

Abitur **MEHR ERFAHREN**

Mathematik

Berufliches Gymnasium
Baden-Württemberg

Das musst du können.

STARK

Inhalt

Gleichungen und Gleichungssysteme

1 Gleichungen	1
1.1 Quadratische Gleichungen	1
1.2 Exponentialgleichungen	1
1.3 Nullprodukt und Substitution	2
2 Lineare Gleichungssysteme	3

Analysis

1 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften	5
1.1 Potenzfunktionen	5
1.2 Ganzrationale Funktionen	6
1.3 Sinus- und Kosinusfunktion (trigonometrische Funktionen)	7
1.4 Natürliche Exponentialfunktion	8
1.5 Wirkung von Parametern	10
1.6 Vielfachheit von Nullstellen	12
1.7 Symmetrie (bzgl. des Koordinatensystems)	13
1.8 Umkehrfunktion eAN	14
2 Ableitung	15
2.1 Bedeutung der Ableitung	15
2.2 Ableitungen der Grundfunktionen	15
2.3 Ableitungsregeln	16
2.4 Tangentengleichung	17
3 Untersuchung von Funktionen, Anwendungen der Ableitung	18
3.1 Monotonieverhalten, Extrempunkte	18
3.2 Krümmungsverhalten, Wendepunkte	21
3.3 Extremwertaufgaben	24

4	Integralrechnung	26
4.1	Stammfunktion	26
4.2	Bestimmtes Integral und Flächenberechnung	28
4.3	Rekonstruierter Bestand	31
4.4	Volumen von Rotationskörpern eAN	33
4.5	Integralfunktion eAN	33

Stochastik

1	Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeiten	35
1.1	Ereignisse	35
1.2	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	36
1.3	Laplace-Experimente, Laplace-Wahrscheinlichkeit	37
1.4	Baumdiagramme und Vierfeldertafeln	37
1.5	Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit	39
1.6	Urnenmodelle und Bernoulli-Formel	41
2	Zufallsgrößen	43
2.1	Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung	43
2.2	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	44
3	Binomialverteilung	46
3.1	Bernoulli-Experiment, binomialverteilte Zufallsgrößen	46
3.2	Erwartungswert und Standardabweichung	48
4	Normalverteilung eAN	49
4.1	Normalverteilte Zufallsgrößen	49
4.2	Erwartungswert und Standardabweichung	51
5	Sigma-Regeln, Prognoseintervalle eAN	52
6	Schätzen unbekannter Wahrscheinlichkeiten, Konfidenzintervalle eAN	53


Lineare Algebra

1	Vektoren	55
1.1	Grundlagen	55
1.2	Skalarprodukt	57
1.3	Vektorprodukt eAN	58
2	Geraden und Ebenen	59
2.1	Geraden	59
2.2	Ebenen in Parameterform	61
2.3	Ebenen in Koordinatenform eAN	63
2.4	Umwandlung: Parameterform in Koordinatenform eAN	65
3	Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten	66
3.1	Lage zweier Geraden	66
3.2	Lage einer Geraden zu einer Ebene eAN	67
3.3	Lage zweier Ebenen eAN	68
4	Abstände zwischen geometrischen Objekten	70
4.1	Abstand eines Punktes zu einer Geraden	70
4.2	Abstand zu einer Ebene eAN	72
4.3	Spiegelung eines Punktes an einer Ebene eAN	73
5	Matrizen eAN	74
5.1	Grundlagen	74
5.2	Rechnen mit Matrizen	74
5.3	Inverse Matrix, Lösen von Matrixgleichungen	76
	Stichwortverzeichnis	77

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur an den beruflichen Gymnasien benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Stochastik und Lineare Algebra und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet es sich besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen die Lerninhalte.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch das Symbol  gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** Schritt für Schritt beschrieben.
- Abschnitte mit Inhalten, die nur für das erhöhte Anforderungsniveau relevant sind, sind durch das Symbol **eAN** gekennzeichnet. Alle anderen Themen sind für Mathematik auf grundlegendem und erhöhtem Anforderungsniveau (**gAN und eAN**) prüfungsrelevant.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

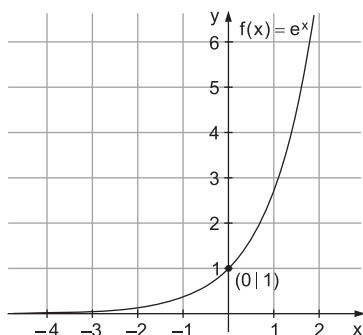
STARK Verlag

Offizielle Prüfungsaufgaben für die schriftliche Prüfung auf erhöhtem Anforderungsniveau mit hilfreichen Tipps und vollständigen Lösungen enthält das Buch „Mathematik eAN – Abitur Berufliches Gymnasium BW – Prüfungsvorbereitung“.

1.4 Natürliche Exponentialfunktion

- Die natürliche Exponentialfunktion lautet $f(x) = e^x$; $x \in \mathbb{R}$.
- Es gilt: $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$)
- Die e-Funktion hat keine Nullstellen.
- Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad (y=0 \text{ ist waagrechte Asymptote}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$



Bei der Untersuchung von Exponentialfunktionen (Bestimmung von Nullstellen etc.) müssen oft Exponentialgleichungen gelöst werden; dabei spielt die Umkehrung der e-Funktion (der natürliche Logarithmus $\ln x$) eine wichtige Rolle, vgl. Kapitel „Gleichungen“, Abschnitt 1.2.



1. Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion $f(x) = (x+1) \cdot e^x$; $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1) \cdot e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 0 \quad \text{da } e^x > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

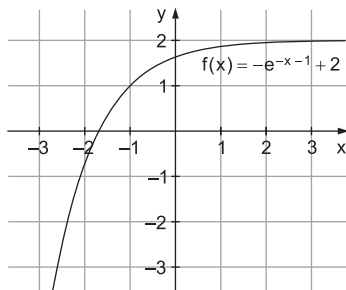
$$\Leftrightarrow x = -1$$

2. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = -e^{-x-1} + 2$; $x \in \mathbb{R}$.

Ausgehend vom Graphen oben (vgl. Abschnitt 1.5):

- Verschiebung um +1 in x-Richtung (nach rechts)
- Spiegelung an der y-Achse
- Spiegelung an der x-Achse
- Verschiebung um +2 in y-Richtung (nach oben)
- Waagrechte Asymptote $y = 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x-1} + 2) = 2$$



2 Zufallsgrößen

2.1 Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **Zufallsgröße** ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zu.

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** einer Zufallsgröße X gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n die Zufallsgröße die möglichen Werte x_1, x_2, \dots, x_n annimmt; in Tabellenform:

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	\dots	p_n

Dabei muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten stets 1 ergeben:
 $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ (Normierungsbedingung)

Die Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung kann durch ein Histogramm erfolgen.

Vorgehensweise

Schritt 1: Werte, die die Zufallsgröße X annehmen kann, auflisten

Schritt 2: Zugehörige Wahrscheinlichkeiten berechnen

Schritt 3: Tabelle und ggf. Histogramm erstellen



Bei einem gezinkten Würfel wird die Augenzahl 6 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 geworfen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X , die die Anzahl der Sechsen beim zweimaligen Werfen dieses Würfels angibt.

Schritt 1:

Die Zufallsgröße X kann folgende Werte annehmen:

$x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$ (keine, eine oder zwei Sechsen bei 2 Würfeln)

Schritt 2:

Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Werte von X können mithilfe der Bernoulli-Formel (siehe vorherige Seite) ermittelt werden:

$$P(X = x_1) = P(X = 0) = P(\text{„keine 6“}) = \binom{2}{0} \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^2 = 0,7^2 = 0,49$$

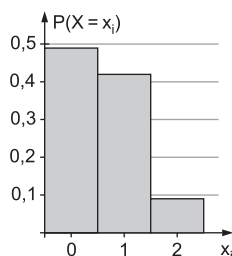
$$P(X = 1) = \binom{2}{1} \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^1 = 0,42 \quad P(X = 2) = \binom{2}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^0 = 0,09$$

Schritt 3:

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,49	0,42	0,09

Histogramm:



2.2 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X gibt an, welcher Mittelwert bei oftmaliger Wiederholung des Zufallsexperiments zu erwarten ist.

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n) = x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n$$

Varianz und Standardabweichung

Die Varianz und die Standardabweichung einer Zufallsgröße X erfassen die Streuung der Werte um den Erwartungswert von X.

$$\text{Var}(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot p_1 + \dots + (x_n - E(X))^2 \cdot p_n$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Bemerkungen:

- Der Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsgröße X ist häufig kein Wert, den die Zufallsgröße tatsächlich annimmt.
- Ein Spiel ist **fair**, wenn der Erwartungswert des Gewinns für jeden Spieler gleich null ist.



Ein Englischlehrer stellt für die Notenverteilung der nächsten Schulaufgabe zwei mögliche Szenarien gegenüber.

Szenario A

Note x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,1	0,15	0,5	0,2	0	0,05

3 Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten

3.1 Lage zweier Geraden

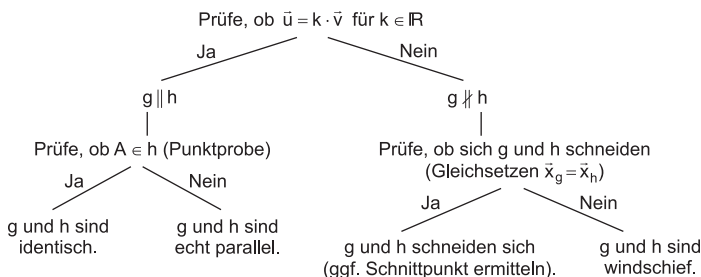
Für die gegenseitige Lage zweier Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{u}; \quad r \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \vec{OB} + s \cdot \vec{v}; \quad s \in \mathbb{R}$$

gibt es vier verschiedene Möglichkeiten:

- g und h schneiden sich in einem Punkt.
- g und h verlaufen (echt) parallel.
- g und h sind identisch.
- g und h verlaufen windschief zueinander.

Schema zur rechnerischen Untersuchung dieser Lagebeziehungen:



Untersuchen Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R}$$

und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt S.

Schritt 1: Prüfen, ob die beiden Geraden parallel sind, also ob $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ für ein $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = 3k \Rightarrow k = \frac{1}{3} \\ -2 = 4k \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \\ 1 = -k \Rightarrow k = -1 \end{array} \right\} \text{ Widerspruch}$$

$\Rightarrow g \nparallel h$ (g und h sind nicht parallel.)

Schritt 2: Prüfen, ob g und h einen Schnittpunkt besitzen (allgemeine Ortsvektoren der Geraden gleichsetzen und das resultierende lineare Gleichungssystem auf Lösbarkeit untersuchen)

$$\begin{aligned}\vec{x}_g = \vec{x}_h &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \text{I} & 2+r = -8+3s \\ \text{II} & 1-2r = 1+4s \\ \text{III} & 5+r = 3-s \end{cases}\end{aligned}$$

$$(*) \text{ in III: } 5-10+3s = 3-s \Rightarrow 4s = 8 \Rightarrow s = 2$$

$$s = 2 \text{ in } (*): r = -10+6 = -4$$

$$\text{Beides in II: } 1-2 \cdot (-4) = 1+4 \cdot 2 \Leftrightarrow 9=9 \text{ wahre Aussage}$$

\Rightarrow g und h schneiden sich.

Schritt 3: Berechnen der Koordinaten des Schnittpunktes S

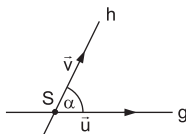
Einsetzen von $r=-4$ in die Gleichung von g (oder $s=2$ in h):

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S(-2|9|1)$$

Schnittwinkel zwischen zwei Geraden

Der Schnittwinkel α zweier sich schneidender Geraden entspricht dem spitzen Winkel zwischen ihren Richtungsvektoren \vec{u} und \vec{v} :

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$$



3.2 Lage einer Geraden zu einer Ebene eAN

Für die gegenseitige Lage einer Geraden g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{u}$; $r \in \mathbb{R}$ und einer Ebene E: $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = a$ gibt es drei verschiedene Möglichkeiten:

- g und E schneiden sich in einem Punkt.
- g und E verlaufen (echt) parallel.
- g liegt (vollständig) in der Ebene E.



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK