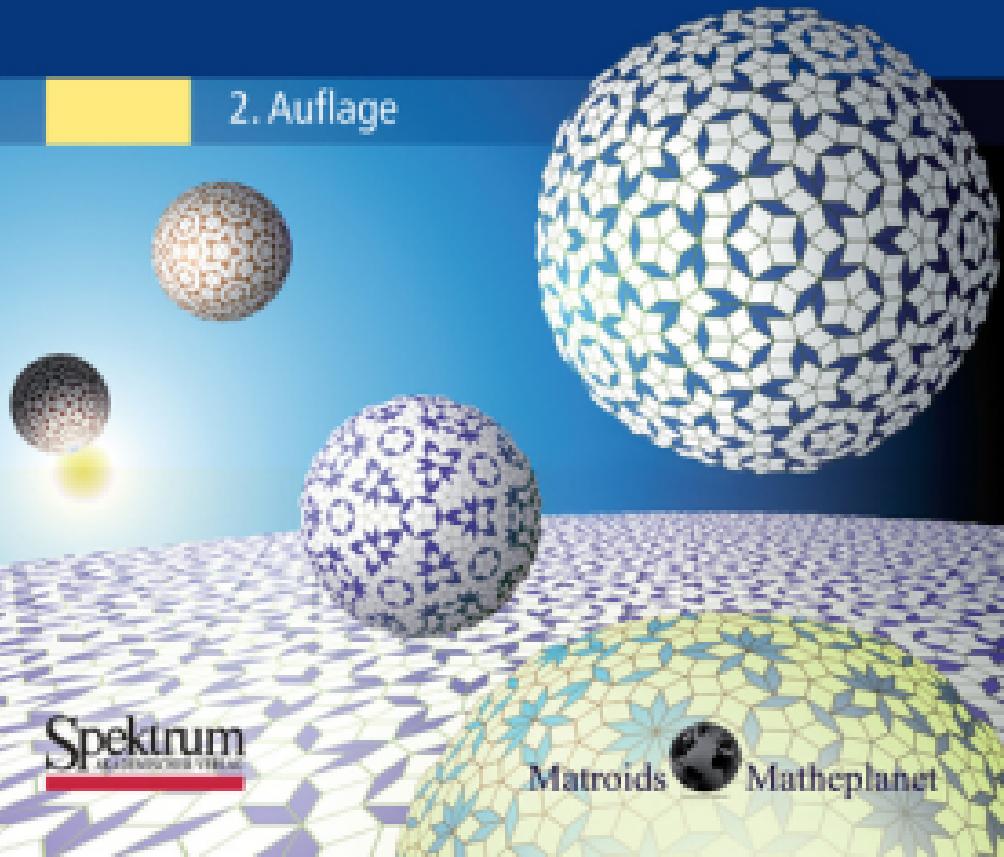


Martin Wohlgemuth (Hrsg.)

Mathematisch für Anfänger

Beiträge zum Studienbeginn
von Matroids Matheplanet

2. Auflage



Spektrum
Akademischer Verlag

Matroids Matheplanet

Mathematisch für Anfänger

Martin Wohlgemuth (Hrsg.)

Mathematisch für Anfänger

Beiträge zum Studienbeginn
von Matroids Matheplanet

2. Auflage

Mit Beiträgen von Norbert Engbers, Ueli Hafner, Johannes Hahn,
Artur Koehler, Georg Lauenstein, Fabian Lenhardt, Florian Modler,
Thorsten Neuschel, Sebastian Stöckl, Martin Wohlgemuth



Herausgeber

Martin Wohlgemuth
E-Mail: mail@matroid.de
www.matheplanet.de

Weitere Informationen zum Buch finden Sie unter www.spektrum-verlag.de/978-3-8274-2852-3

Wichtiger Hinweis für den Benutzer

Der Verlag, der Herausgeber und die Autoren haben alle Sorgfalt walten lassen, um vollständige und akkurate Informationen in diesem Buch zu publizieren. Der Verlag übernimmt weder Garantie noch die juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für die Nutzung dieser Informationen, für deren Wirtschaftlichkeit oder fehlerfreie Funktion für einen bestimmten Zweck. Ferner kann der Verlag für Schäden, die auf einer Fehlfunktion von Programmen oder ähnliches zurückzuführen sind, nicht haftbar gemacht werden. Auch nicht für die Verletzung von Patent- und anderen Rechten Dritter, die daraus resultieren. Eine telefonische oder schriftliche Beratung durch den Verlag über den Einsatz der Programme ist nicht möglich. Der Verlag übernimmt keine Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren, Programme usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen. Der Verlag hat sich bemüht, sämtliche Rechteinhaber von Abbildungen zu ermitteln. Sollte dem Verlag gegenüber dennoch der Nachweis der Rechtsinhaberschaft geführt werden, wird das branchenübliche Honorar gezahlt.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

2. Auflage 2011

© Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg 2011
Spektrum Akademischer Verlag ist ein Imprint von Springer

11 12 13 14 15

5 4 3 2 1

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Barbara Lühker
Herstellung: Crest Premedia Solutions (P) Ltd, Pune, Maharashtra, India
Satz: Martin Wohlgemuth und die Autoren
Umschlaggestaltung: SpieszDesign, Neu-Ulm
Titelbild: © Jos Ley

ISBN 978-3-8274-2852-3

Vorwort

Das vorliegende Buch hat drei Teile.

Thema des ersten Teils, der unter der Überschrift „Beweise und Beweistechnik“ steht, sind die Grundlagen, das mathematische Denken und die Beweistechnik. Auf die Betrachtung „Was ist Mathematik?“ folgt der Sprachkurs „Mathematisch für Anfänger“, in dem – durchaus zutreffend und nicht ohne Humor und Selbstironie – die Mathematiker und deren Eigenarten wie eine fremde Welt beschrieben werden: Eine Welt, zu der auch eine andere Sprache gehört, nämlich Mathematisch; und wer Mathematiker werden will, muss diese Sprache lernen.

Beweise sind das A und O der Mathematik. Was ein Beweis ist und wie man richtig beweist, ist Thema weiterer Beiträge im ersten Teil. Nach „Beweise, immer nur Beweise“, dem Stoßseufzer des geplagten Mathematik-Studierenden, der aber stolz ist auf sich und sein Fach, wird es konkret und praktisch mit einer „Einführung in die Beweistechniken“ und einer ausführlichen Darstellung über das „Prinzip der vollständigen Induktion“. Anschließend wird das Beweisverfahren „Der unendliche Abstieg“ von allen Seiten unter die Lupe genommen. Das Wesen der Mathematik ist ja nicht eigentlich nur das Beweisen, sondern viel wichtiger ist vorher das genaue und genaueste Untersuchen. Biologen untersuchen Zellen, Physiker untersuchen subatomare Teilchen. Das ist aufwändig, setzt sichere Grundlagen und intensive methodische Schulung voraus, erfordert große Ausdauer und höchste Aufmerksamkeit. Forschen heißt, zu beschreiben, zu unterscheiden, zu klassifizieren, zu erkennen, was das Gemeinsame, das Unterscheidende, das Besondere ist, schließlich das erworbene Wissen für andere darzustellen, zu vermitteln und nutzbar zu machen. Forschen heißt: Den Dingen auf den Grund gehen, intensiv hinschauen, bis man etwas sieht, etwas versteht, versteht, wie es funktioniert und warum es so funktioniert und wie man es folglich beeinflussen kann, so dass man es schließlich zu etwas Neuem nutzen kann. Mathematiker erforschen die mathematischen Eigenschaften und Eigenheiten der Welt und der abstrakten Strukturen in ihr.

Es folgt ein Beitrag „Über das Auswahlaxiom“. Die dort vorgeführten Beweise mit ihrem schon recht langen und etappenreichen Aufstieg zum *quod erat demonstrandum* sind schön, aber bereits anspruchsvoll. Ziel und Gipfel der Tour im ersten Teil ist „Das Kugelwunder“. Es geht um den berühmten Satz von Banach-Tarski, dessen paradox erscheinende Aussage man mit dem Auswahlaxiom trickreich beweist.

