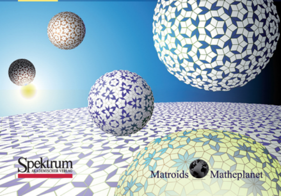
Martin Wohlgemuth (Hrsg.)

Mathematisch für Anfänger

Beiträge zum Studienbeginn von Matroids Matheplanet

2. Auflage



Spektrum AKADEMISCHER VERLAG

Matroids Matheplanet

Mathematisch für Anfänger

Martin Wohlgemuth (Hrsg.)

Mathematisch für Anfänger

Beiträge zum Studienbeginn von Matroids Matheplanet

2. Auflage

Mit Beiträgen von Norbert Engbers, Ueli Hafner, Johannes Hahn, Artur Koehler, Georg Lauenstein, Fabian Lenhardt, Florian Modler, Thorsten Neuschel, Sebastian Stöckl, Martin Wohlgemuth

Spektrum
AKADEMISCHER VERLAG

Herausgeber
Martin Wohlgemuth
E-Mail: mail@matroid.de
www.matheplanet.de

Weitere Informationen zum Buch finden Sie unter www.spektrum-verlag.de/978-3-8274-2852-3

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

2. Auflage 2011

Spektrum Akademischer Verlag ist ein Imprint von Springer

11 12 13 14 15 5 4 3 2 1

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Barbara Lühker
Herstellung: Crest Premedia Solutions (P) Ltd, Pune, Maharashtra, India
Satz: Martin Wohlgemuth und die Autoren
Umschlaggestaltung: SpieszDesign, Neu-Ulm
Titelbild: © Jos Ley

ISBN 978-3-8274-2852-3

Vorwort

Das vorliegende Buch hat drei Teile.

Thema des ersten Teils, der unter der Überschrift „Beweise und Beweistechnik“ steht, sind die Grundlagen, das mathematische Denken und die Beweistechnik. Auf die Betrachtung „Was ist Mathematik?“ folgt der Sprachkurs „Mathematisch für Anfänger“, in dem – durchaus zutreffend und nicht ohne Humor und Selbstironie – die Mathematiker und deren Eigenarten wie eine fremde Welt beschrieben werden: Eine Welt, zu der auch eine andere Sprache gehört, nämlich Mathematisch; und wer Mathematiker werden will, muss diese Sprache lernen.

Beweise sind das A und O der Mathematik. Was ein Beweis ist und wie man richtig beweist, ist Thema weiterer Beiträge im ersten Teil. Nach „Beweise, immer nur Beweise“, dem Stoßseufzer des geplagten Mathematik-Studierenden, der aber stolz ist auf sich und sein Fach, wird es konkret und praktisch mit einer „Einführung in die Beweistechniken“ und einer ausführlichen Darstellung über das „Prinzip der vollständigen Induktion“. Anschließend wird das Beweisverfahren „Der unendliche Abstieg“ von allen Seiten unter die Lupe genommen. Das Wesen der Mathematik ist ja nicht eigentlich nur das Beweisen, sondern viel wichtiger ist vorher das genaue und genaueste Untersuchen. Biologen untersuchen Zellen, Physiker untersuchen subatomare Teilchen. Das ist aufwändig, setzt sichere Grundlagen und intensive methodische Schulung voraus, erfordert große Ausdauer und höchste Aufmerksamkeit. Forschen heißt, zu beschreiben, zu unterscheiden, zu klassifizieren, zu erkennen, was das Gemeinsame, das Unterscheidende, das Besondere ist, schließlich das erworbene Wissen für andere darzustellen, zu vermitteln und nutzbar zu machen. Forschen heißt: Den Dingen auf den Grund gehen, intensiv hinschauen, bis man etwas sieht, etwas versteht, versteht, wie es funktioniert und warum es so funktioniert und wie man es folglich beeinflussen kann, so dass man es schließlich zu etwas Neuem nutzen kann. Mathematiker erforschen die mathematischen Eigenschaften und Eigenheiten der Welt und der abstrakten Strukturen in ihr.

Es folgt ein Beitrag „Über das Auswahlaxiom“. Die dort vorgeführten Beweise mit ihrem schon recht langen und etappenreichen Aufstieg zum *quod erat demonstrandum* sind schön, aber bereits anspruchsvoll. Ziel und Gipfel der Tour im ersten Teil ist „Das Kugelwunder“. Es geht um den berühmten Satz von Banach-Tarski, dessen paradox erscheinende Aussage man mit dem Auswahlaxiom trickreich beweist.

Man kann und soll den ersten Teil lesen wie einen ehrgeizigen Schnellkurs zur Beweistechnik - vom Anfänger zum Fortgeschrittenen in nur 8 Kapiteln. Wer ermüdet auf diesem Gipfel ankommt, der ist in guter Gesellschaft. Die Gipfel der Mathematik sind hoch, die Aufstiege steil, und nicht jeder Gipfel kann ohne vorbereitendes Training erstiegen werden. Im Studium werden viele es ähnlich erfahren:

Ein paar Wochen lang ist alles leicht und einfach, kleine Hügel, kurze Wanderungen, es gefällt einem gut. Aber schon bald findet man sich vor den hohen Bergen wieder. Jetzt heißt es sich zu entscheiden: Will ich da hoch? Oder ist es mir das nicht wert und ich gebe hier auf? Aber der Ausblick von da oben, der entschädigt, und das Vertrauen in die eigene Leistungsfähigkeit, die Gewissheit der eigenen Kraft, das Klicken im Kopf, wenn man es verstanden hat, das ist ein tolles Gefühl. Wer das sucht, der muss Mathematik studieren.

Der zweite Teil gehört der Linearen Algebra; am Studienbeginn hört man dazu eine zweisemestrige Vorlesung. Entstanden sind die Beiträge in dem Bemühen, die bei vielen Anfängern auftretenden Schwierigkeiten mit dem Stoff und der Vorgehensweise der Linearen Algebra einmal ausführlich und geduldig anzugehen und auszuräumen. Die Schwierigkeiten haben vielfach damit zu tun, dass es an Anschaulichkeit mangelt, wenn in der Vorlesung Ergebnisse und Lösungsverfahren vorgetragen werden, der Studierende aber keine Gelegenheit gefunden hat, das Problem, das da untersucht und gelöst wird, vorher zu verstehen.

Der dritte Teil behandelt Themen der Analysis. Gezeigt wird, wie man Polynomgleichungen lösen kann, welche besonders nützlichen Methoden es zur Lösung von Differentialgleichungen gibt, wie man Formeln für trigonometrische Funktionen beweist, was Mehrfachintegrale sind und wie man sie lösen kann. Ein klassisches und sehenswertes Thema der (fortgeschrittenen) Analysis ist die Riemannsche Vermutung, eine Vermutung über die berühmte Zetafunktion. Der Leser erfährt viel über den historischen Weg dieser beiden Themen und auch dazu, warum sich die Mathematiker an dieser Vermutung so intensiv abarbeiten. Es hat auch etwas damit zu tun, dass man auf diesem Weg hinter Geheimnisse der Primzahlen kommen will.

Mit dem folgenden Beitrag, einer eingehenden Untersuchung der Bedingungen, unter denen die Begriffe „kompakt“ und „beschränkt und abgeschlossen“ *nicht* gleichzusetzen sind, kehren wir wieder zu den Fragestellungen zurück, die man im Grundstudium beantworten lernt, wenn man Mathematik studiert. Unser Buch schließt versöhnlich mit einer wunderschönen Miniatur zu einer algebraischen Kurve 6. Grades, die in Teetassen zu finden ist. Wer als Studierender so weit gekommen ist, dass er dafür den Tee kalt werden lässt, der ist bei den Mathematikern angekommen.

Für die zweite Auflage wurden alle Beiträge geprüft, bekannte und erkannte Fehler wurden korrigiert, einige Mängel durch bessere Formulierungen, erforderliche oder hilfreiche Ergänzungen oder anders vorgetragenen Gedankenaufbau verbessert. Es wurde ein Index ergänzt. Vor bald zwei Jahren erschien uns, den Autoren, ein Index noch als unmöglich, weil doch unsere Sammlung von Beiträgen zum Studienbeginn kein Lehrbuch ist und folglich die Themen der Anfängervorlesungen in Mathematik nicht systematisch abdeckt. Beim Wiederlesen jetzt, bald zwei Jahre nach dem Erscheinen, wuchs bei uns aber die Überzeugung, dass unser Buch auf andere Weise vollständig ist: Es ist eine wohlgelungene und in sich runde Einführung in das mathematische Denken, die typischen Arbeitsweisen und die vielfach verwendeten Konzepte. Es verdient einen Index, und wenn man diesen kurz durchblättert, erkennt man, wie reichhaltig und abwechslungsreich die Themenauswahl, wie folgerichtig und konzeptionell ergiebig der Aufbau ist — immer bezogen auf das, was ein Studierender der Mathematik in den ersten beiden Semestern brauchen kann.

Im Rahmen dieser Überlegungen ergaben sich auch Änderungen bei der Anordnung der Themen im Buch. Vergleicht man mit der ersten Auflage, so wird man sehen, dass einige Umordnungen erfolgt sind. Wir wollen damit, wie man so schön sagt, das Profil schärfen. So gehört beispielsweise der Beitrag über den Satz von Banach-Tarski besser direkt hinter den zum Auswahlaxiom; die beiden Beiträge zur Zetafunktion gehören in den Analysis-Teil. Für den neuen Leser ist die Genese sicherlich nur von geringem Interesse. Ich belasse es also bei dem Hinweis, dass man alle Beiträge der ersten Auflage auch in der zweiten Auflage findet, manche aber an einem anderen Platz.

Es ist mir eine Freude, dass nun die zweite Auflage dieses Buchs erscheinen kann. Es hat mir Spaß gemacht, unser Buch wiederzulesen und es zu verbessern. Dem künftigen Leser wünsche ich viel Spaß und guten Erfolg für sein Studium.

Martin Wohlgemuth

Mai 2011

Aus dem Vorwort zur 1. Auflage

Ich möchte erklären, was der Matheplanet ist, was er für seine Mitglieder bedeutet, warum es jetzt ein Buch davon gibt, was darin zu finden ist und wer alles daran mitgearbeitet hat.

Es war vor 8 Jahren, Anfang 2001, als ich den Plan zu einem deutschsprachigen Internet-Portal für Mathematik fasste. Ein Sammel- und Anlaufpunkt für alle an Mathematik Interessierten und mit Mathematik Befassten, ob freiwillig oder gezwungenermaßen, sollte es werden. Die Internet-Adresse www.matheplanet.de war geboren.

Mit viel Arbeit und dem Glück der Stunde wurde der Matheplanet groß und größer. Anfangs sorgte ich allein für Aktivität und Inhalte, aber bald kamen die ersten Mitglieder und machten mit, schrieben, fragten und antworteten. Die Inhalte wurden mehr, und das zog weitere Mitglieder an: Es ging aufwärts.

Was ist der Matheplanet heute? Tausende Mitglieder, zehntausende Besucher täglich, hunderttausend Themen im Forum und neben dem Tagesgeschäft im Forum auch eine große Zahl gut ausgearbeiteter Artikel zu nahezu allen mathematischen Gebieten. Die Autoren schreiben diese Beiträge als Hilfestellung für Anfänger oder zur Anregung und Unterhaltung für andere Mathematik-Begeisterte.

Der Matheplanet ist zur größten und aktivsten Mathematik-Community im deutschsprachigen Internet geworden. In dieser Community ist es üblich, dass Mitglieder unter einem selbst gewählten Mitgliedsnamen firmieren, dem Nicknamen.

Weil ich den Matheplaneten gegründet habe, bin ich das erste Mitglied, und ich habe den Nicknamen *Matroid* gewählt, denn meine Diplomarbeit hatte das Thema „Flüsse in Matroiden". So war mir das Wort geläufig, und es schien mir von Vorteil, dass man es außerhalb der Mathematik nicht kennt. Ich nannte meine Gründung „Matroids Matheplanet", denn ich wollte nicht für mich in Anspruch nehmen, den einzig möglichen Matheplaneten zu schaffen.

