2026

STARK Prüfun[gen]

MEHR ERFAHREN

Abitur

Niedersachsen

Mathematik gA

- ✓ Original-Prüfungsaufgaben mit Lösungen
- ✓ Übungsaufgaben
- ✓ Lernvideos zur GTR/CAS-Nutzung

PDF

Inhaltsverzeichnis

Stochastik

Analytische Geometrie

Original-Abituraufgaben

Es liegen alle Aufgaben für CAS und für GTR vollständig vor. Wenn eine Aufgabe für beide Rechnerarten gleich ist, wurde die Lösung für die erstgenannte ausgearbeitet. Bei Unterschieden in der Aufgabenstellung finden Sie die Variante für die eine Rechnertechnologie im Buch und die andere bei MySTARK.

Abiturprüfung 2022

Abiturprüfung 2023

Abiturprüfung 2024

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2025 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MySTARK heruntergeladen werden (Zugangscode vorne im Buch).

Bei **MySTARK** finden Sie:
- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs, inklusive **Glossar** zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen, teilweise mit Veranschaulichung durch **Videos**
- **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
- **Jahrgang 2025**, sobald dieser zum Download bereit steht
- alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2022 bis 2025** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Den Zugangscode zu MySTARK finden Sie vorne im Buch.

Kostenlose **Webinare** zur Prüfungsvorbereitung finden Sie ab Mitte März 2026 unter:
www.stark-verlag.de

Autoren
Volker Honkomp (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2023 bis 2025)
Josef Rolfs (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben)
Hartmut Müller-Sommer (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgabe 2022)

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

mit diesem Buch geben wir Ihnen eine optimale Hilfestellung zur Vorbereitung auf die **Abiturprüfung 2026** im **Grundlegenden Anforderungsniveau** in **Niedersachsen**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches zahlreiche **Informationen zum Abitur**, deren Kenntnis für die gezielte Vorbereitung auf die Abiturklausur hilfreich und wichtig ist. Dazu gehören u. a. eine komplette, kommentierte Aufstellung der Operatoren für das Abitur, Hinweise zum genauen Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben. Sie finden dort darüber hinaus viele **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl in der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Der Band enthält **für das Grundlegende Anforderungsniveau** viele **Übungsaufgaben** zu den **Themen des Abiturs 2026**. Diese sind auf den Stil der Prüfungsaufgaben abgestimmt, d. h., in der Abiturprüfung werden auf Sie in Umfang, Form und Schwierigkeitsgrad vergleichbare Fragestellungen zukommen.
- Zusätzlich finden Sie in diesem Band die **Original-Abituraufgaben 2022 bis 2025**. Damit können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Zu sämtlichen Aufgaben im Buch wurden von uns **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem erhalten Sie zusätzliches Übungsmaterial **online bei MySTARK**:
  - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil
  - **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
  - **Jahrgang 2025**, sobald dieser zum Download bereit steht
  - **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2022 bis 2025**, die nicht im Buch abgedruckt sind

  Die Zugangscode zu MySTARK finden Sie vorne im Buch.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturvorbereitung und bei Ihrer Prüfung!

Hartmut Müller-Sommer Volker Honkomp Josef Rolfs

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

1 Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

1.1 Die zentrale schriftliche Prüfung

Die Abiturprüfung besteht aus zwei Teilen: dem **Prüfungsteil A**, der ohne elektronische Hilfsmittel und ohne Formelsammlung zu bearbeiten ist, und dem **Prüfungsteil B**, der mithilfe der unten angeführten Hilfsmittel bearbeitet werden kann.
Manche Aufgaben aus Prüfungsteil A und Prüfungsteil B werden länderübergreifend gestellt.

