

Abitur **MEHR**
ERFAHREN

Mathematik

Gymnasium • Gesamthochschule
Niedersachsen
ab 2024

Das musst du können:

STARK

Inhalt

Vorwort

Analysis

1 Ganzrationale Funktion und ihre Eigenschaften	1
1.1 Definition	1
1.2 Grenzwertverhalten ganzrationaler Funktionen	2
1.3 Vielfachheit von Nullstellen	2
1.4 Symmetrie (bezüglich des Koordinatensystems)	3
1.5 Verschiebung und Streckung von Funktionsgraphen	4
2 Weitere Funktionen	7
2.1 Natürliche Exponentialfunktion	7
2.2 Natürliche Logarithmusfunktion	8
2.3 Exponentialgleichungen	8
2.4 Wurzelfunktion	9
2.5 Sinus- und Kosinusfunktion	9
2.6 Umkehrfunktion (eA)	10
3 Ableitung	11
3.1 Die Ableitung	11
3.2 Ableitungsregeln	12
4 Elemente der Kurvendiskussion, Anwendungen der Ableitung	13
4.1 Monotonieverhalten, Extrem- und Sattelpunkte	13
4.2 Krümmungsverhalten, Wendepunkte	16
4.3 Gleichungen von Tangenten und Normalen	19
4.4 Extremwertaufgaben	20
5 Kurvenanpassung	23
5.1 Bestimmen von ganzrationalen Funktionen mithilfe linearer Gleichungssysteme	23
5.2 Trassierung (eA)	25
5.3 Stetigkeit und Differenzierbarkeit (eA)	26

6	Integralrechnung	29
6.1	Der Begriff des Integrals	29
6.2	Stammfunktion	30
6.3	Integrfunktion und Hauptsatz	32
6.4	Flächenberechnung	34
6.5	Volumenberechnung (eA)	36
7	Wachstumsmodelle und Differenzialgleichungen	37
7.1	Exponentielles Wachstum	37
7.2	Begrenztes Wachstum	38
7.3	Logistisches Wachstum (eA)	39

Geometrie

1	Punkte im Koordinatensystem	41
1.1	Punkte im Raum	41
1.2	Abstand von zwei Punkten	41
2	Vektoren	42
2.1	Rechnen mit Vektoren	42
2.2	Linearkombination	45
2.3	Lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren	45
2.4	Skalarprodukt	45
3	Geraden und Ebenen	47
3.1	Geraden im Raum	47
3.2	Lagebeziehungen zwischen Geraden	48
3.3	Parameterform der Ebenengleichung	49
3.4	Normalenform/Koordinatenform der Ebenengleichung (eA)	51
3.5	Umwandlung: Parameterform \leftrightarrow Normalenform/Koordinatenform (eA)	51
3.6	Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene (eA)	52
3.7	Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen (eA)	54
3.8	Schnittwinkel	55

4	Abstände zwischen geometrischen Objekten (eA)	56
4.1	Abstand zu einer Ebene	56
4.2	Abstand eines Punktes zu einer Geraden	57
4.3	Abstand zweier windschiefer Geraden	60


Stochastik

1	Grundlagen	61
1.1	Lage- und Streumaße in der beschreibenden Statistik	61
1.2	Zufallsexperiment, Ergebnisraum und Ereignisse	63
2	Wahrscheinlichkeitsberechnungen	65
2.1	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	65
2.2	Laplace-Experimente, Laplace-Wahrscheinlichkeit	65
2.3	Baumdiagramme und Vierfeldertafeln	67
2.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit	68
2.5	Stochastische Unabhängigkeit	69
2.6	Urnenmodelle und Bernoulli-Formel	71
3	Zufallsgrößen	72
3.1	Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung	72
3.2	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	74
3.3	Binomialverteilte Zufallsgrößen	76
4	Beurteilende Statistik	80
4.1	Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe	80
4.2	Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit	81
4.3	Wahl eines genügend großen Stichprobenumfangs	82
5	Normalverteilung (eA)	83
5.1	Annäherung der Binomialverteilung durch eine Normalverteilung	83
5.2	Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen	84
	Stichwortverzeichnis	87