Man kann und soll den ersten Teil lesen wie einen ehrgeizigen Schnellkurs zur Beweistechnik - vom Anfänger zum Fortgeschrittenen in nur 8 Kapiteln. Wer ermüdet auf diesem Gipfel ankommt, der ist in guter Gesellschaft. Die Gipfel der Mathematik sind hoch, die Aufstiege steil, und nicht jeder Gipfel kann ohne vorbereitendes Training erstiegen werden. Im Studium werden viele es ähnlich erfahren:

Ein paar Wochen lang ist alles leicht und einfach, kleine Hügel, kurze Wanderungen, es gefällt einem gut. Aber schon bald findet man sich vor den hohen Bergen wieder. Jetzt heißt es sich zu entscheiden: Will ich da hoch? Oder ist es mir das nicht wert und ich gebe hier auf? Aber der Ausblick von da oben, der entschädigt, und das Vertrauen in die eigene Leistungsfähigkeit, die Gewissheit der eigenen Kraft, das Klicken im Kopf, wenn man es verstanden hat, das ist ein tolles Gefühl. Wer das sucht, der muss Mathematik studieren.

Der zweite Teil gehört der Linearen Algebra; am Studienbeginn hört man dazu eine zweisemestrige Vorlesung. Entstanden sind die Beiträge in dem Bemühen, die bei vielen Anfängern auftretenden Schwierigkeiten mit dem Stoff und der Vorgehensweise der Linearen Algebra einmal ausführlich und geduldig anzugehen und auszuräumen. Die Schwierigkeiten haben vielfach damit zu tun, dass es an anschaulichkeit mangelt, wenn in der Vorlesung Ergebnisse und Lösungsverfahren vorgetragen werden, der Studierende aber keine Gelegenheit gefunden hat, das Problem, das da untersucht und gelöst wird, vorher zu verstehen.

Der dritte Teil behandelt Themen der Analysis. Gezeigt wird, wie man Polynomgleichungen lösen kann, welche besonders nützlichen Methoden es zur Lösung von Differentialgleichungen gibt, wie man Formeln für trigonometrische Funktionen beweist, was Mehrfachintegrale sind und wie man sie lösen kann. Ein klassisches und sehenswertes Thema der (fortgeschrittenen) Analysis ist die Riemannsche Vermutung, eine Vermutung über die berühmte Zetafunktion. Der Leser erfährt viel über den historischen Weg dieser beiden Themen und auch dazu, warum sich die Mathematiker an dieser Vermutung so intensiv abarbeiten. Es hat auch etwas damit zu tun, dass man auf diesem Weg hinter Geheimnisse der Primzahlen kommen will.

Mit dem folgenden Beitrag, einer eingehenden Untersuchung der Bedingungen, unter denen die Begriffe „kompakt“ und „beschränkt und abgeschlossen“ *nicht* gleichzusetzen sind, kehren wir wieder zu den Fragestellungen zurück, die man im Grundstudium beantworten lernt, wenn man Mathematik studiert. Unser Buch schließt versöhnlich mit einer wunderschönen Miniatur zu einer algebraischen Kurve 6. Grades, die in Teetassen zu finden ist. Wer als Studierender so weit gekommen ist, dass er dafür den Tee kalt werden lässt, der ist bei den Mathematikern angekommen.

Für die zweite Auflage wurden alle Beiträge geprüft, bekannte und erkannte Fehler wurden korrigiert, einige Mängel durch bessere Formulierungen, erforderliche oder hilfreiche Ergänzungen oder anders vorgetragenen Gedankenaufbau verbessert. Es wurde ein Index ergänzt. Vor bald zwei Jahren erschien uns, den Autoren, ein Index noch als unmöglich, weil doch unsere Sammlung von Beiträgen zum Studienbeginn kein Lehrbuch ist und folglich die Themen der Anfängervorlesungen in Mathematik nicht systematisch abdeckt. Beim Wiederlesen jetzt, bald zwei Jahre

nach dem Erscheinen, wuchs bei uns aber die Überzeugung, dass unser Buch auf andere Weise vollständig ist: Es ist eine wohlgefugte und in sich runde Einführung in das mathematische Denken, die typischen Arbeitsweisen und die vielfach verwendeten Konzepte. Es verdient einen Index, und wenn man diesen kurz durchblättert, erkennt man, wie reichhaltig und abwechslungsreich die Themenauswahl, wie folgerichtig und konzeptionell ergiebig der Aufbau ist — immer bezogen auf das, was ein Studierender der Mathematik in den ersten beiden Semestern brauchen kann.

Im Rahmen dieser Überlegungen ergaben sich auch Änderungen bei der Anordnung der Themen im Buch. Vergleicht man mit der ersten Auflage, so wird man sehen, dass einige Umordnungen erfolgt sind. Wir wollen damit, wie man so schön sagt, das Profil schärfen. So gehört beispielsweise der Beitrag über den Satz von Banach-Tarski besser direkt hinter den zum Auswahlaxiom; die beiden Beiträge zur Zetafunktion gehören in den Analysis-Teil. Für den neuen Leser ist die Genese sicherlich nur von geringem Interesse. Ich belasse es also bei dem Hinweis, dass man alle Beiträge der ersten Auflage auch in der zweiten Auflage findet, manche aber an einem anderen Platz.

Es ist mir eine Freude, dass nun die zweite Auflage dieses Buchs erscheinen kann. Es hat mir Spaß gemacht, unser Buch wiederzulesen und es zu verbessern. Dem künftigen Leser wünsche ich viel Spaß und guten Erfolg für sein Studium.

Martin Wohlgemuth

Mai 2011

Aus dem Vorwort zur 1. Auflage

Ich möchte erklären, was der Matheplanet ist, was er für seine Mitglieder bedeutet, warum es jetzt ein Buch davon gibt, was darin zu finden ist und wer alles daran mitgearbeitet hat.

Es war vor 8 Jahren, Anfang 2001, als ich den Plan zu einem deutschsprachigen Internet-Portal für Mathematik fasste. Ein Sammel- und Anlaufpunkt für alle an Mathematik Interessierten und mit Mathematik Befassten, ob freiwillig oder gezwungenermaßen, sollte es werden. Die Internet-Adresse www.matheplanet.de war geboren.

Mit viel Arbeit und dem Glück der Stunde wurde der Matheplanet groß und größer. Anfangs sorgte ich allein für Aktivität und Inhalte, aber bald kamen die ersten Mitglieder und machten mit, schrieben, fragten und antworteten. Die Inhalte wurden mehr, und das zog weitere Mitglieder an: Es ging aufwärts.

Was ist der Matheplanet heute? Tausende Mitglieder, zehntausende Besucher täglich, hunderttausend Themen im Forum und neben dem Tagesgeschäft im Forum auch eine große Zahl gut ausgearbeiteter Artikel zu nahezu allen mathematischen Gebieten. Die Autoren schreiben diese Beiträge als Hilfestellung für Anfänger oder zur Anregung und Unterhaltung für andere Mathematik-Begeisterte.

Der Matheplanet ist zur größten und aktivsten Mathematik-Community im deutschsprachigen Internet geworden. In dieser Community ist es üblich, dass Mitglieder unter einem selbst gewählten Mitgliedsnamen firmieren, dem Nicknamen.

Weil ich den Matheplaneten gegründet habe, bin ich das erste Mitglied, und ich habe den Nicknamen *Matroid* gewählt, denn meine Diplomarbeit hatte das Thema „Flüsse in Matroiden“. So war mir das Wort geläufig, und es schien mir von Vorteil, dass man es außerhalb der Mathematik nicht kennt. Ich nannte meine Gründung „*Matroids Matheplanet*“, denn ich wollte nicht für mich in Anspruch nehmen, den einzigen möglichen Matheplaneten zu schaffen.

In unserer Internet-Community sind die Hierarchien der realen Welt nicht gültig. Wer sich hinter einem Nicknamen verbirgt, weiß man i. d. R. nicht. Jeder ist das und steht für das, was er in die Community einbringt. Schüler, Studenten, Zivis, Hochschulangehörige, Lehrer, Mathematiker, Physiker, Ingenieure im Beruf und Liebhaber des Faches sind verbunden durch das gemeinsame Interesse an Mathematik und am mathematischen Denken. Die Mitglieder bezeichnen sich untereinander als Planetarier, darin drücken sich Identifikation und Wir-Gefühl aus. Planetarier im Alter zwischen 12 und 80 arbeiten gleichberechtigt miteinander, freuen sich, wenn sie anderen bei Fragen helfen können und dass sie verwandte Geister zum angeregten Gespräch finden können.

Nach 7 erfolgreichen Jahren, im Sommer 2008, fragte der Spektrum Akademischer Verlag bei mir an, ob ich Interesse an einer Zusammenarbeit mit dem Ziel einer Buchveröffentlichung habe. Ja, aber sicher, ich war Feuer und Flamme!

