MEHR ERFAHREN

Abi

Mathemat

Gymnasium • Gesa e

Niedersachsen

ab 2024

Das musst du können!

STARK

Inhalt

Geometrie

Stochastik

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im **Mathematik-Abitur** benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik und begleitet Sie optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch eine Glühbirne gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** schrittweise beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.
- Steht im Inhalts- und Stichwortverzeichnis sowie im restlichen Buch ein (eA) hinter einem Thema, dann ist der zugehörige Inhalt **nur für das eA** wichtig. Alle anderen Themen sind für beide Anforderungsniveaus, also **gA und eA**, prüfungsrelevant.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

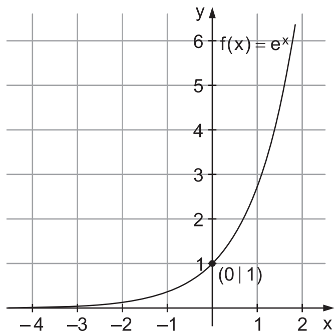
Hartmut Müller-Sommer

Die offiziellen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre mit vollständigen Lösungen finden Sie in den folgenden Bänden:
- Abiturprüfung Niedersachsen, Mathematik eA
- Abiturprüfung Niedersachsen, Mathematik gA

2 Weitere Funktionen

2.1 Natürliche Exponentialfunktion

- Die natürliche Exponentialfunktion hat die Funktionsgleichung $f(x) = e^x$.
- Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
  Wertemenge:
  $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+ \quad (e^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R})$
- Die e-Funktion hat keine Nullstellen.
- Wichtige Grenzwerte:
  $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$
  $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$



Bemerkung: 0^+ bedeutet, dass sich die Werte der Null nähern und positiv sind.

1. Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion f mit $f(x) = (x+1) \cdot e^x;\ x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x+1) \cdot e^x = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x+1 = 0 \qquad \text{da } e^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\quad & x = -1 \end{aligned}$$

2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
   Berechnen Sie den Funktionswert an der Stelle ln(2) und bestimmen Sie das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs.

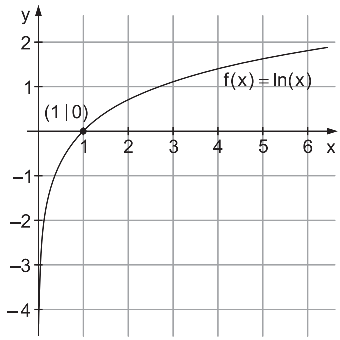
$$f(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)}}{e^{\ln(2)}+1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} = „\frac{1}{1+0^+}“ = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = „\frac{0^+}{0^++1}“ = 0^+$$

2.2 Natürliche Logarithmusfunktion

- Die natürliche Logarithmusfunktion hat die Funktionsgleichung $f(x) = \ln(x)$.
- Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$
  Wertemenge: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$
- Die ln-Funktion hat eine Nullstelle bei $x = 1$.
- Wichtige Grenzwerte:
  $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$
  $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$



Logarithmusgesetze

$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b), \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
$\ln(a^c) = c \cdot \ln(a)$
$a > 0, \ b > 0$

2.3 Exponentialgleichungen

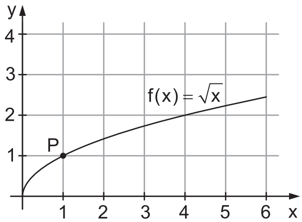
In einer Exponentialgleichung kommen Potenzen vor, bei denen die Variable im Exponenten steht. Zur Lösung einer solchen Gleichung werden der Logarithmus und die Logarithmengesetze gebraucht.

1.
$$\begin{aligned} 4^x &= 120 \\ \ln(4^x) &= \ln(120) \\ x \cdot \ln(4) &= \ln(120) \\ x &= \frac{\ln(120)}{\ln(4)} \approx 3{,}45 \end{aligned}$$

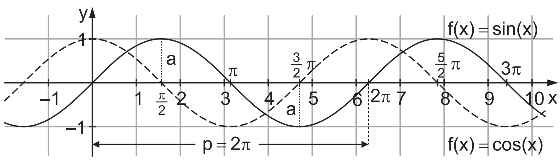
2.
$$\begin{aligned} 2e^{-3x} + 1 &= 5 \\ 2e^{-3x} &= 4 \\ e^{-3x} &= 2 \\ \ln(e^{-3x}) &= \ln(2) \\ -3x \cdot \ln(e) &= \ln(2) \\ -3x &= \ln(2) \\ x &= -\tfrac{1}{3}\ln(2) \\ x &\approx -0{,}23 \end{aligned}$$

2.4 Wurzelfunktion

- Die Wurzelfunktion hat die Funktionsgleichung $f(x)=\sqrt{x}$.
- Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}_0^+$
  Wertemenge: $\mathbb{W}_f=\mathbb{R}_0^+$
- Die Wurzelfunktion hat eine Nullstelle bei $x=0$.
- Der Graph der Wurzelfunktion verläuft im I. Quadranten und durch den Punkt $P(1\,|\,1)$.