In unserer Internet-Community sind die Hierarchien der realen Welt nicht gültig. Wer sich hinter einem Nicknamen verbirgt, weiß man i. d. R. nicht. Jeder ist das und steht für das, was er in die Community einbringt. Schüler, Studenten, Zivis, Hochschulangehörige, Lehrer, Mathematiker, Physiker, Ingenieure im Beruf und Liebhaber des Faches sind verbunden durch das gemeinsame Interesse an Mathematik und am mathematischen Denken. Die Mitglieder bezeichnen sich untereinander als Planetarier, darin drücken sich Identifikation und Wir-Gefühl aus. Planetarier im Alter zwischen 12 und 80 arbeiten gleichberechtigt miteinander, freuen sich, wenn sie anderen bei Fragen helfen können und dass sie verwandte Geister zum angeregten Gespräch finden können.

Nach 7 erfolgreichen Jahren, im Sommer 2008, fragte der Spektrum Akademischer Verlag bei mir an, ob ich Interesse an einer Zusammenarbeit mit dem Ziel einer Buchveröffentlichung habe. Ja, aber sicher, ich war Feuer und Flamme!

Das Konzept für die Buchveröffentlichung wurde zügig abgestimmt, es sah vor, „die beliebtesten Beiträge von Matroids Matheplanet" erstmals im Druck herauszugeben. Dieses Konzept ist nun umgesetzt, und es gibt dem vorliegenden Buch den Untertitel.

Um das Ergebnis der Auswahl nach Beliebtheit zu erklären, muss ich auf die Mitgliederstruktur und die Zielgruppe des Matheplaneten eingehen.

Die meisten Besucher kommen auf den Matheplaneten, weil sie Hilfestellung oder Förderung suchen. Der typische Besucher des Matheplaneten ist im ersten bis dritten Semester und studiert Mathematik (oder ein nahe liegendes Fach). Daneben kommen auch viele Schüler, die Mathematik mögen und überlegen, ob sie das Fach studieren wollen.

Für Schüler hat der Matheplanet einen großen Vorteil: Es gibt hier keine Barrieren und Schubladen. Jeder hat Zugang und kann fragen, lernen und mitreden, findet Antworten, Hilfestellung und Anleitung und erlangt tiefe Einblicke in die Welt der Mathematik, Einblicke, die weit über das hinausgehen, was die Schule gewöhnlich zu bieten hat. Die ganze Herangehensweise an der Hochschule ist anders als im Unterricht. Auf dem Matheplaneten kann man das erfahren, von jedem Ort aus.

Aus Schülern werden Studierende, aus Anfängern werden im Studium Fortgeschrittene, und viele bleiben dem Matheplaneten nach dem Abschluss treu. Sie geben als Experten zurück, was sie erhalten haben. Nach diesem „Gesellschaftsvertrag“ funktioniert es prima.

Aus dem Gesagten ergibt sich: Der Matheplanet kann besonders gut bei Grundlagen und Anfängerthemen im Studium helfen. Themen, die diese Zielgruppe betreffen, werden zahlenmäßig am häufigsten nachgefragt.

Abgesehen davon, dass sie die Hitliste anführen, haben die veröffentlichten Beiträge etwas Wichtiges gemeinsam, und das ist es, was die Veröffentlichung und Verbreitung in Buchform auf jeden Fall rechtfertigt: Mathematik betreiben bedeutet, den Dingen auf den Grund zu gehen, Ursachen und Folgerungen zu erkennen. Es bedeutet, ein Prinzip erkennen, formulieren und anwenden zu können. Es bedeutet: Man muss Dinge nicht einfach glauben, sondern es gibt Beweise; man kann nach einem Beweis fragen und sogar selbst lernen, Beweise zu führen. Davon wollen alle Beiträge überzeugen. Das ist der Geist, in dem alle Beiträge geschrieben sind.