Das Konzept für die Buchveröffentlichung wurde zügig abgestimmt, es sah vor, „die beliebtesten Beiträge von *Matroids Matheplanet*“ erstmals im Druck herauszugeben. Dieses Konzept ist nun umgesetzt, und es gibt dem vorliegenden Buch den Untertitel.

Um das Ergebnis der Auswahl nach Beliebtheit zu erklären, muss ich auf die Mitgliederstruktur und die Zielgruppe des Matheplaneten eingehen.

Die meisten Besucher kommen auf den Matheplaneten, weil sie Hilfestellung oder Förderung suchen. Der typische Besucher des Matheplaneten ist im ersten bis dritten Semester und studiert Mathematik (oder ein nahe liegendes Fach). Daneben kommen auch viele Schüler, die Mathematik mögen und überlegen, ob sie das Fach studieren wollen.

Für Schüler hat der Matheplanet einen großen Vorteil: Es gibt hier keine Barrieren und Schubladen. Jeder hat Zugang und kann fragen, lernen und mitreden, findet Antworten, Hilfestellung und Anleitung und erlangt tiefe Einblicke in die Welt der Mathematik, Einblicke, die weit über das hinausgehen, was die Schule gewöhnlich zu bieten hat. Die ganze Herangehensweise an der Hochschule ist anders als im Unterricht. Auf dem Matheplaneten kann man das erfahren, von jedem Ort aus.

Aus Schülern werden Studierende, aus Anfängern werden im Studium Fortgeschrittene, und viele bleiben dem Matheplaneten nach dem Abschluss treu. Sie geben als Experten zurück, was sie erhalten haben. Nach diesem „Gesellschaftsvertrag“ funktioniert es prima.

Aus dem Gesagten ergibt sich: Der Matheplanet kann besonders gut bei Grundlagen und Anfängerthemen im Studium helfen. Themen, die diese Zielgruppe betreffen, werden zahlenmäßig am häufigsten nachgefragt.

Abgesehen davon, dass sie die Hitliste anführen, haben die veröffentlichten Beiträge etwas Wichtiges gemeinsam, und das ist es, was die Veröffentlichung und Verbreitung in Buchform auf jeden Fall rechtfertigt: Mathematik betreiben bedeutet, den Dingen auf den Grund zu gehen, Ursachen und Folgerungen zu erkennen. Es bedeutet, ein Prinzip erkennen, formulieren und anwenden zu können. Es bedeutet: Man muss Dinge nicht einfach glauben, sondern es gibt Beweise; man kann nach einem Beweis fragen und sogar selbst lernen, Beweise zu führen. Davon wollen alle Beiträge überzeugen. Das ist der Geist, in dem alle Beiträge geschrieben sind.

Als weitere Gemeinsamkeit aller Beiträge sei herausgestellt, dass bei aller gebotenen mathematischen Korrektheit stets die verständliche Darstellung von Ideen und Denkweisen sehr wichtig genommen wird und manchmal das eine gegen das andere ein wenig abgewogen werden muss. Auch wird man feststellen, dass die Ansprache des Lesers in den Kapiteln ziemlich direkt und nicht mit der Distanz erfolgt, wie sie sonst Autoren ihren unbekannten Lesern gegenüber wahren. Das hat damit zu tun, dass diese Beiträge von Planetarien für Planetarier geschrieben worden sind. Wir haben es für das Buch bewusst nicht ganz verändert. Schließlich ergeben die ausgewählten Beiträge selbstverständlich kein Lehrbuch. Die Auswahl und Sortierung wurden aber derart vorgenommen, dass ein aufsteigendes Lesen möglich ist.

Meinen herzlichen Dank an die Autoren für die ausgezeichnete Arbeit, die sie in die Erstellung dieses Buchs gesteckt haben. Wir haben als Team gearbeitet, auch über die eigenen Beiträge hinaus Verantwortung für das ganze Werk empfunden und im gegenseitigen Wechsel die Überprüfung, Korrektur und Verbesserung aller Beiträge von der Rohfassung bis zur Fertigstellung geleistet.

