehörigen Niveaus. Bemerkenswert ist, dass die  $\ell$ -Abhängigkeit der Terme sich aufhebt.

*Die Feinstrukturaufspaltung hängt nur noch von der Hauptquantenzahl  $n$  und der Gesamtdrehimpulsquantenzahl  $j$  ab.*

Dieses Ergebnis liefert auch die relativistische Dirac-Gleichung.

#### Experiment 15: Feinstruktur von Natrium

Mit Hilfe eines hochauflösenden Gitters untersuchen wir die gelbe Natriumlinie. Das gelbe Licht besteht aus zwei dicht nebeneinander liegenden Linien aus den Übergängen mit spektroskopischen Bezeichnungen  $n^{2S+1}L_J$ , wobei sich die beiden oberen Energieniveaus in  $J = 3/2$  und  $J = 1/2$  unterscheiden:  $3^2P_{3/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$  und  $3^2P_{1/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$ . Die Wellenlängen der Natrium-Feinstruktur betragen  $\lambda = 589,6 \text{ nm}$  und  $\lambda = 589,0 \text{ nm}$ .

## 6.4 Lamb-Verschiebung

Im Kapitel 6.3 hatten wir gezeigt, dass die Feinstrukturaufspaltung (6.25) beim Wasserstoff nur die Quantenzahl  $j$  betrifft, die Energie aber nicht von der Drehimpulsquantenzahl  $\ell$  abhängt. Das ist auch das Ergebnis der exakten Berechnung nach der Dirac-Theorie. Das folgende Experiment zeigt allerdings eine kleine Verschiebung zwischen den Zuständen  $2S_{1/2}$  und  $2P_{1/2}$  des Wasserstoffs und damit einen neuen Effekt.

#### Experiment 16: Lamb-Verschiebung

Im Experiment werden Wasserstoffatome untersucht, deren Elektron sich im angeregten Zustand  $n = 2$  befindet. Dazu wird Wasserstoffgas in einem Ofen erhitzt und die Wasserstoffatome werden bei ihrem Austritt mit Elektronen beschossen, die das Wasserstoffelektron auf Energieniveaus mit  $n = 2$  anregen (►Abbildung 6.3).

Einige der Wasserstoffelektronen gelangen dabei in das *langlebige* Niveau  $2S_{1/2}$  (Bahndrehimpuls  $\ell = 0$  in ►Abbildung 6.4), können ein Wolframblech erreichen und dort ihre Anregungsenergie durch Auslösen eines Elektrons aus dem Blech abgeben. Durch eine Spannung werden die ausgelösten Elektronen auf eine Anode gelenkt und durch Messung des Stromflusses  $I > 0$  nachgewiesen.

Zwischen der Anregung durch die Elektronen und der Nachweisapparatur ist zusätzlich ein Hochfrequenzresonator (HF-Resonator) eingebaut. Speist man darin elektromagnetische Wellen mit der passenden Frequenz  $\nu = \Delta E/h$  ein, die dem Energieunterschied  $\Delta E$  zwischen den beiden Energieniveaus  $2S_{1/2}$  und  $2P_{1/2}$  entspricht, können die angeregten Wasserstoffatome durch induzierte Emission in das

kurzlebige Niveau  $2P_{1/2}$  übergehen (Bahndrehimpuls  $\ell = 1$  in ►Abbildung 6.4) und in den Grundzustand zerfallen. Bei der Ankunft am Wolframblech haben die Wasserstoffatome nicht mehr genügend Energie, um ein Elektron aus dem Blech zu schlagen, der Strom sinkt auf  $I = 0$ .

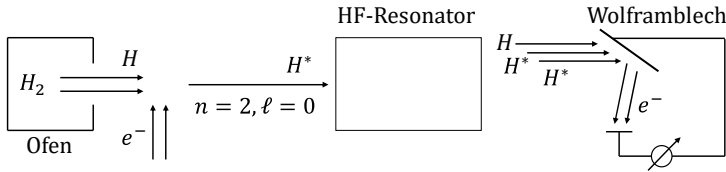


Abbildung 6.3

Wasserstoffatome werden durch Stöße teilweise auf das langlebige  $2S_{1/2}$ -Niveau angeregt. An einem Wolframblech lösen sie mit ihrer Anregungsenergie Elektronen aus, die als Strom nachgewiesen werden. Wird im Resonator die Energie  $\Delta E$  der Lamb-Verschiebung eingestrahlt, zerfällt der  $2S_{1/2}$ -Zustand und der Strom versiegt.

