Abi

MEHR ERFAHREN

Mathematik

Berufliches Gymnasi

Baden-Württemberg

Das musst du können.

STARK

Inhalt

Stochastik

Lineare Algebra

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur an den beruflichen Gymnasien benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Stochastik und Lineare Algebra und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet es sich besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen die Lerninhalte.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch das Symbol gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** Schritt für Schritt beschrieben.
- Abschnitte mit Inhalten, die nur für das erhöhte Anforderungsniveau relevant sind, sind durch das Symbol **eAN** gekennzeichnet. Alle anderen Themen sind für Mathematik auf grundlegendem und erhöhtem Anforderungsniveau **(gAN und eAN)** prüfungsrelevant.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

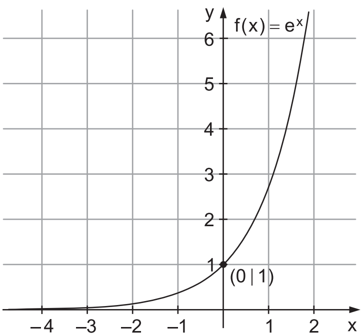
STARK Verlag

Offizielle Prüfungsaufgaben für die schriftliche Prüfung auf erhöhtem Anforderungsniveau mit hilfreichen Tipps und vollständigen Lösungen enthält das Buch „Mathematik eAN – Abitur Berufliches Gymnasium BW – Prüfungsvorbereitung“.

1.4 Natürliche Exponentialfunktion

- Die natürliche Exponentialfunktion lautet $f(x) = e^x$; $x \in \mathbb{R}$.
- Es gilt: $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ $\quad (W_f = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\})$
- Die e-Funktion hat keine Nullstellen.
- Wichtige Grenzwerte:

  $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ ($y = 0$ ist waagrechte Asymptote) $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$



Bei der Untersuchung von Exponentialfunktionen (Bestimmung von Nullstellen etc.) müssen oft Exponentialgleichungen gelöst werden; dabei spielt die Umkehrung der e-Funktion (der natürliche Logarithmus $\ln x$) eine wichtige Rolle, vgl. Kapitel „Gleichungen“, Abschnitt 1.2.

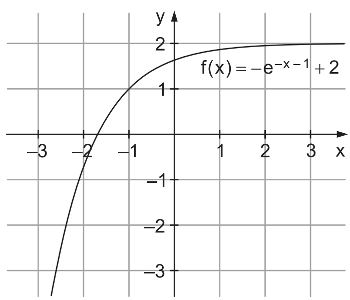
1. Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion $f(x) = (x+1) \cdot e^x$; $x \in \mathbb{R}$.

   $$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+1) \cdot e^x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x + 1 = 0 \qquad \text{da } e^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad x = -1 \end{aligned}$$

2. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = -e^{-x-1} + 2$; $x \in \mathbb{R}$.

   Ausgehend vom Graphen oben (vgl. Abschnitt 1.5):
   - Verschiebung um +1 in x-Richtung (nach rechts)
   - Spiegelung an der y-Achse
   - Spiegelung an der x-Achse
   - Verschiebung um +2 in y-Richtung (nach oben)
   - Waagrechte Asymptote $y = 2$

     $\lim\limits_{x \to +\infty} (-e^{-x-1} + 2) = 2$



2 Zufallsgrößen

2.1 Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **Zufallsgröße** ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zu.
Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** einer Zufallsgröße X gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die Zufallsgröße die möglichen Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ annimmt; in Tabellenform:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Dabei muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten stets 1 ergeben:
$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ (Normierungsbedingung)
Die Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung kann durch ein Histogramm erfolgen.

Vorgehensweise
Schritt 1: Werte, die die Zufallsgröße X annehmen kann, auflisten

Schritt 2: Zugehörige Wahrscheinlichkeiten berechnen

Schritt 3: Tabelle und ggf. Histogramm erstellen

Bei einem gezinkten Würfel wird die Augenzahl 6 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 geworfen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X, die die Anzahl der Sechsen beim zweimaligen Werfen dieses Würfels angibt.

Schritt 1:
Die Zufallsgröße X kann folgende Werte annehmen:
$x_1 = 0;\quad x_2 = 1;\quad x_3 = 2$ (keine, eine oder zwei Sechsen bei 2 Würfen)

Schritt 2:
Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Werte von X können mithilfe der Bernoulli-Formel (siehe vorherige Seite) ermittelt werden:

$$P(X = x_1) = P(X = 0) = P(\text{„keine 6“}) = \binom{2}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}7^2 = 0{,}49$$

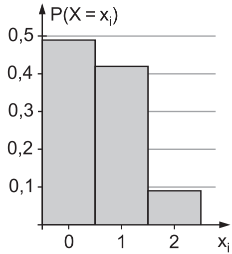
$$P(X = 1) = \binom{2}{1} \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^1 = 0{,}42 \qquad P(X = 2) = \binom{2}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^0 = 0{,}09$$

Schritt 3:

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,49	0,42	0,09

Histogramm:



2.2 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X gibt an, welcher Mittelwert bei oftmaliger Wiederholung des Zufallsexperiments zu erwarten ist.