Die Nicknamen der Autoren sind: *da_bounce*, *Diffiform*, *Fabi*, *FlorianM*, *Gockel*, *matroid*, *pendragon302*, *shadowking*, *Siah* und *Ueli*. Sie wohnen weit verteilt: In

Berlin, Bonn, Hannover, München, Osnabrück, Rostock, Trier, Winterthur und Witten. Das macht aber nichts, denn der gemeinsame Ort für alle ist der Matheplanet.¹

Mein großer Dank an *buh*, der die Korrektur der Orthografie und Sprache von der ersten bis zur letzten Seite übernommen hat. Großer Dank an *fru* für die wichtigen und stets präzisen inhaltlichen Korrekturvorschläge zu ausgewählten Kapiteln. Herzlichen Dank an *Ueli*, der bei der kollektiven Erstellung der Abbildungen große Teile übernommen hat. Großer Dank an *Siah*, der bei der Mehrzahl der Beiträge die fachliche Endkontrolle übernommen und vielfach selbst die Verbesserungen erarbeitet und vorgeschlagen hat.

Herzlichen Dank an alle Probeleser, die mal diesen, mal jenen Beitrag durchgesehen haben und die uns mit ihrer Beurteilung und Kritik viele wichtige und notwendige Hinweise zur Verbesserung geben konnten. Die Probeleser waren (in alphabetischer Reihenfolge): *hugoles, marvinius, mire2, rlk, SchuBi, Spock, trek, viertel, Wauzi* und noch mindestens einer, der ungenannt bleiben will. Mein Dank an *Stefan_K* und *Marco_D* für Ratschläge zum L^AT_EX-Satz. Besonderer Dank an *viertel*, der als Grafik-Berater in unserem Team war.

Bedanken möchte ich mich für die Idee und die Möglichkeit zu diesem Buch bei Herrn Dr. Rüdinger vom Spektrum Akademischer Verlag. Mein Dank auch für das Lektorat an Fr. Lühker. Es war eine stets angenehme Zusammenarbeit.

Abschließend mein Dank an alle, für die ich in den letzten Monaten weniger Zeit hatte und die mir dennoch in dieser oder jener positiven Weise ihre geistig-moralische Unterstützung gegeben haben.

Nicht jeder studiert Mathematik, aber es wäre schön, wenn der Matheplanet dazu beitrüge, dass die Anzahl der Menschen mit positiven Assoziationen zur Mathematik größer wird. Mancher soll später einmal sagen können: „Ich habe damals lange überlegt, aber dann wollte ich doch lieber das werden, was ich heute bin.“

Matheplanet, im Juli 2009

Martin Wohlgemuth (also known as *Matroid*)

¹Alle Angaben auf dem Stand von Juli 2009. Dies gilt auch für die Angabe zum Status (Student, Doktorand, ...), die mit dem Namen des jeweiligen Autors unter jedem Beitrag zu finden ist. Einige von uns sind heute weiter als damals, studieren nicht mehr, sondern sind im Beruf oder promovieren oder haben selbst das schon abgeschlossen.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
I Beweise und Beweistechnik	1
1 Was ist Mathematik?	3
1.1 Ausgewählte Antworten	4
1.2 Zusammenfassung	7
1.3 Empfehlenswerte Bücher	8
2 Mathematisch für Anfänger	11
2.1 Lektion 1: Vom Wort zum Satz	12
2.2 Lektion 2: Universelles Vokabular	17
2.3 Lektion 3: Prädikate	18
2.4 Lektion 4. Konjunktionen (Überleitungen)	20
2.5 Lektion 5: Schlussworte, Schlusspunkte	22
3 Beweise, immer nur Beweise	23
3.1 Beweisen lernen	23
3.2 Der Zweck der Übungen	24
3.3 Unterscheide wahr und falsch	24
3.4 Einige Gebote und Verbote	24
3.5 Mathematik ist Struktur	25
3.6 Mathematik für und durch die Praxis	26
3.7 Und wie lernt man beweisen?	26
4 Die Beweisverfahren	27
4.1 Der direkte Beweis	27
4.1.1 Einfache Zahlentheorie	27
4.1.2 Aussagenlogik	29
4.1.3 Gesetze der Aussagenlogik	31
4.1.4 Mengenlehre	32
4.1.5 Fakultät und Binomialkoeffizient	33
4.2 Der indirekte Beweis	35
4.2.1 Wurzel aus 2 ist nicht rational	35
4.2.2 Es gibt unendlich viele Primzahlen	36
4.3 Der konstruktive Beweis	37
4.3.1 Nullstelle einer Funktion	37
5 Das Prinzip der vollständigen Induktion	39
5.1 Wer hat die vollständige Induktion erfunden?	40
5.2 Ist Induktion nur für Folgen und Reihen?	41
5.3 Wie funktioniert die vollständige Induktion?	41
5.4 Kann man sich auf die vollständige Induktion verlassen?	43
5.5 Kann man wirklich den Induktionsschluss unendlich oft anwenden? ..	44

5.6	Kann man Induktion immer anwenden?	45
5.7	Induktion ist nicht geeignet, wenn	46
5.8	Was ist schwer an der vollständigen Induktion?	47
5.9	Anwendungen der vollständigen Induktion	47
5.9.1	Geometrie	47
5.9.2	Mengenlehre	49
5.9.3	Binomialkoeffizienten	50
5.9.4	Geometrisches und arithmetisches Mittel	52
5.9.5	Summenformeln	53
5.9.6	Abschätzungen	56
5.9.7	Teilbarkeit	57
5.9.8	Zahlentheorie	58
5.9.9	Rekursiv definierte Folgen	59
5.9.10	Eindeutigkeitsbeweis	60
5.10	Zum Schluss	61
6	Der unendliche Abstieg	63
6.1	Einführung	63
6.2	$\sqrt{2}$ ist irrational	64
6.2.1	Das übliche Verfahren	64
6.2.2	$\sqrt{2}$ ist irrational mit unendlichem Abstieg	64
6.3	Diskussion der Methode	66
6.3.1	Ist auch $\sqrt{9}$ irrational?	66
6.3.2	Ist die Wurzel aus 5 irrational?	67
6.3.3	Die Wurzel einer Nicht-Quadratzahl ist irrational	67
6.4	Inkommensurable Längen im Fünfeck	67
7	Über das Auswahlaxiom	69
7.1	Das Auswahlproblem	69
7.2	Das Auswahlaxiom	70
7.3	Wohlordnung	71
7.4	Lemma von Zorn	72
7.5	Äquivalenz der Aussagen	74
8	Das Kugelwunder	79
8.1	Einleitung	79
8.2	Die freie Gruppe mit zwei Erzeugern	80
8.3	Paradoxe Zerlegung einer löchrigen Sphäre	85
8.4	Von der löchrigen Sphäre zur Vollkugel	89
8.5	Abschluss	93
II	Lineare Algebra	95
9	Lineare Algebra für absolute Anfänger	97
9.1	Einführung	97

9.2	Vektorräume	98
9.3	Untervektorräume	103
9.4	Lineare Unabhängigkeit	107
9.5	Schluss	109
10	Lineare Gleichungssysteme	111
10.1	Einführung	111
10.2	Lineare Gleichungssysteme: Was ist das?	111
10.2.1	Einführendes Beispiel	111
10.2.2	Definitionen	113
10.2.3	Darstellung mit Matrizen	114
10.3	Lösung linearer Gleichungssysteme	115
10.3.1	Der Gaußsche Algorithmus	115
10.3.2	Beispiel 1: Eindeutige Lösung	119
10.3.3	Beispiel 2: Keine Lösung	122
10.3.4	Beispiel 3: Unendlich viele Lösungen	123
10.4	Rangbestimmung einer Matrix	127
11	Lineare Abbildungen und ihre darstellenden Matrizen	129
11.1	Einführung	129
11.2	Lineare Abbildungen	130
11.3	Bild und Kern einer linearen Abbildung	131
11.4	Dimensionsformel und weitere Eigenschaften	133
11.5	Lineare Abbildung am Beispiel	134
11.6	Darstellungen linearer Abbildungen am Beispiel	135
11.7	Darstellungsmatrizen linearer Abbildungen	136
11.8	Berechnung einer Darstellungsmatrix am Beispiel	138
11.9	Abilden mit einer darstellenden Matrix	141
11.10	Beispiel zum Basiswechsel	142
12	Determinanten	145
12.1	Einführung	145
12.2	Determinante: Was ist das?	146
12.3	Spezialfälle	147
12.3.1	Der Fall $n = 1$	147
12.3.2	Der Fall $n = 2$	148
12.3.3	Der Fall $n = 3$	151
12.4	Der allgemeine Fall	154
12.5	Praktische Berechnung von Determinanten	159
12.5.1	Der Gaußsche Algorithmus	159
12.5.2	Die Laplacesche Entwicklungsformel	161
13	Diagonalisierbarkeit	163
13.1	Einführung	163
13.2	Diagonalisierbarkeit: Was ist das?	163