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im **Mathematik-Abitur** benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik und begleitet Sie optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch eine Glühbirne  gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** schrittweise beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.
- Steht im Inhalts- und Stichwortverzeichnis sowie im restlichen Buch ein (eA) hinter einem Thema, dann ist der zugehörige Inhalt **nur für das eA** wichtig. Alle anderen Themen sind für beide Anforderungsniveaus, also **gA und eA**, prüfungsrelevant.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Hartmut Müller-Sommer

Die offiziellen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre mit vollständigen Lösungen finden Sie in den folgenden Bänden:

- Abiturprüfung Niedersachsen, Mathematik eA
- Abiturprüfung Niedersachsen, Mathematik gA

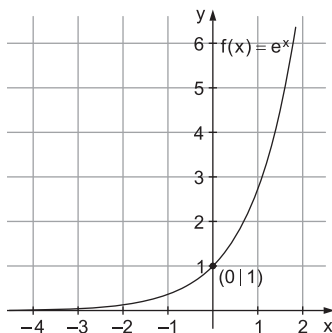
2 Weitere Funktionen

2.1 Natürliche Exponentialfunktion

- Die natürliche Exponentialfunktion hat die Funktionsgleichung $f(x) = e^x$.
- Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
Wertemenge:
 $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+ \quad (e^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R})$
- Die e-Funktion hat keine Nullstellen.
- Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$



Bemerkung: 0^+ bedeutet, dass sich die Werte der Null nähern und positiv sind.



- Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion f mit

$$f(x) = (x+1) \cdot e^x; x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1) \cdot e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 0 \quad \text{da } e^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

- Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Funktionswert an der Stelle $\ln(2)$ und bestimmen Sie das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs.

$$f(\ln(2)) = \frac{e^{\ln(2)}}{e^{\ln(2)} + 1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1+0^+} = 1$$

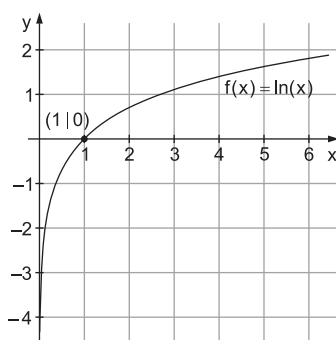
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{0^+}{0^+ + 1} = 0^+$$

2.2 Natürliche Logarithmusfunktion

- Die natürliche Logarithmusfunktion hat die Funktionsgleichung $f(x) = \ln(x)$.
- Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$
Wertemenge: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$
- Die \ln -Funktion hat eine Nullstelle bei $x = 1$.
- Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$



Logarithmusgesetze

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b), \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(a^c) = c \cdot \ln(a)$$

$$a > 0, \quad b > 0$$

2.3 Exponentialgleichungen

In einer Exponentialgleichung kommen Potenzen vor, bei denen die Variable im Exponenten steht. Zur Lösung einer solchen Gleichung werden der Logarithmus und die Logarithmengesetze gebraucht.



1. $4^x = 120$

$$\ln(4^x) = \ln(120)$$

$$x \cdot \ln(4) = \ln(120)$$

$$x = \frac{\ln(120)}{\ln(4)} \approx 3,45$$

2. $2e^{-3x} + 1 = 5$

$$2e^{-3x} = 4$$

$$e^{-3x} = 2$$

$$\ln(e^{-3x}) = \ln(2)$$

$$-3x \cdot \ln(e) = \ln(2)$$

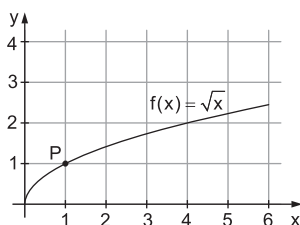
$$-3x = \ln(2)$$

$$x = -\frac{1}{3} \ln(2)$$

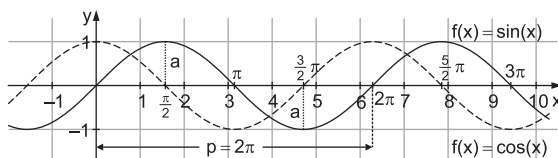
$$x \approx -0,23$$

2.4 Wurzelfunktion

- Die Wurzelfunktion hat die Funktionsgleichung $f(x) = \sqrt{x}$.
- Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$
Wertemenge: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$
- Die Wurzelfunktion hat eine Nullstelle bei $x=0$.
- Der Graph der Wurzelfunktion verläuft im I. Quadranten und durch den Punkt $P(1 | 1)$.



