

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung und Motivation	11
2	Mathematische Grundlagen	15
2.1	Grundlagen zur Numerik	15
2.1.1	Gleitkomma-Zahlensystem	15
2.1.2	Gleitkomma-Arithmetik	16
2.1.3	Fehlerursachen	17
2.1.4	Genauigkeit, Präzision und Rundungsfehler	18
2.1.5	Analyse von Fehlern	19
2.1.5.1	Vorwärts- und Rückwärtsanalyse	19
2.1.5.2	Kondition	20
2.1.5.3	Apriori Fehlerabschätzung durch Schranken	21
2.1.5.4	Intervallarithmetik, “running error analysis”	22
2.1.6	Stabilität von Algorithmen	22
2.2	Numerik mit Matrizen	24
2.2.1	Normen von Vektoren und Matrizen	24
2.2.2	Kondition von Matrizen	26
2.2.2.1	Skalierungen zur Verbesserung der Konditionzahl	27
2.2.2.2	Verwendung von Näherungen zur Verbesserung der Kondition	27
2.2.2.3	Fehlerabschätzung der Lösung	28
2.2.2.4	Berechnung und Abschätzung von Konditionszahlen	28
2.2.3	Störungsanalyse von linearen Gleichungssystemen	29
2.2.4	Orthogonalzerlegung von Matrizen	30
2.2.4.1	Standard Orthogonalzerlegungen	30
2.2.4.2	Berechnung von Orthogonalzerlegungen	32
2.2.4.3	Singulärwert-Zerlegung	33
2.2.5	Inversen und Pseudoinversen von Matrizen	33
2.2.6	Unterräume von Matrizen	34
2.2.7	Projektoren	36

3	Ausgleichungsrechnung	37
3.1	Das allgemeine lineare Modell (ALM)	37
3.2	Das lineare Standardmodell	38
3.3	Spezielle Probleme der Ausgleichungsrechnung	39
3.3.1	Kovarianzmatrizen und ihre Berücksichtigung im Modell	39
3.3.2	Restriktionen zwischen den deterministischen Parametern	40
3.3.2.1	Lösung über Normalgleichungen	42
3.3.2.2	Lösung über Gewichtung	42
3.3.2.3	Lösung über singuläre Varianzkovarianzmatrix	43
3.3.2.4	Weitere Lösungsverfahren für Modelle mit Restriktionen	43
3.3.3	Restriktionen zwischen den Beobachtungen	44
3.3.4	Stochastische Parameter	44
3.3.5	Singuläre Ausgleichungsprobleme	44
3.3.5.1	Singuläre Designmatrix	44
3.3.5.2	Singuläre Varianzkovarianzmatrix	45
3.3.6	Sensitivität der Kleinste-Quadrate-Lösung und numerische Probleme	47
3.3.6.1	Sensitivität des Ausgleichungsproblems	47
3.3.6.2	Lösung über Normalgleichungen	48
3.3.7	Anmerkung zur Lösung über Normalgleichungen	49
4	Ausgleichungsmodelle in der Geodäsie	51
4.1	Gauß-Markov-Modell	51
4.2	Gauß-Helmert-Modell	52
4.3	Prädiktion und Filterung	52
4.4	Bedingtes Modell	53
5	Generalisierte Orthogonalzerlegungen	55
5.1	Allgemeine Aspekte und Motivation	55
5.2	Modellraum zweier Matrizen	56
5.3	Generalisierte vollständige QR-Zerlegung GCOD	56
5.4	Generalisierte Singulärwertzerlegung GSVD	61
6	Lösung des allgemeinen linearen Modells	63
6.1	Beste linear unverzerrte Schätzung im ALM	64
6.2	Berechnung der Parameter $\hat{x}$ und $\hat{u}$	67
6.3	Berechnung der Modellkomponenten $A\hat{x}$ und $B\hat{u}$	69
6.4	Berechnung der Varianzen und Kovarianzen	70
6.4.1	Varianz der deterministischen Parameter $\hat{x}$	71
6.4.2	Varianz der stochastischen Parameter $\hat{u}$	71
6.4.3	Varianz der Modellkomponenten $A\hat{x}$ und $B\hat{u}$	71
6.4.4	Berechnung einiger Kovarianzen	72
6.5	Berechnung des aposteriori Varianzfaktors $\hat{\sigma}$	72
6.6	Analogie zur <i>unified theory of linear estimation</i> von Rao	75

7	Eigenschaften des Lösungsverfahrens	77
7.1	Numerische Eigenschaften	77
7.1.1	Störungsanalyse	77
7.1.2	Konditionsschätzung im ALM	80
7.1.3	Skalierung des ALM zur Verbesserung der Kondition	80
7.1.3.1	Berechnung von Skalierungsfaktoren	81
7.1.3.2	Zeilenskalierung im ALM	81
7.1.3.3	Spaltenskalierung der Designmatrix A	82
7.2	Modellanalyse	82
7.3	Ranganalyse	84
7.4	Nachteile des Verfahrens	87
7.4.1	Speicherbedarf	87
7.4.2	Rechenzeit	88
8	Anwendungsbeispiele	89
8.1	Approximation durch Bézier-Spline-Flächen im $\mathbb{R}^3$	89
8.1.1	Ergebnisse für die erste Vermaschung	92
8.1.2	Ergebnisse für die zweite Vermaschung	94
8.1.2.1	Analyse der C_1 -Restriktionen	94
8.1.2.2	Analyse der C_2 -Restriktionen	96
8.1.3	Zusammenfassung der Ergebnisse	98
8.2	Koordinatenbezogene Deformationsanalyse	99
8.2.1	Allgemeine Bemerkungen	99
8.2.2	Schätzung von dreidimensionalen Bewegungen in dem Deformationsnetz des Sonderfor- schungsbereichs 461	99
8.2.2.1	Zeilen- und Spaltenskalierung im vorgestellten Beispiel	102
8.2.2.2	Analyse von zwei Epochen	102
8.2.2.3	Analyse von drei Epochen	103
8.2.3	Zusammenfassung der Ergebnisse	103
9	Ausblick	105
10	Zusammenfassung	107