13.3	Eigenwerte und Eigenvektoren	165
13.4	Eigenwerte und Eigenvektoren am Beispiel	169
13.5	Diagonalisierbarkeitskriterien	171
13.6	Eine praktische Anwendung	174

III Analysis 177

14 Die Standardlösungsverfahren für Polynomgleichungen	179
14.1 Lineare Gleichungen	179
14.2 Quadratische Gleichungen	180
14.3 Gleichungen dritten und vierten Grades	182
14.4 Weitere Lösungsverfahren für Spezialfälle	182
14.4.1 n -te Wurzeln	182
14.4.2 Biquadratische Gleichung	183
14.4.3 Andere durch Substitution lösbare Gleichungen	184
14.4.4 Ein Spezialfall des Wurzelziehens	184
14.4.5 Binom-Gleichungen	185
14.4.6 Gradreduzierung durch Ausklammern	186
14.4.7 Gradreduzierung durch Polynomdivision	186
14.5 Seltene Lösungsmethoden und Approximationen	188
14.5.1 Methode des Quadrat-Extrems	188
14.5.2 Die Newton-Iteration	188
14.5.3 Regula falsi	190
14.5.4 Das allseits beliebte Raten	191
14.5.5 Das „höhere Raten“	193
14.5.6 Symmetrische Koeffizienten	194
14.6 Abschluss	195
15 Differentialgleichungen	197
15.1 Einführung	197
15.2 Klassifikation vor der Lösung	198
15.3 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	199
15.3.1 Einfachstes Beispiel	199
15.3.2 Homogene Gleichung	200
15.3.3 Inhomogene Gleichung	200
15.4 Die Probe machen	202
15.5 Nichtlineare Differentialgleichungen	203
15.5.1 Trennung der Veränderlichen	203
15.5.2 Substitution	205
15.5.3 Bernoulli-Differentialgleichung	207
15.5.4 Riccati-Differentialgleichung	208
15.5.5 Exakte Differentialgleichung	210
15.5.6 Integrierender Faktor (Eulerscher Multiplikator)	213

15.5.7 Parametrisierung	215
15.5.8 Clairaut-Differentialgleichung	217
15.5.9 d'Alembert-Differentialgleichung	218
15.6 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung	219
15.6.1 Konstante Koeffizienten	219
15.6.2 Eulersche Differentialgleichung	224
16 Die Beziehungen von Sinus und Cosinus	227
16.1 Additionstheoreme	227
16.2 Multiplikationstheoreme	231
16.3 Theoreme zu doppelten und halben Winkeln	233
16.4 Theoreme mit Arcus-Funktionen	235
16.5 Alternative Herleitungen mit komplexen Zahlen	236
16.5.1 Additionstheoreme	236
16.5.2 Weitere Beziehungen	237
17 Doppelintegrale	239
17.1 Einführung	239
17.2 Doppelintegral über einem Rechteck	240
17.3 Doppelintegral über einem allgemeineren Bereich	244
17.4 Eigenschaften und Mittelwertsätze	248
17.5 Koordinatentransformation	250
17.6 Polarkoordinaten	253
18 Kurvenintegrale	257
18.1 Begriffe und Definitionen	257
18.2 Kurvenlänge	258
18.3 Kurvenintegral bezüglich der Bogenlänge	260
18.4 Kurvenintegral über ein Vektorfeld	261
18.5 Eigenschaften der Kurvenintegrale	264
18.6 Kurvenintegrale über Gradientenfeldern	265
19 Oberflächenintegrale	267
19.1 Einführung	267
19.2 Oberflächeninhalt	269
19.3 Oberflächenintegrale einer skalaren Funktion	272
19.4 Flussintegrale	274
20 Eulers Berechnungen der Zetafunktion	279
21 Die Riemannsche Vermutung	283
21.1 Die Riemannsche Zetafunktion	284
21.1.1 Meromorphe Fortsetzung	285
21.1.2 Die Nullstellen	286
21.1.3 Die Vermutung	288
21.2 Die Primzahlfunktion	289
21.2.1 Die Eulersche Produktentwicklung	289