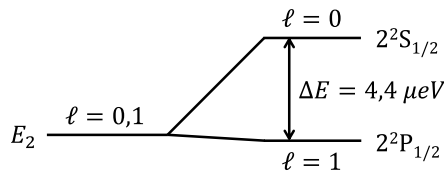


Abbildung 6.4

Die Lamb-Verschiebung trennt Niveaus mit unterschiedlichem Bahndrehimpuls  $\ell$ .

Die entscheidende Beobachtung des Experiments ist die Aufspaltung der Energieniveaus  $n = 2, \ell = 0$  und  $n = 2, \ell = 1$  in ►Abbildung 6.4. Im Rahmen der Messgenauigkeit der Feinstruktur (6.25) waren sie noch entartet:

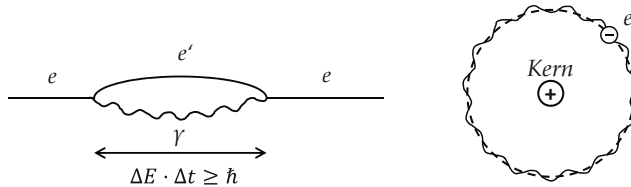
*Die Energieentartung bezüglich der Bahndrehimpulsquantenzahl  $\ell$  der Niveaus  $2S_{1/2}$  und  $2P_{1/2}$  wird durch die Lamb-Verschiebung aufgehoben.*

W. Lamb und R. Retherford führten diesen Versuch durch, Lamb erhielt 1955 den Nobelpreis.

**Theoretische Interpretation:** Die ersten Berechnungen zur Lamb-Verschiebung nahm Hans Bethe (Nobelpreis 1967) vor, gefolgt von Richard Feynman und Julian Schwinger. Die daraus entwickelte **Quantenelektrodynamik QED** konnte eine konsistente quantentheoretische Beschreibung der Lamb-Verschiebung liefern. (Nobelpreise an Richard P. Feynman, Julian Schwinger und Sin-Itiro Tomonaga im Jahr 1965).

Die Untersuchungen zur Lamb-Verschiebung gehen über den Darwin-Term hinaus. Der Darwin-Term ist ein relativistischer Korrekturterm, der aufgrund der quantenmechanischen Unschärfe erforderlich ist. Die Lamb-Verschiebung berücksichtigt die Ursache für Zitterbewegungen im Rahmen der Quantenelektrodynamik.

Wir erläutern kurz die wichtigsten Aspekte dieser Theorie. Im Rahmen der Heisenbergschen Unschärferelation sind kurzzeitige Fluktuationen des Elektrons in ein Elektron-Photon-Paar möglich (►Abbildung 6.5 links).



**Abbildung 6.5**

Links: Das Elektron kann aufgrund der Unschärferelation (3.83) kurzzeitig in ein Elektron-Photon-Paar übergehen (Vakuumsfluktuation, links) und damit das effektive Potential ändern („Zitterbewegungen“), rechts

Durch diese **Vakuumsfluktuationen** verändert sich das Potential

$$V = -\frac{k}{r} \rightarrow V = -\frac{k}{r + \delta r} \quad (6.26)$$

und damit auch der Erwartungswert der Energie (vergleiche auch „Zitterbewegungen“ im Darwin-Term (►Abbildung 6.5 rechts und (6.23)):

$$\left\langle E \left( \frac{1}{r} \right) \right\rangle \neq \left\langle E \left( \frac{1}{r + \delta r} \right) \right\rangle \quad (6.27)$$

Ein weiterer Effekt ist die kurzzeitige Fluktuation in zusätzliche Elektron-Positron-Paare, die als **Vakuumpolarisation** bezeichnet wird. Dadurch wird die Kernladung teilweise abgeschirmt.

Die im Rahmen der Quantenelektrodynamik (QED) resultierenden Verschiebungen der Energieniveaus sind nochmal eine Größenordnung kleiner als die Verschiebungen der Feinstruktur:

$$\Delta E \lesssim 10^{-5} \text{ eV} \quad (6.28)$$

Betroffen sind vor allem Zustände in Kernnähe, also mit kleinen Bahndrehimpulsquantenzahlen  $\ell$ .

## 6.5 Hyperfeinstruktur

Um die Hyperfeinstruktur zu verstehen, benötigen wir auch den Spin des Wasserstoffkerns. Das Proton hat den Spin  $I = 1/2$ . Wir führen den entsprechenden Spinoperator  $\hat{I}$  ein mit den Erwartungswerten wie bei den bisherigen Drehimpulsoperatoren und ihren Projektionsoperatoren:

$$\langle \hat{I}^2 \rangle = I(I + 1) \hbar^2 \quad (6.29)$$

$$\langle \hat{I}_z \rangle = m_I \hbar \quad (6.30)$$

Analog zum Bohrschen Magneton definieren wir das **Kernmagneton** (6.12) mit der Protonenmasse  $m_p$ :

$$\mu_K = \frac{e \hbar}{2 m_p} = 31,5245125844(96) \frac{\text{neV}}{\text{T}} \quad (6.31)$$