$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n) = x_1 \cdot p_1 + \ldots + x_n \cdot p_n$

Varianz und Standardabweichung

Die Varianz und die Standardabweichung einer Zufallsgröße X erfassen die Streuung der Werte um den Erwartungswert von X.

$Var(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot p_1 + \ldots + (x_n - E(X))^2 \cdot p_n$

$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

Bemerkungen:

- Der Erwartungswert E(X) einer Zufallsgröße X ist häufig kein Wert, den die Zufallsgröße tatsächlich annimmt.
- Ein Spiel ist **fair**, wenn der Erwartungswert des Gewinns für jeden Spieler gleich null ist.

Ein Englischlehrer stellt für die Notenverteilung der nächsten Schulaufgabe zwei mögliche Szenarien gegenüber.

Szenario A

Note x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	0,1	0,15	0,5	0,2	0	0,05

3 Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten

3.1 Lage zweier Geraden

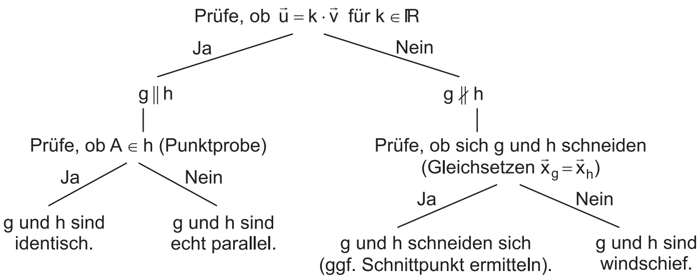
Für die gegenseitige Lage zweier Geraden

$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{u};\ r \in \mathbb{R}$ und $h\colon \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \vec{v};\ s \in \mathbb{R}$

gibt es vier verschiedene Möglichkeiten:

- g und h schneiden sich in einem Punkt.
- g und h verlaufen (echt) parallel.
- g und h sind identisch.
- g und h verlaufen windschief zueinander.

Schema zur rechnerischen Untersuchung dieser Lagebeziehungen:



Untersuchen Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$$

und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt S.

Schritt 1: Prüfen, ob die beiden Geraden parallel sind, also ob $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ für ein $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{cases} 1 = 3k & \Rightarrow\quad k = \frac{1}{3} \\ -2 = 4k & \Rightarrow\quad k = -\frac{1}{2} \\ 1 = -k & \Rightarrow\quad k = -1 \end{cases}\right\} \text{Widerspruch}$$

$\Rightarrow\quad g \nparallel h$ (g und h sind nicht parallel.)

Schritt 2: Prüfen, ob g und h einen Schnittpunkt besitzen (allgemeine Ortsvektoren der Geraden gleichsetzen und das resultierende lineare Gleichungssystem auf Lösbarkeit untersuchen)

$$\vec{x}_g = \vec{x}_h \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \text{I} & 2 + r = -8 + 3s & \Rightarrow \quad r = -10 + 3s \quad (*) \\ \text{II} & 1 - 2r = 1 + 4s & \\ \text{III} & 5 + r = 3 - s & \end{array} \right.$$

(∗) in III: $\quad 5 - 10 + 3s = 3 - s \quad \Rightarrow \quad 4s = 8 \quad \Rightarrow \quad s = 2$

$s = 2$ in (∗): $\quad r = -10 + 6 = -4$

Beides in II: $\quad 1 - 2 \cdot (-4) = 1 + 4 \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad 9 = 9$ wahre Aussage

$\Rightarrow$ g und h schneiden sich.

Schritt 3: Berechnen der Koordinaten des Schnittpunktes S

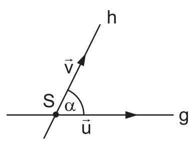
Einsetzen von $r = -4$ in die Gleichung von g (oder $s = 2$ in h):

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(-2 \,|\, 9 \,|\, 1)$$

Schnittwinkel zwischen zwei Geraden

Der Schnittwinkel α zweier sich schneidender Geraden entspricht dem spitzen Winkel zwischen ihren Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \qquad (0° \leq \alpha \leq 90°)$$



3.2 Lage einer Geraden zu einer Ebene eAN

Für die gegenseitige Lage einer Geraden $g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{u};\ r \in \mathbb{R}$ und einer Ebene $E\colon n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = a$ gibt es drei verschiedene Möglichkeiten:

- g und E schneiden sich in einem Punkt.
- g und E verlaufen (echt) parallel.
- g liegt (vollständig) in der Ebene E.