2.5 Sinus- und Kosinusfunktion



- Die Sinus- und die Kosinusfunktion haben die Funktionsgleichungen $f(x)=\sin(x)$ und $f(x)=\cos(x)$.
- Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$
  Wertemenge: $\mathbb{W}_f=[-1;1]$
- Nullstellen:
  $\sin(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=k\cdot\pi;\quad k\in\mathbb{Z}\qquad(\ldots,-2\pi,-\pi,0,\pi,2\pi,\ldots)$
  $\cos(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi;\quad k\in\mathbb{Z}\qquad(\ldots,-\frac{3}{2}\pi,-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi,\ldots)$

Wegen $\cos(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ entsteht der Graph der Kosinusfunktion aus dem der Sinusfunktion durch Verschieben „nach links“ um $\frac{\pi}{2}$.

Die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion können verschoben und gestreckt oder gestaucht werden. Diese Vorgänge geben die Parameter a, b, c und d in den Funktionsgleichungen der **allgemeinen Sinus-** bzw. **Kosinusfunktion** an:

$f(x)=a\cdot\sin(b\cdot(x+c))+d$ bzw. $f(x)=a\cdot\cos(b\cdot(x+c))+d$

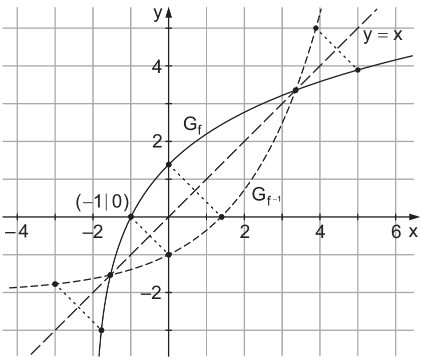
mit $a, b, c, d\in\mathbb{R}$ und $a, b\neq 0$

a: bestimmt die Amplitude ($\triangleq$ „maximaler Ausschlag nach oben bzw. unten um $|a|$")
b: bestimmt die Periode ($\triangleq$ „eine Schwingung"), $p = \left|\frac{2\pi}{b}\right|$
c: Verschiebung längs x-Achse (Phasenverschiebung)
d: Verschiebung längs y-Achse

2.6 Umkehrfunktion (eA)

Bedingung für Umkehrbarkeit
Eine Funktion f ist auf ihrem Definitionsbereich bzw. einem Teilintervall des Definitionsbereichs umkehrbar, wenn sie dort entweder nur streng monoton steigt oder nur streng monoton fällt.

Der Term der Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion f ergibt sich durch Vertauschen der x- und y-Werte, ihr Graph durch Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden $y = x$.



Vorgehensweise zur Bestimmung der Umkehrfunktion
Schritt 1: Funktionsterm $y = f(x)$ nach x auflösen

Schritt 2: x und y vertauschen

Schritt 3: Term der Umkehrfunktion f^{-1} mit Definitionsmenge angeben; es gilt: $\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{W}_f$ (und $\mathbb{W}_{f^{-1}} = \mathbb{D}_f$)

Bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion der Funktion $f(x) = \sqrt{x+2}$ mit $\mathbb{D}_f = [-2; \infty[$, $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$.

Schritt 1:

$y = \sqrt{x+2} \quad \Rightarrow \quad y^2 = x+2 \quad \Rightarrow \quad x = y^2 - 2$

Schritt 2:

$y = x^2 - 2$

Schritt 3:

$f^{-1}(x) = x^2 - 2$ mit $\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$ (und $\mathbb{W}_{f^{-1}} = \mathbb{D}_f = [-2; \infty[$)

3 Ableitung

3.1 Die Ableitung

Die Ableitung einer Funktion entspricht in jedem Punkt der Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion und wird deshalb als Grenzwert der Sekantensteigung bestimmt.

Der **Differenzenquotient** $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (mittlere Änderungsrate) gibt die Steigung einer Sekante durch den Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ und einen weiteren Punkt des Graphen der Funktion f an.
Der Grenzwert des Differenzenquotienten bei Annäherung der beiden Punkte heißt **Differenzialquotient** und gibt die Steigung der Tangente im Punkt P an den Graphen von f bzw. die Ableitung der Funktion an der Stelle x_0 an:

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (momentane Änderungsrate) bzw.

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Eine Funktion f heißt ableitbar bzw. **differenzierbar** an der Stelle x_0, wenn dieser Grenzwert existiert und nicht unendlich ist (siehe S. 28).

Ableitungen der Grundfunktionen

Es gilt die **Potenzregel**:

$f(x) = x^r$ mit $r \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

STARK