2.5 Sinus- und Kosinusfunktion



- Die Sinus- und die Kosinusfunktion haben die Funktionsgleichungen $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$.
- Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
Wertemenge: $\mathbb{W}_f = [-1; 1]$
- Nullstellen:
 $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k \cdot \pi; \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots)$
 $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\dots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots)$

Wegen $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ entsteht der Graph der Kosinusfunktion aus dem der Sinusfunktion durch Verschieben „nach links“ um $\frac{\pi}{2}$.

Die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion können verschoben und gestreckt oder gestaucht werden. Diese Vorgänge geben die Parameter a , b , c und d in den Funktionsgleichungen der **allgemeinen Sinus-** bzw. **Kosinusfunktion** an:

$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$ bzw. $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x + c)) + d$
mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a, b \neq 0$

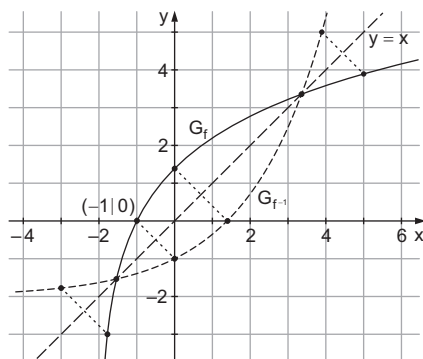
- a: bestimmt die Amplitude ($\hat{=}$ „maximaler Ausschlag nach oben bzw. unten um $|a|$ “)
- b: bestimmt die Periode ($\hat{=}$ „eine Schwingung“), $p = \left| \frac{2\pi}{b} \right|$
- c: Verschiebung längs x-Achse (Phasenverschiebung)
- d: Verschiebung längs y-Achse

2.6 Umkehrfunktion (eA)

Bedingung für Umkehrbarkeit

Eine Funktion f ist auf ihrem Definitionsbereich bzw. einem Teilintervall des Definitionsbereichs umkehrbar, wenn sie dort entweder nur streng monoton steigt oder nur streng monoton fällt.

Der Term der Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion f ergibt sich durch Vertauschen der x - und y -Werte, ihr Graph durch Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden $y = x$.



Vorgehensweise zur Bestimmung der Umkehrfunktion

Schritt 1: Funktionsterm $y = f(x)$ nach x auflösen

Schritt 2: x und y vertauschen

Schritt 3: Term der Umkehrfunktion f^{-1} mit Definitionsmenge angeben; es gilt: $\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{W}_f$ (und $\mathbb{W}_{f^{-1}} = \mathbb{D}_f$)



Bestimmen Sie einen Term der Umkehrfunktion der Funktion $f(x) = \sqrt{x+2}$ mit $\mathbb{D}_f = [-2; \infty[$, $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$.

Schritt 1:

$$y = \sqrt{x+2} \Rightarrow y^2 = x+2 \Rightarrow x = y^2 - 2$$

Schritt 2:

$$y = x^2 - 2$$

Schritt 3:

$$f^{-1}(x) = x^2 - 2 \quad \text{mit} \quad \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+ \quad (\text{und} \quad \mathbb{W}_{f^{-1}} = \mathbb{D}_f = [-2; \infty[)$$

3 Ableitung

3.1 Die Ableitung

Die Ableitung einer Funktion entspricht in jedem Punkt der Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion und wird deshalb als Grenzwert der Sekantensteigung bestimmt.

Der **Differenzenquotient** $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (mittlere Änderungsrate) gibt die Steigung einer Sekante durch den Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ und einen weiteren Punkt des Graphen der Funktion f an.

Der Grenzwert des Differenzenquotienten bei Annäherung der beiden Punkte heißt **Differenzialquotient** und gibt die Steigung der Tangente im Punkt P an den Graphen von f bzw. die Ableitung der Funktion an der Stelle x_0 an:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (\text{momentane Änderungsrate}) \text{ bzw.}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Eine Funktion f heißt ableitbar bzw. **differenzierbar** an der Stelle x_0 , wenn dieser Grenzwert existiert und nicht unendlich ist (siehe S. 28).

Ableitungen der Grundfunktionen

Es gilt die **Potenzregel**:

$$f(x) = x^r \quad \text{mit} \quad r \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$$



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK