

Manfred Nitzsche

Graphen für Einsteiger

Rund um das Haus vom Nikolaus

3. Auflage

STUDIUM



VIEWEG+
TEUBNER

Manfred Nitzsche

Graphen für Einsteiger

Kombinatorische Optimierung erleben

von Stephan Hußmann und Brigitte Lutz-Westphal

Algebra für Einsteiger

von Jörg Bewersdorff

Algorithmik für Einsteiger

von Armin P. Barth

Diskrete Mathematik für Einsteiger

von A. Beutelspacher und Marc-Alexander Zschiegner

Finanzmathematik für Einsteiger

von Moritz Adelmeyer und Elke Warmuth

Graphen für Einsteiger

von Manfred Nitzsche

Stochastik für Einsteiger

von Norbert Henze

Zahlentheorie für Einsteiger

von Andreas Bartholomé, Josef Rung und Hans Kern

Zahlen für Einsteiger

von Jürg Kramer

Finanzmathematik im Unterricht

von Peggy Daume

Manfred Nitzsche

Graphen für Einsteiger

Rund um das Haus vom Nikolaus

3., überarbeitete und erweiterte Auflage

STUDIUM



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Manfred Nitzsche
Ritterhufen 20
14165 Berlin

E-Mail: manfred_nitzsche@gmx.de

1. Auflage 2004
2. Auflage 2005
3. Auflage 2009

Alle Rechte vorbehalten
© Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2009

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Nastassja Vanselow

Vieweg+Teubner ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0813-4

Vorwort

Liebe Leserin, lieber Leser!

Dies ist ein mathematisches Sachbuch. Es behandelt ein Thema der Mathematik, das Sie aus Ihrer Schulzeit wahrscheinlich nicht kennen, die Graphentheorie. Ihre Anfänge reichen zwar bis ins 18. Jahrhundert zurück, aber richtig intensiv haben sich die Mathematiker erst in den letzten Jahrzehnten mit diesem Teil der Mathematik beschäftigt. Wenn Sie dieses Buch lesen, befassen Sie sich also mit einem aktuellen Thema der Mathematik, und Sie werden auch auf Fragen stoßen, auf die heute noch niemand eine Antwort weiß.

Mathematik ist immer auch Spiel, natürlich ein Denkspiel. Dieser Aspekt kommt hier nicht zu kurz. Aber manches, was zunächst wie Spielerei aussieht, kann man nutzbringend verwerten, wie Sie sehen werden. Auch das Umgekehrte ist wahr: Viele Teile der Graphentheorie sind aus praktischen Bedürfnissen entstanden.

Braucht man Vorkenntnisse?

An einzelnen Stellen kommen Brüche und Klammerausdrücke vor, aber sonst brauchen Sie eigentlich keine mathematischen Vorkenntnisse. Am meisten wird bei der Untersuchung der platonischen Körper gerechnet, aber auch nur mit Brüchen, außerdem gibt es bei den chromatischen Polynomen einiges zu rechnen. Man kann diese Abschnitte auslassen und versteht den Rest trotzdem.

Wie liest man dieses Buch?

Im 1. Kapitel werden die grundlegenden Begriffe eingeführt, die später überall vorkommen. Damit sollten Sie anfangen. Danach können Sie das Buch Kapitel für Kapitel durcharbeiten. Es ist aber auch möglich in jedes andere Kapitel einzusteigen. Dabei werden Sie hin und wieder auf unbekannte Begriffe stoßen. Für diesen Fall ist die Liste der Definitionen („Was ist was?“) auf gelbem Papier am Ende des Buches gedacht.

Es darf nicht verschwiegen werden, dass jedes Mathematikbuch ein Arbeitsbuch ist. Sie sollten also bereit sein sich hin und wieder anzustrengen: Man muss nämlich die Begriffe genau kennen, um die Texte, in denen sie vorkommen, wirklich zu verstehen. Dazu dienen die Übungsaufgaben am Ende eines jeden Kapitels. Sie sollten einige von ihnen lösen. Suchen Sie sich die heraus, die Sie reizvoll finden! Lösungshinweise finden Sie jeweils nach den Aufgaben. Übrigens ist der Weg über Aufgaben und Anwendungen eine gute Möglichkeit in die Welt der Graphen einzudringen. Sie können deshalb auch versuchen, zuerst Aufgaben zu lösen und sich dann bei Bedarf die nötigen Informationen im vorangehenden Kapitel holen.

Das Wichtigste ist aber: Lassen Sie sich auf die hier vorgestellten Denkweisen ein, auch wenn es nicht immer einfach ist.

Ein Wort an die Mathe-Profis

Dies ist ein Mathematikbuch für Laien. Anders als in mathematischen Fachbüchern wird hier eher anschaulich vorgegangen. Wenn kein Fehler entstehen kann, werden manche Begriffe ohne exakte Definition benutzt, und auch die Beweise halten nicht an allen Stellen den strengen Augen eines professionellen Mathematikers stand. Das ist auch der Grund, warum ein Student, der sich von seinem Professor über Graphentheorie prüfen lassen möchte, dieses Buch gut zur Einstimmung und als Ergänzung lesen kann, sich aber dann ein richtiges Fachbuch vornehmen sollte.

Zusätzliche Informationen

Unter dieser Überschrift finden Sie am Ende der Kapitel präzisierende Hinweise. Sie sind für Leserinnen und Leser gedacht, denen die im Text angebotene Begriffsbildung oder die Beweisführung zu ungenau war. Vielleicht erhalten Sie wenigstens in einigen Punkten eine befriedigende Antwort. Aber es bleibt dabei: Lückenlose mathematische Strenge ist nicht das Ziel dieses Buchs, mathematisches Verstehen im Bereich der Graphen schon eher.

Hinweise für Lehrerinnen und Lehrer

Graphen bieten interessanten Stoff für einzelne Stunden, aber auch für längere Unterrichtseinheiten, und zwar in jeder Jahrgangsstufe, natürlich auch für Arbeitsgemeinschaften und Mathematik-Zirkel. Das Buch soll Ihnen – durch die im Vergleich zu Hochschul-Lehrbüchern vereinfachte Art der Darstellung und durch die große Zahl von Beispielen und Übungsaufgaben – die Unterrichtsvorbereitung erleichtern. Für Seminararbeiten in der Oberstufe und im Rahmen von selbstorganisiertem Lernen können sich aufgeweckte Schülerinnen und Schüler Teile von aktueller Mathematik selbst erarbeiten.

Mögliche Einstiege in das Thema können – wie in diesem Buch – bestimmte Linienzüge sein. Aber auch Probleme der Raum-Geometrie (GWE-Problem, platonische Körper) oder Färbungsaufgaben können am Anfang stehen oder auch das Einzige aus der Graphentheorie sein.

Eine Vereinfachung in der Begrifflichkeit und Formulierung mancher Sätze ergibt sich, wenn Sie das, was hier „einfacher Graph“ genannt wird, als „Graph“ bezeichnen. Bei Bedarf müssten Sie dann Graphen, die nicht einfach sind, „Multigraphen“ nennen. Der Königsberger Brückengraph ist dann bereits ein Multigraph. Diese Alternative ist besonders dann interessant, wenn Sie nicht vorhaben, mehr als die Themen „Körper“ oder „Farben“ zu behandeln.

Zu den hier angebotenen Aufgaben können Sie sich leicht anspruchsvollere Alternativen ausdenken, wenn die hier angebotenen Aufgaben zu einfach erscheinen.

Das Thema ist geeignet die kreativen Fähigkeiten der Schüler zu fördern und das Problemlösen zu üben. „Zeichne Graphen mit der Eigenschaft . . .?“ ist reizvoll genug und die Suche nach sämtlichen Lösungen ergibt sich oftmals von selbst. Manche Aufgaben lassen sich auch so umformulieren, dass sie offener sind und unterschiedliche Lösungen zulassen. Auch dass Schüler selbst Aufgaben erfinden, ist beim Thema „Graphentheorie“ sehr gut möglich.

Im Gegensatz zum erklärenden Teil kommen in den Aufgaben viele Zählaufgaben vor. Auch hier wird die kreative Seite der Schüler angesprochen: Sie müssen selbst geeignete Zählstrategien suchen. Man kann diese kombinatorische Seite der Graphentheorie noch ausbauen.

„Graphentheorie macht mehr Spaß als Mathe“, der Schüler, der das gesagt hat, hat wohl etwas nicht ganz verstanden, aber er drückt das aus, was viele Schüler im Unterricht über Graphen empfinden.

Danke!

Für geduldige fachliche Unterstützung danke ich Hans Mielke. Viele Verbesserungen von Formulierungen verdanke ich Birgit Mielke, und Reinhard Nitzsche danke ich für zahlreiche Computer-Hilfen. Viele Kolleginnen und Kollegen haben mich bei meiner Arbeit beraten und vor allem ermutigt. Dank auch an Leserinnen und Leser der 1. und 2. Auflage, die mich durch diverse Anfragen zu einigen Umformulierungen veranlasst haben, und an die Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter des Verlags Vieweg+Teubner für vielfältige Unterstützung.

Nicht zuletzt danke ich den Schülerinnen und Schülern des Beethoven-Gymnasiums in Berlin, die – ohne es zu wissen – mir manche Anregungen für Beispiele und Formulierungen gegeben haben.

Gegenüber der 1. und 2. Auflage enthält das Buch einige Ergänzungen und zusätzliche Aufgaben.

Und jetzt viel Spaß beim Lesen in einem Kapitel der aktuellen Mathematik!

Berlin, März 2009

Manfred Nitzsche

Inhaltsverzeichnis

1 Erste Graphen	1
Das Haus von Nikolaus	1
Was ist ein Graph?	2
Auch das ist bei Graphen möglich!	3
Der Grad einer Ecke	4
Verschiedene Graphen – gleiche Graphen?	4
Zusätzliche Informationen	9
Aufgaben	10
Lösungshinweise	14
2 Über alle Brücken: Eulersche Graphen	19
Das Königsberger Brückenproblem	19
Kantenzüge	21
Eulersche Graphen	21
Welche Graphen sind eulersch?	23
Praxis: Eulersche Touren finden	26
Zwei Folgerungen	27
Besuch eines Museums	28
Domino	29
Vollständige Vielecke	30
Zusätzliche Informationen	31
Aufgaben	31
Lösungshinweise	35
3 Durch alle Städte: Hamiltonsche Graphen	39
Reisepläne	39
Hamiltonsche Graphen	39
Hamiltonsch und eulersch	40
Hamiltonsche Kreise finden	41
Hamiltonsche Graphen neu zeichnen	42
... dann ist der Graph nicht hamiltonsch	43
Kreise und Wege	46
Wie viele hamiltonsche Kreise gibt es?	47
Reguläre Graphen	48
Für Schachspieler	48
Hamiltons Spiel	51
Sitzordnungen	52
Eine billige Rundreise	52
Ein vielleicht unlösbares Problem	53

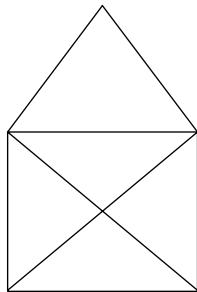
Gesucht: Bäcker mit Kenntnissen in Graphentheorie	54
Zusätzliche Informationen	55
Aufgaben	56
Lösungshinweise	62
4 Mehr über Grade von Ecken	71
Tennis-Turniere	71
Das handshaking lemma	72
Ecken mit ungeradem Grad	73
Jeder gegen jeden	74
Aufgaben	74
Lösungshinweise	75
5 Bäume	79
Was ist ein Baum?	79
Wege in Bäumen	81
Wie viele Kanten hat ein Baum?	82
„Äste absägen“	83
Aufspannende Bäume	84
Labyrinth, Irrgärten und Höhlen	86
Straßenbahnen, Fischteiche und Bindfäden	89
Eckengrade in Bäumen	90
Die billigsten Straßen	91
Der kürzeste Weg	92
Die kürzeste Tour des Briefträgers	96
Zusätzliche Informationen	98
Aufgaben	99
Lösungshinweise	103
6 Bipartite Graphen	109
Ein Frühstücksgraph	109
Bipartite Kreise	110
Können Bäume bipartit sein?	111
Bipartite Graphen erkennen	112
Bipartite Graphen für Schachspieler	114
Fachwerkhäuser	115
Heiratsvermittlung mit Graphen	118
Der Heiratssatz	120
Eine Folgerung aus dem Heiratssatz	120
Noch einmal: Der Frühstücksgraph	122
Schwierige Briefträgertouren	122
Zusätzliche Informationen	124
Aufgaben	124
Lösungshinweise	127

7 Graphen mit Richtungen: Digraphen	133
Was ist ein Digraph?	133
Alles hat eine Richtung	134
Wer hat gewonnen?	134
Isomorphie bei Digraphen	135
Lauter Einbahnstraßen	135
Nur noch Einbahnstraßen?	136
Eulersche Digraphen	139
Hamiltonsche Digraphen	139
Turniergraphen	139
Wer ist der beste Spieler?	140
Ranking kann fragwürdig sein	143
Jeder Spieler hat gewonnen!	143
Ein klarer Fall: Es gibt ein eindeutiges Ranking	144
Könige und Vizekönige	146
Hier ist jeder ein König!	147
Wolf, Ziege und Kohlkopf	149
Das Spiel Nim	150
Umfüllaufgaben	151
Graphen für Zahlen	152
Ein Spiel, das Sie gewinnen können	153
Zusätzliche Informationen	154
Aufgaben	155
Lösungshinweise	159
8 Körper und Flächen	165
Räumliche Graphen	165
Andere Wege vom Körper zum Graphen	168
Ebene und plättbare Graphen	168
Sind alle Graphen plättbar?	169
Elektrotechniker bevorzugen plättbare Graphen	174
Ebene Graphen haben Flächen	175
Die eulersche Formel	175
Zwei neue Beweise	177
Weitere Eigenschaften von Körpern aus der Sicht der Graphentheorie	178
Die platonischen Körper	179
Platonische Graphen	180
Es gibt nicht mehr als 5 platonische Graphen	181
Es gibt nur 5 platonische Körper	183
Platonische Körper auf Kugeln	184
Parkett-Fußboden	185
Zusätzliche Informationen	186
Aufgaben	188
Lösungshinweise	192

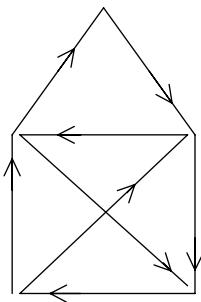
9 Farben	197
Farbige Landkarten	197
Aus Landkarten werden Graphen	198
Man kann auch Körper anmalen	200
Wir färben alle Graphen	201
Ampelschaltungen	203
Ein moderner Zoo	204
Das Problem mit den Museumswärtern	205
Die chromatische Zahl kann nicht größer sein als	207
Wie viele Farbmuster gibt es?	207
Chromatische Polynome für beliebige Graphen	211
Bekanntschaftsgraphen	215
Befreundet – bekannt – unbekannt	217
Kantenfärbung mit strengen Regeln	217
Der chromatische Index eines vollständigen Vielecks	218
Für den chromatischen Index kommen nur zwei Werte in Frage	220
Lateinische Quadrate und Sudoku-Rätsel	222
Zusätzliche Informationen	223
Aufgaben	225
Lösungshinweise	229
Was ist was?	237
Literatur	241
Stichwortverzeichnis	245

1 Erste Graphen

Das Haus vom Nikolaus



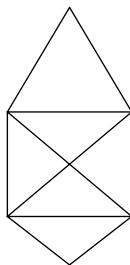
Kinder kennen dieses Bild. Man soll es zeichnen ohne den Stift abzusetzen und ohne eine Linie doppelt zu ziehen. Wer weiß, wie es geht, fängt links unten oder rechts unten an und er kann auch meist einen Spruch dazu aufsagen, zu jedem Strich eine Silbe: „Das - ist - das - Haus - vom - Ni - ko - laus.“



So kann man das Nikolaus-Haus zeichnen.

Wer aber die Lösung aus seiner Kinderzeit nicht mehr parat hat, kann sich leicht selbst überlegen, wo er anfangen muss: Es kann nur links oder rechts unten sein, weil nur dort drei Linien zusammentreffen. Alle anderen Punkte grenzen an zwei oder vier Linien; zu diesen Punkten kann man mit dem Stift hinkommen und von ihnen wieder weggehen, und dies ein- oder zweimal. In den beiden Punkten ganz unten fängt man an und dort hört man auch auf und geht außerdem noch einmal hindurch.

Einfacher wird die Aufgabe, wenn das Nikolaus-Haus noch einen „Keller“ bekommt, weil man dann anfangen kann, wo man will. Zum Schluss kehrt man zum Anfangspunkt zurück:

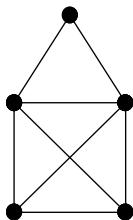


Ein Nikolaus-Haus mit Keller

Was ist ein Graph?

Das Nikolaus-Haus hat bereits alles, was ein Graph braucht: Es enthält Linien – man nennt sie Kanten; und diese Kanten werden von Punkten begrenzt – man nennt sie Ecken.

Unter einem **Graphen** verstehen wir also ein Gebilde, das aus **Ecken** und **Kanten** besteht. Jede Kante verbindet zwei Ecken. Es ist üblich, die Ecken als dicke Punkte zu zeichnen.

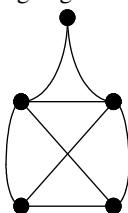


Ein Nikolaus-Haus als Graph gezeichnet

Unser Nikolaus-Haus hat also 5 Ecken und 8 Kanten. Der Punkt in der Mitte ist nur ein Kreuzungspunkt von zwei Kanten und zählt nicht als Ecke. Man könnte ihn hinzunehmen, aber dann ist es ein anderer Graph, nämlich einer mit 6 Ecken und 10 Kanten.

Statt „Ecken“ ist auch das Wort „Knoten“ gebräuchlich.

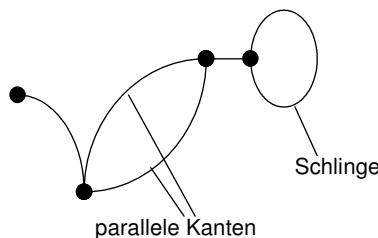
Wir haben die Kanten als gerade Strecken gezeichnet. Das ist aber nicht notwendig, sie könnten ebenso gebogen gezeichnet werden.



Ein etwas verändertes Nikolaus-Haus – aber derselbe Graph

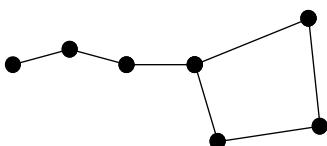
Auch das ist bei Graphen möglich!

In einem Graphen wird zwar jede Kante durch zwei Ecken begrenzt. Aber es ist nicht notwendig, dass jede Ecke mit jeder anderen Ecke verbunden ist. Zum Beispiel ist der höchste Punkt des Nikolaus-Hauses nicht mit den beiden Punkten ganz unten verbunden. Es ist aber erlaubt, dass es mehrere Kanten zwischen zwei Ecken gibt, sie heißen **parallele Kanten** (oder **Mehrfachkanten**). Es darf sogar eine Ecke mit sich selbst verbunden sein, die entsprechende Kante nennt man **Schlinge**. Die meisten Graphen, die wir hier betrachten, haben keine parallelen Kanten und keine Schlingen. Solche Graphen nennt man **einfache Graphen**. Das Haus des Nikolaus ist also einfach, während der folgende Graph nicht einfach ist.

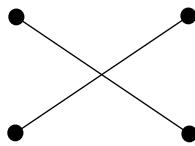


Ein Graph mit Besonderheiten

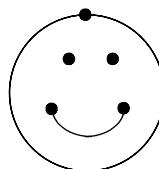
Unsere Festlegung des Begriffs des Graphen lässt es auch zu, dass eine Ecke überhaupt nicht mit einer weiteren Ecke verbunden ist. Eine solche Ecke heißt **isolierte Ecke**. Ja, es ist sogar möglich, dass ein Graph aus mehreren Teilen besteht, er ist dann nicht **zusammenhängend**. Die genaue Definition folgt später.



Ein zusammenhängender Graph



Ein nicht zusammenhängender Graph



Ein Graph mit zwei isolierten Ecken