Als weitere Gemeinsamkeit aller Beiträge sei herausgestellt, dass bei aller gebotenen mathematischen Korrektheit stets die verständliche Darstellung von Ideen und Denkweisen sehr wichtig genommen wird und manchmal das eine gegen das andere ein wenig abgewogen werden muss. Auch wird man feststellen, dass die Ansprache des Lesers in den Kapiteln ziemlich direkt und nicht mit der Distanz erfolgt, wie sie sonst Autoren ihren unbekannten Lesern gegenüber wahren. Das hat damit zu tun, dass diese Beiträge von Planetariern für Planetarier geschrieben worden sind. Wir haben es für das Buch bewusst nicht ganz verändert. Schließlich ergeben die ausgewählten Beiträge selbstverständlich kein Lehrbuch. Die Auswahl und Sortierung wurden aber derart vorgenommen, dass ein aufsteigendes Lesen möglich ist.

Meinen herzlichen Dank an die Autoren für die ausgezeichnete Arbeit, die sie in die Erstellung dieses Buchs gesteckt haben. Wir haben als Team gearbeitet, auch über die eigenen Beiträge hinaus Verantwortung für das ganze Werk empfunden und im gegenseitigen Wechsel die Überprüfung, Korrektur und Verbesserung aller Beiträge von der Rohfassung bis zur Fertigstellung geleistet.

Die Nicknamen der Autoren sind: *da_bounce*, *Diffform*, *Fabi*, *FlorianM*, *Gockel*, *matroid*, *pendragon302*, *shadowking*, *Siah* und *Ueli*. Sie wohnen weit verteilt: In

Berlin, Bonn, Hannover, München, Osnabrück, Rostock, Trier, Winterthur und Witten. Das macht aber nichts, denn der gemeinsame Ort für alle ist der Matheplanet.[1]

Mein großer Dank an *buh*, der die Korrektur der Orthografie und Sprache von der ersten bis zur letzten Seite übernommen hat. Großer Dank an *fru* für die wichtigen und stets präzisen inhaltlichen Korrekturvorschläge zu ausgewählten Kapiteln. Herzlichen Dank an *Ueli*, der bei der kollektiven Erstellung der Abbildungen große Teile übernommen hat. Großer Dank an *Siah*, der bei der Mehrzahl der Beiträge die fachliche Endkontrolle übernommen und vielfach selbst die Verbesserungen erarbeitet und vorgeschlagen hat.

Herzlichen Dank an alle Probeleser, die mal diesen, mal jenen Beitrag durchgesehen haben und die uns mit ihrer Beurteilung und Kritik viele wichtige und notwendige Hinweise zur Verbesserung geben konnten. Die Probeleser waren (in alphabetischer Reihenfolge): *hugoles*, *marvinius*, *mire2*, *rlk*, *SchuBi*, *Spock*, *trek*, *viertel*, *Wauzi* und noch mindestens einer, der ungenannt bleiben will. Mein Dank an *Stefan_K* und *Marco_D* für Ratschläge zum LaTeX-Satz. Besonderer Dank an *viertel*, der als Grafik-Berater in unserem Team war.

Bedanken möchte ich mich für die Idee und die Möglichkeit zu diesem Buch bei Herrn Dr. Rüdinger vom Spektrum Akademischer Verlag. Mein Dank auch für das Lektorat an Fr. Lühker. Es war eine stets angenehme Zusammenarbeit.

Abschließend mein Dank an alle, für die ich in den letzten Monaten weniger Zeit hatte und die mir dennoch in dieser oder jener positiven Weise ihre geistig-moralische Unterstützung gegeben haben.

Nicht jeder studiert Mathematik, aber es wäre schön, wenn der Matheplanet dazu beitrüge, dass die Anzahl der Menschen mit positiven Assoziationen zur Mathematik größer wird. Mancher soll später einmal sagen können: „Ich habe damals lange überlegt, aber dann wollte ich doch lieber das werden, was ich heute bin."

Matheplanet, im Juli 2009
Martin Wohlgemuth (also known as *Matroid*)

[1] Alle Angaben auf dem Stand von Juli 2009. Dies gilt auch für die Angabe zum Status (Student, Doktorand, ...), die mit dem Namen des jeweiligen Autors unter jedem Beitrag zu finden ist. Einige von uns sind heute weiter als damals, studieren nicht mehr, sondern sind im Beruf oder promovieren oder haben selbst das schon abgeschlossen.

Inhaltsverzeichnis