Mit dem  $g$ -Faktor des Kerns  $g_k$  beträgt das **magnetische Dipolmoment des Kerns**:

$$\vec{\mu}_I = g_k \cdot \mu_K \cdot \frac{\vec{I}}{\hbar} \quad (6.32)$$

Für das Proton geben wir hier den  $g$ -Faktor an (wir messen ihn in Kapitel 13.4):

$$g_p = 5,5856946893(16) \quad (6.33)$$

Dieser Wert unterscheidet sich von der Erwartung für ein punktförmiges, geladenes Teilchen, wie z. B. das Elektron, dessen  $g$ -Faktor  $g_s \approx -2$  beträgt.

Der  $g$ -Faktor des Protons  $g_p$  weist darauf hin, dass das Proton kein Elementarteilchen ist, sondern eine Substruktur besitzt. Wir werden später sehen, dass das Proton aus drei Quarks zusammengesetzt ist.

Das Elektron mit dem Gesamtdrehimpuls  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  erzeugt am Ort des Kerns ein Magnetfeld in Richtung von  $\vec{J}$ :

$$\vec{B} = B_j \frac{\vec{J}}{|\vec{J}|} \quad (6.34)$$

Aufgrund der Wechselwirkung zwischen diesem Magnetfeld und dem magnetischen Dipolmoment aufgrund des Protonenspins werden die Energieniveaus des Elektrons verschoben (5.26)

$$\Delta E_{\text{HF}} = -\vec{\mu}_I \cdot \vec{B} = \frac{A}{\hbar^2} \vec{I} \cdot \vec{J}. \quad (6.35)$$

Der Faktor  $A$  wird als **Hyperfeinkonstante** bezeichnet:

$$A = \frac{B_j g_K \mu_K}{\sqrt{J(J+1)}} \quad (6.36)$$

Ähnlich wie bei der Berechnung der Feinstruktur (6.17) fassen wir den Gesamtdrehimpuls des Elektrons  $\hat{J}$  und den Kernspin  $\hat{I}$  als Operatoren auf. Der Operator des **Gesamtdrehimpulses des Atoms**  $\hat{F}$  setzt sich hier aus  $\hat{J}$  und  $\hat{I}$  zusammen. Der Erwartungswert des quadrierten Gesamtdrehimpulsoperators  $\hat{F}^2$  beträgt  $F(F+1)$ . Durch Quadrieren und Umstellen der Terme erhalten wir den Erwartungswert des gesuchten Skalarprodukts:

$$\hat{F} = \hat{J} + \hat{I} \quad (6.37)$$

$$\hat{F}^2 = \hat{J}^2 + \hat{I}^2 + 2\hat{I} \cdot \hat{J} \quad (6.38)$$

$$\hat{I} \cdot \hat{J} = \frac{\hbar^2}{2} [F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)] \quad (6.39)$$

die Verschiebung der Energieniveaus für die **Hyperfeinaufspaltung**

$$\Delta E_{\text{HF}} = \frac{A}{2} [F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)] \quad (6.40)$$

# Copyright

Daten, Texte, Design und Grafiken dieses eBooks, sowie die eventuell angebotenen eBook-Zusatzdaten sind urheberrechtlich geschützt. Dieses eBook stellen wir lediglich als **persönliche Einzelplatz-Lizenz** zur Verfügung!

Jede andere Verwendung dieses eBooks oder zugehöriger Materialien und Informationen, einschließlich

- der Reproduktion,
- der Weitergabe,
- des Weitervertriebs,
- der Platzierung im Internet, in Intranets, in Extranets,
- der Veränderung,
- des Weiterverkaufs und
- der Veröffentlichung

bedarf der **schriftlichen Genehmigung** des Verlags. Insbesondere ist die Entfernung oder Änderung des vom Verlag vergebenen Passwort- und DRM-Schutzes ausdrücklich untersagt!

Bei Fragen zu diesem Thema wenden Sie sich bitte an: **info@pearson.de**

## Zusatzdaten

Möglicherweise liegt dem gedruckten Buch eine CD-ROM mit Zusatzdaten oder ein Zugangscode zu einer eLearning Plattform bei. Die Zurverfügungstellung dieser Daten auf unseren Websites ist eine freiwillige Leistung des Verlags. **Der Rechtsweg ist ausgeschlossen.** Zugangscodes können Sie darüberhinaus auf unserer Website käuflich erwerben.

## Hinweis

Dieses und viele weitere eBooks können Sie rund um die Uhr und legal auf unserer Website herunterladen:

**<https://www.pearson-studium.de>**