1.2 Aufbau der Prüfungsaufgaben

Im **Prüfungsteil A** müssen insgesamt **fünf Aufgaben** aus den drei Sachgebieten Analysis, Stochastik und Analytische Geometrie bearbeitet werden. Die Aufgaben werden in die Aufgabengruppe 1 und Aufgabengruppe 2 unterteilt. Die Aufgabengruppe 1 enthält Aufgaben aus den Anforderungsbereichen I und II. Die Aufgabengruppe 2 enthält Aufgaben aus den Anforderungsbereichen I und II, wobei mindestens eine Teilaufgabe auch den Anforderungsbereich III erreicht.
Den Schülerinnen und Schülern werden je eine Aufgabe aus der Analysis, eine aus der Stochastik und eine aus der Analytischen Geometrie vorgelegt, die alle drei bearbeitet werden müssen. Diese kommen alle aus der Aufgabengruppe 1.
Zusätzlich erhalten die Schülerinnen und Schüler zu jedem der drei Sachgebiete jeweils eine weitere Aufgabe der Aufgabengruppe 1 und eine der Aufgabengruppe 2. Aus jeder der beiden Aufgabengruppen muss von den drei Aufgaben eine beliebige bearbeitet werden.
Ein Prüfling könnte aus der Aufgabengruppe 1 beispielsweise die Analysisaufgabe und aus der Aufgabengruppe 2 die Aufgabe zur Analytischen Geometrie bearbeiten. Insgesamt hat er dann fünf Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet.
Die Aufgaben des Prüfungsteils A sind mit jeweils 5 Bewertungseinheiten gleichgewichtet. Hier können insgesamt **25 Bewertungseinheiten** erreicht werden.

Im **Prüfungsteil B** werden den Schülerinnen und Schülern je zwei Aufgaben aus der Analysis, aus der Stochastik und aus der Analytischen Geometrie vorgelegt. Sie müssen aus jedem der drei Bereiche jeweils eine Aufgabe auswählen und bearbeiten.
In der Analysisaufgabe können 25 Bewertungseinheiten erreicht werden, in der Stochastik und der Analytischen Geometrie jeweils 15. Die Aufgaben des Wahlteils ergeben insgesamt **55 Bewertungseinheiten**.

1.3 Dauer der Prüfung

Die Arbeitszeit beträgt **285 Minuten**. Zu Beginn der Prüfung werden die Aufgaben des Prüfungsteils A und alle Aufgaben des Prüfungsteils B ausgeteilt. Die Schülerinnen und Schüler entscheiden selbst, wann sie den Prüfungsteil A abgeben. Dies muss spätestens nach 100 Minuten erfolgen. Anschließend erhalten sie die zugelassenen Hilfsmittel.

1.4 Verwendung von Hilfsmitteln im Wahlteil

Von den lokalen Fachkonferenzen wird zu Beginn der Einführungsphase festgesetzt, welche der beiden Technologiekategorien in den jeweiligen Prüfungsgruppen verwendet werden. Diese Entscheidung legt eine Aufgabenklasse für die Prüfungsgruppe fest und kann nicht mehr verändert werden. Zur Auswahl stehen:

- grafikfähiger Taschenrechner ohne CAS (GTR)
- computeralgebrafähiger Taschencomputer, Computeralgebrasystem auf einem Tablet, PC oder Notebook (CAS)

Alle Prüflinge einer Prüfungsgruppe verwenden dasselbe Rechnermodell mit demselben Betriebssystem.
In der Abiturprüfung sollen die Schülerinnen und Schüler die **Rechnertechnologie** einsetzen und den sinnvollen Gebrauch dieser Technologie nachweisen. Dabei gilt:

- Alle Taschenrechner sind mittels eines Hard- bzw. Software-Resets vor der Prüfung in einen vergleichbaren Zustand zu versetzen. Eigene Programme und Dateien sind auf dem Rechner nicht zulässig.
- Bei den Computeralgebrasystemen sind keine Ergänzungsprogrammpakete erlaubt; auf PCs sind neben einem CAS die Standard-Officeprogramme, aber keine weiteren mathematischen Programme oder weitere Dateien zulässig.

Weiter sind zur Abiturprüfung das auf den Seiten des IQB veröffentlichte „Dokument mit mathematischen Formeln“ und **Handbücher** der Rechner zugelassen.

2 Die Inhalte in der Einführungs- und Qualifikationsphase

Grundlage für die schriftliche Abiturprüfung sind die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (BS, 2012) und das Kerncurriculum Mathematik (KC, 2018). Außerdem werden wie jedes Jahr durch die „Hinweise zur schriftlichen Abiturprüfung 2026“ weitere Angaben gemacht.

Im Folgenden werden die verbindlichen Inhalte für die Einführungs- und Qualifikationsphase aufgeführt, da diese für das Abitur relevant sind. Wir beschränken uns hier auf die inhaltsbezogenen Kompetenzen, denn diese sind fachbezogen und legen fest, über welches Wissen Sie im jeweiligen Inhaltsbereich verfügen sollen.

2.1 Analysis

Einführungs-phase	**Elementare Funktionenlehre** – Funktionsbegriff – Potenzfunktionen – Sinus- und Kosinusfunktion – Exponentialfunktionen – $g(x) = a \cdot f \cdot (b \cdot (x - c)) + d$ mit Auswirkungen auf den Graphen – Parametervariationen – ganzrationale Funktionen – Nullstellen (Linearfaktorzerlegung) – Grenzwerte, Symmetrien, asymptotisches Verhalten **Ableitungen** – mittlere Änderungsrate-Sekantensteigung-Sekante – lokale Änderungsrate-Tangentensteigung-Tangente – Ableitung als Grenzwert der Sekantensteigungen – Ableitungsfunktion – Tangenten- und Normalengleichung – Zusammenhang zwischen Funktionsgraph und Ableitungsgraph – Monotonie und Extrempunkte – Krümmung und Wendepunkte – Ableitungsfunktionen zu $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$ – Summen-, Faktor- und Potenzregel – notwendige und hinreichende Kriterien für Extrem- und Wendepunkte – Ableitung ganzrationaler Funktionen – Lösen von Sachproblemen mit Ableitungen – Lösen linearer Gleichungssysteme
Qualifikations-phase	**Differenzialrechnung** – Gauß-Algorithmus (mit GTR/CAS) – ganzrationale Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften bestimmen – Produktregel und Kettenregel – Parametervariation zur Anpassung an eine vorgegebene Eigenschaft **Integralrechnung** – Rekonstruktion aus Änderungsraten – Integral als Grenzwert von Produktsummen – Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Übungsaufgabe 3 (GTR/CAS)

Ziehen aus zwei Urnen

In zwei Urnen A und B befinden sich jeweils 5 Kugeln. In der Urne A befinden sich 3 weiße und 2 schwarze Kugeln. In der Urne B befinden sich 3 schwarze und 2 weiße Kugeln.

a) Ein Spieler zieht dreimal nacheinander aus der Urne A eine Kugel und legt diese nach dem Zug in die Urne A zurück.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einmal eine schwarze Kugel gezogen wird.

b) Der Spieler zieht nun aus der Urne A und aus der Urne B jeweils eine Kugel.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er 2 gleichfarbige Kugeln zieht.

Die gezogenen Kugeln werden zurück in die jeweiligen Urnen gelegt, sodass wieder die ursprünglichen Urnen betrachtet werden.

c) Aus beiden Urnen wird zufällig jeweils eine Kugel entnommen und in die jeweils andere Urne gelegt.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass sich die Anteile der schwarzen und weißen Kugeln in den jeweiligen Urnen nach diesem Vorgang verändert haben.

d) Alle Kugeln werden nun in eine gemeinsame Urne umgefüllt. Es befinden sich also 5 weiße und 5 schwarze Kugeln in der Urne. Es werden nun 3 Kugeln gleichzeitig herausgezogen.
Begründen Sie, dass der Term $\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}$ die Wahrscheinlichkeit dafür beschreibt, dass sich unter den 3 gezogenen Kugeln genau 2 schwarze Kugeln befinden.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis
(1) mithilfe des Rechners.
(2) ohne Einsatz des Rechners.

TIPP Lösungshinweise – Übungsaufgabe 3

Teilaufgabe a

Bestimmung der ersten Wahrscheinlichkeit

Beachten Sie, dass die gezogene Kugel nach jedem Zug in die Urne A zurückgelegt wird.

Die Zufallsgröße X: „Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln“ ist daher binomialverteilt mit der Stichprobengröße $n = 3$ und der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{5}$.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen „Erfolg“. Sie können hierfür die **binomcdf**-Funktion des Rechners nutzen oder mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses die Komplementärregel anwenden.

Teilaufgabe b

Bestimmung der zweiten Wahrscheinlichkeit

Mit einem geeigneten Baumdiagramm lässt sich das Zufallsexperiment veranschaulichen.

Beachten Sie, dass zum Ereignis „Der Spieler zieht aus den beiden Urnen gleichfarbige Kugeln“ zwei Pfade im Baumdiagramm gehören: Der Spieler kann 2 schwarze oder 2 weiße Kugeln ziehen.

Wenden Sie die Pfadregeln an und bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Teilaufgabe c

Bestimmung der dritten Wahrscheinlichkeit

Welche möglichen Ausgänge des beschriebenen Zufallsexperimentes führen zu veränderten Anteilen der schwarzen und weißen Kugeln in den Urnen?

Was lässt sich über die Anteile der schwarzen und weißen Kugeln in den Urnen aussagen, wenn der Spieler, wie in Teilaufgabe b, 2 gleichfarbige Kugeln zieht?

Argumentieren Sie mithilfe des Baumdiagramms aus Teilaufgabe b und bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Teilaufgabe d

Begründung für die angegebene Wahrscheinlichkeit

Beachten Sie, dass der Faktor $\binom{5}{2}$ im Zähler des Terms die Anzahl der Möglichkeiten angibt, von den 5 schwarzen Kugeln 2 Kugeln auszuwählen.

Deuten Sie das Produkt $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}$ im Zähler und den Nenner $\binom{10}{3}$.

Geben Sie eine abschließende Begründung für die beschriebene Wahrscheinlichkeit.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit
Berechnen Sie den Wert der angegebenen Wahrscheinlichkeit und nutzen Sie dabei den Rechnerbefehl **nCr(n, k)** für den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit auch ohne Einsatz des Rechners, indem Sie auf die Definition $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ des Binomialkoeffizienten zurückgreifen.

Lösungsvorschlag – Übungsaufgabe 3

a) Die Zufallsgröße X: „Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln“ ist binomialverteilt mit der Stichprobengröße $n = 3$ und der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{5}$.
Es gilt:

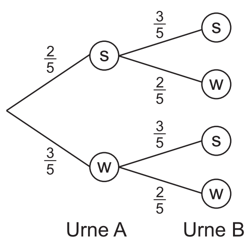
$$P(X \geq 1) = \sum_{k=1}^{3} \binom{3}{k} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{3-k}$$
$$= \text{binomcdf}\left(3, \frac{2}{5}, 1, 3\right)$$
$$= 0{,}784$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 78,4 % wird mindestens einmal eine schwarze Kugel gezogen.

Alternative:
Das Ergebnis erhält man auch mithilfe der Komplementärregel:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 78{,}4\ \%$$

b) Das Zufallsexperiment wird durch das nebenstehende Baumdiagramm veranschaulicht.



Zum Ereignis E_1: „Der Spieler zieht aus den beiden Urnen gleichfarbige Kugeln“ gehören zwei Pfade des Baumdiagramms: ss und ww

$$P(ss) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

$$P(ww) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

Daher gilt:

$$P(E_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$$

c) Damit sich nach dem Tauschen der Kugeln der Anteil schwarzer und weißer Kugeln in den jeweiligen Urnen verändert, muss aus der Urne A eine schwarze und aus der Urne B eine weiße Kugel oder umgekehrt aus der Urne A eine weiße und aus der Urne B eine schwarze Kugel gezogen werden.
Es handelt sich also um das Ereignis E_2: „Der Spieler zieht aus den beiden Urnen ungleichfarbige Kugeln“. Für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses gilt:

$$P(E_2) = P(sw) + P(ws) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{25}$$

Alternative:
E_2 ist das Gegenereignis zu E_1. Daher führt die Komplementärregel zum gleichen Ergebnis:

$$P(E_2) = 1 - P(E_1) = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}$$

d) Begründung für die angegebene Wahrscheinlichkeit:
Beim Ziehen aus der Urne gibt es $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten, von den 5 schwarzen Kugeln 2 Kugeln auszuwählen. Es gibt dann $\binom{5}{1}$ Möglichkeiten, von den 5 weißen Kugeln 1 Kugel auszuwählen.
Mit E_3 sei das Ereignis bezeichnet, dass sich unter den 3 gezogenen Kugeln genau 2 schwarze Kugeln und 1 weiße befinden. Nach der Produktregel gibt es dann $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}$ „günstige“ Fälle für das Ereignis E_3.
Insgesamt gibt es $\binom{10}{3}$ Möglichkeiten, aus einer Urne mit 10 Kugeln 3 Kugeln auszuwählen.
Daher stellt der Term $\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}$ die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_3 dar.

Berechnung der angegebenen Wahrscheinlichkeit:

(1) Mit dem Rechnerbefehl **nCr(n, k)** für den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ erhält man:

$$P(E_3) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{nCr(5,2) \cdot nCr(5,1)}{nCr(10,3)} \qquad \frac{5}{12}$$

(2) Mit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ erhält man für den Zähler:

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{1! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 5 = 50$$

Für den Nenner gilt:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$$

Insgesamt folgt:

$$P(E_3) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

Prüfungsteil B – Aufgabe 1 A (CAS)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit
$f(x) = \frac{3}{1000} \cdot x^4 - \frac{8}{100} \cdot x^3 + \frac{6}{10} \cdot x^2$.

Abbildung 1 zeigt den Graphen von f sowie den Punkt $P\left(0 \middle| -\frac{5}{8}\right)$.

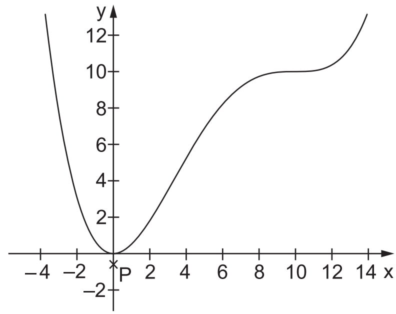


Abbildung 1

Punkte

a) Der Graph von f besitzt den Tiefpunkt $(0|0)$.
Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von f keine weiteren Extrempunkte besitzt. 4

Die Gerade durch die Punkte $P\left(0 \middle| -\frac{5}{8}\right)$ und $Q\left(-\frac{1}{4} \middle| -1\right)$ wird mit t bezeichnet.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung von t.
Weisen Sie rechnerisch nach, dass t die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(5|f(5))$ ist.
[Zur Kontrolle: Gleichung von t: $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}$] 5

c) Der Graph von f und die Tangente t schließen eine Fläche ein, die aus zwei Flächenstücken besteht.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. 6

d) Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g kann aus dem Graphen von f erzeugt werden. Der Punkt $(12|12)$ des Graphen von g wird dabei aus dem Punkt $(10|10)$ des Graphen von f erzeugt und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g(x) = a \cdot f(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$.
Geben Sie in diesem Zusammenhang die Bedeutung von a und b an und berechnen Sie die Werte von a und b. 4

Zwei Radfahrer starten gleichzeitig nebeneinander. Die Geschwindigkeit von Radfahrer F wird in den ersten 10 Sekunden (s) nach dem Start durch die Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{1000} \cdot x^4 - \frac{8}{100} \cdot x^3 + \frac{6}{10} \cdot x^2$ beschrieben. Die Geschwindigkeit von Radfahrer H wird in den ersten 12 Sekunden nach dem Start durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit

$h(x) = \frac{1}{576} \cdot x^4 - \frac{1}{18} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^2$

beschrieben.

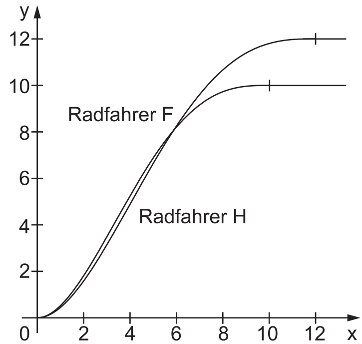


Abbildung 2

Dabei ist x die seit dem Start vergangene Zeit in Sekunden und f(x) bzw. h(x) die Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde $\left(\frac{m}{s}\right)$.

e) Berechnen Sie die Geschwindigkeit von Radfahrer F drei Sekunden nach dem Start sowie den Zeitpunkt, zu dem er eine Geschwindigkeit von $8\,\frac{m}{s}$ erreicht. 4

f) Nach den ersten 12 Sekunden fährt Radfahrer H mit konstanter Geschwindigkeit.
Geben Sie diese konstante Geschwindigkeit an.
Zeigen Sie durch Rechnung, dass der zum Radfahrer H gehörende Graph in der Abbildung 2 an der Stelle 12 eine waagerechte Tangente aufweist. 4

Nach dem Start gibt es genau einen Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeiten beider Radfahrer gleich groß sind. Im Modell wird dieser Zeitpunkt mit x_s bezeichnet.

g) Berechnen Sie x_s. 3

h) Es gibt genau einen Zeitpunkt in den ersten 10 Sekunden nach dem Start, zu dem einer der beiden Radfahrer den anderen überholt.
Berechnen Sie, um wieviel Prozent die Geschwindigkeit des schnelleren Radfahrers die Geschwindigkeit des langsameren Radfahrers zum Zeitpunkt des Überholens übersteigt. 5

35

TIPP Lösungshinweise zum Prüfungsteil B – Aufgabe 1 A (CAS)

Teilaufgabe a

Rechnerischer Nachweis, dass es nur einen Extrempunkt gibt

Verwenden Sie zunächst die notwendige Bedingung $f'(x)=0$ für Extrempunkte und ermitteln Sie die möglichen Extremstellen.

Untersuchen Sie diese Stellen z. B. mithilfe des Vorzeichenwechselkriteriums.

Beachten Sie, dass aus $f''(10)=0$ nicht gefolgert werden kann, dass dort der Graph von f kein Extrempunkt haben kann.

Teilaufgabe b

Ermittlung der Geradengleichung der Tangente t

Berechnen Sie die Steigung der Geraden mithilfe der Formel: $m=\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$

Beachten Sie, dass der Punkt P auf der y-Achse liegt, und ermitteln Sie daraus direkt den y-Achsenabschnitt der Geraden.

Nachweis, dass dies die Tangente im Punkt $(5\,|\,f(5))$ ist

Ermitteln Sie die Tangentensteigung $m_t = f'(5)$ der Tangente an der Stelle $x=5$.

Berechnen Sie die y-Koordinate des Punktes $(5\,|\,f(5))$ und den y-Achsenabschnitt der Tangente an der Stelle $x=5$.

Vergleichen Sie die Tangentengleichung mit der Funktionsgleichung der Funktion t.

Teilaufgabe c

Berechnung der eingeschlossenen Fläche

Berechnen Sie die Stellen x_1, x_2 und x_3 mit denen die beiden Graphen gemeinsame Punkte haben, indem Sie die Gleichung $f(x)=t(x)$ lösen.

Verwenden Sie hierzu die Lösefunktion des CAS.

Beachten Sie, dass t die Tangente des Graphen von f an der Stelle $x_2=5$ ist.

Der gesamte Flächeninhalt kann mithilfe des folgenden Integrals berechnet werden: $\int_{x_1}^{x_3} (t(x)-f(x))\,dx$

a) Rechnerischer Nachweis, dass es nur einen Extrempunkt gibt:

Für die Ableitungen der Funktion f ergibt sich:

$$f'(x) = \frac{3}{250}\cdot x^3 - \frac{6}{25}\cdot x^2 + \frac{6}{5}\cdot x \quad \text{und}$$

$$f''(x) = \frac{9}{250}\cdot x^2 - \frac{12}{25}\cdot x + \frac{6}{5}$$

$f(x):=\frac{3}{1000}\cdot x^4-\frac{8}{100}\cdot x^3+\frac{6}{10}\cdot x^2$	*Fertig*
$f\_(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Fertig*
$f\_(x)$	$\frac{3\cdot x^3}{250}-\frac{6\cdot x^2}{25}+\frac{6\cdot x}{5}$
$f\_\_(x):=\frac{d}{dx}(f\_(x))$	*Fertig*
$f\_\_(x)$	$\frac{9\cdot x^2}{250}-\frac{12\cdot x}{25}+\frac{6}{5}$
factor$(f_(x))$	$\frac{3\cdot x\cdot(x-10)^2}{250}$
factor$(f__(x))$	$\frac{3\cdot(x-10)\cdot(3\cdot x-10)}{250}$

Der Graph der Funktion f hat an der Stelle x einen Extrempunkt, wenn dort gilt:
$f'(x) = 0$
und zusätzlich der Graph von f' an dieser Stelle einen Vorzeichenwechsel besitzt.
Nach dem Faktorisieren des Funktionsterms von f'(x) ergibt sich:

$$f'(x) = \frac{3}{250}x^3 - \frac{6}{25}x^2 + \frac{6}{5}x$$
$$= \frac{3}{250}x\cdot(x-10)^2$$

Die Funktion f' hat an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 10$ jeweils eine Nullstelle. Nur an diesen Stellen kann der Graph von f einen Extrempunkt haben. An der Stelle $x_2 = 10$ befindet sich jedoch eine doppelte Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel. Daher hat der Graph von f dort keinen Extrempunkt. Nur im Punkt $(0\,|\,0)$ besitzt der Graph von f einen Tiefpunkt.

TIPP Aus der Beobachtung, dass $f''(10) = 0$ gilt, kann nicht direkt geschlossen werden, dass der Graph von f bei $x_2 = 10$ keinen Extrempunkt hat. Es ist aber möglich, mithilfe der Faktorisierung von

$$f''(x) = \frac{9}{250}\cdot x^2 - \frac{12}{25}\cdot x + \frac{6}{5} = \frac{3}{250}(x-10)\cdot(3x-10)$$

zu begründen, dass der Graph von f'' bei $x_2 = 10$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat. Damit hat der Graph von f bei $x_2 = 10$ einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente (Sattelpunkt) und keinen Extrempunkt.

b) Ermittlung der Geradengleichung der Tangente t:

Steigung der Geraden durch $P\left(0\,\middle|\,-\frac{5}{8}\right)$ und $Q\left(-\frac{1}{4}\,\middle|\,-1\right)$:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{5}{8}-(-1)}{0-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{3\cdot 4}{8\cdot 1} = \frac{3}{2}$$

Da die Gerade t die y-Achse im Punkt P schneidet, gilt:

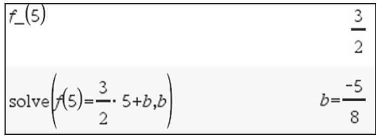
$t(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}$

Nachweis, dass dies die Tangente im Punkt $(5\,|\,f(5))$ ist:
Tangentensteigung von f an der Stelle $x = 5$:

$m_t = f'(5) = \frac{3}{2}$

y-Achsenabschnitt der Tangenten:
Aus dem Ansatz $f(5) = m_t \cdot 5 + b$ ergibt sich:

$b = -\frac{5}{8}$

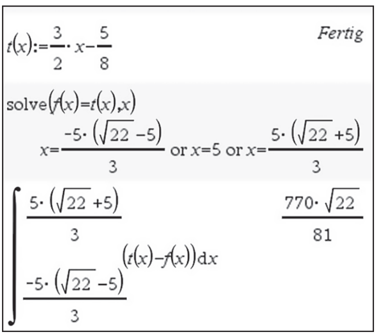


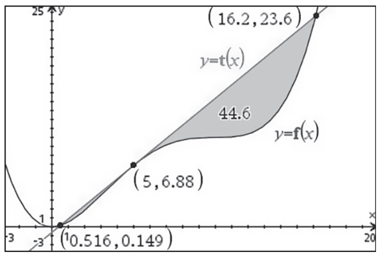
Für die Tangentengleichung von f im Punkt $(5\,|\,f(5))$ gilt also:

$y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}$

Diese stimmt mit der Tangentengleichung der Tangente t überein.

c) Berechnung der eingeschlossenen Fläche:
Aus dem Ansatz $f(x) = t(x)$ ergeben sich die Schnittstellen $x_1 = \frac{25 - 5\sqrt{22}}{3}$, $x_2 = 5$ und $x_3 = \frac{25 + 5\sqrt{22}}{3}$.





Da es sich bei der Gerade t um die Tangente im Punkt $(5\,|\,f(5))$ handelt und diese in dem Intervall $[x_1; x_3]$ nicht unterhalb des Graphen von f verläuft, ergibt sich für den Flächeninhalt:

$$\int_{\frac{25-5\sqrt{22}}{3}}^{\frac{25+5\sqrt{22}}{3}} (t(x) - f(x))\,dx = \frac{770\sqrt{22}}{81} \approx 44{,}6$$

Der Flächeninhalt beträgt also in etwa 44,6 FE.