Manfred Nitzsche

Graphen für Einsteiger

Rund um das Haus vom Nikolaus

3. Auflage

STUDIUM

VIEWEG+
TEUBNER

Manfred Nitzsche

Graphen für Einsteiger

Aus dem Programm **Mathematik für Schüler, Lehrer, Studierende**

Kombinatorische Optimierung erleben
von Stephan Hußmann und Brigitte Lutz-Westphal

Algebra für Einsteiger
von Jörg Bewersdorff

Algorithmik für Einsteiger
von Armin P. Barth

Diskrete Mathematik für Einsteiger
von A. Beutelspacher und Marc-Alexander Zschiegner

Finanzmathematik für Einsteiger
von Moritz Adelmeyer und Elke Warmuth

Graphen für Einsteiger
von Manfred Nitzsche

Stochastik für Einsteiger
von Norbert Henze

Zahlentheorie für Einsteiger
von Andreas Bartholomé, Josef Rung und Hans Kern

Zahlen für Einsteiger
von Jürg Kramer

Finanzmathematik im Unterricht
von Peggy Daume

www.viewegteubner.de

Manfred Nitzsche

Graphen für Einsteiger

Rund um das Haus vom Nikolaus

3., überarbeitete und erweiterte Auflage

STUDIUM

VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Manfred Nitzsche
Ritterhufen 20
14165 Berlin

E-Mail: manfred_nitzsche@gmx.de

1. Auflage 2004
2. Auflage 2005
3. Auflage 2009

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Nastassja Vanselow

Vieweg+Teubner ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0813-4

Vorwort

Liebe Leserin, lieber Leser!

Dies ist ein mathematisches Sachbuch. Es behandelt ein Thema der Mathematik, das Sie aus Ihrer Schulzeit wahrscheinlich nicht kennen, die Graphentheorie. Ihre Anfänge reichen zwar bis ins 18. Jahrhundert zurück, aber richtig intensiv haben sich die Mathematiker erst in den letzten Jahrzehnten mit diesem Teil der Mathematik beschäftigt. Wenn Sie dieses Buch lesen, befassen Sie sich also mit einem aktuellen Thema der Mathematik, und Sie werden auch auf Fragen stoßen, auf die heute noch niemand eine Antwort weiß.

Mathematik ist immer auch Spiel, natürlich ein Denkspiel. Dieser Aspekt kommt hier nicht zu kurz. Aber manches, was zunächst wie Spielerei aussieht, kann man nutzbringend verwerten, wie Sie sehen werden. Auch das Umgekehrte ist wahr: Viele Teile der Graphentheorie sind aus praktischen Bedürfnissen entstanden.

Braucht man Vorkenntnisse?

An einzelnen Stellen kommen Brüche und Klammerausdrücke vor, aber sonst brauchen Sie eigentlich keine mathematischen Vorkenntnisse. Am meisten wird bei der Untersuchung der platonischen Körper gerechnet, aber auch nur mit Brüchen, außerdem gibt es bei den chromatischen Polynomen einiges zu rechnen. Man kann diese Abschnitte auslassen und versteht den Rest trotzdem.

Wie liest man dieses Buch?

Im 1. Kapitel werden die grundlegenden Begriffe eingeführt, die später überall vorkommen. Damit sollten Sie anfangen. Danach können Sie das Buch Kapitel für Kapitel durcharbeiten. Es ist aber auch möglich in jedes andere Kapitel einzusteigen. Dabei werden Sie hin und wieder auf unbekannte Begriffe stoßen. Für diesen Fall ist die Liste der Definitionen („Was ist was?“) auf gelbem Papier am Ende des Buches gedacht.

Es darf nicht verschwiegen werden, dass jedes Mathematikbuch ein Arbeitsbuch ist. Sie sollten also bereit sein sich hin und wieder anzustrengen: Man muss nämlich die Begriffe genau kennen, um die Texte, in denen sie vorkommen, wirklich zu verstehen. Dazu dienen die Übungsaufgaben am Ende eines jeden Kapitels. Sie sollten einige von ihnen lösen. Suchen Sie sich die heraus, die Sie reizvoll finden! Lösungshinweise finden Sie jeweils nach den Aufgaben. Übrigens ist der Weg über Aufgaben und Anwendungen eine gute Möglichkeit in die Welt der Graphen einzudringen. Sie können deshalb auch versuchen, zuerst Aufgaben zu lösen und sich dann bei Bedarf die nötigen Informationen im vorangehenden Kapitel holen.

Das Wichtigste ist aber: Lassen Sie sich auf die hier vorgestellten Denkweisen ein, auch wenn es nicht immer einfach ist.

Ein Wort an die Mathe-Profis

Dies ist ein Mathematikbuch für Laien. Anders als in mathematischen Fachbüchern wird hier eher anschaulich vorgegangen. Wenn kein Fehler entstehen kann, werden manche Begriffe ohne exakte Definition benutzt, und auch die Beweise halten nicht an allen Stellen den strengen Augen eines professionellen Mathematikers stand. Das ist auch der Grund, warum ein Student, der sich von seinem Professor über Graphentheorie prüfen lassen möchte, dieses Buch gut zur Einstimmung und als Ergänzung lesen kann, sich aber dann ein richtiges Fachbuch vornehmen sollte.

Zusätzliche Informationen

Unter dieser Überschrift finden Sie am Ende der Kapitel präzisierende Hinweise. Sie sind für Leserinnen und Leser gedacht, denen die im Text angebotene Begriffsbildung oder die Beweisführung zu ungenau war. Vielleicht erhalten Sie wenigstens in einigen Punkten eine befriedigende Antwort. Aber es bleibt dabei: Lückenlose mathematische Strenge ist nicht das Ziel dieses Buchs, mathematisches Verstehen im Bereich der Graphen schon eher.

Hinweise für Lehrerinnen und Lehrer

Graphen bieten interessanten Stoff für einzelne Stunden, aber auch für längere Unterrichtseinheiten, und zwar in jeder Jahrgangsstufe, natürlich auch für Arbeitsgemeinschaften und Mathematik-Zirkel. Das Buch soll Ihnen – durch die im Vergleich zu Hochschul-Lehrbüchern vereinfachte Art der Darstellung und durch die große Zahl von Beispielen und Übungsaufgaben – die Unterrichtsvorbereitung erleichtern. Für Seminararbeiten in der Oberstufe und im Rahmen von selbstorganisiertem Lernen können sich aufgeweckte Schülerinnen und Schüler Teile von aktueller Mathematik selbst erarbeiten.

Mögliche Einstiege in das Thema können – wie in diesem Buch – bestimmte Linienzüge sein. Aber auch Probleme der Raum-Geometrie (GWE-Problem, platonische Körper) oder Färbungsaufgaben können am Anfang stehen oder auch das Einzige aus der Graphentheorie sein.

Eine Vereinfachung in der Begrifflichkeit und Formulierung mancher Sätze ergibt sich, wenn Sie das, was hier „einfacher Graph“ genannt wird, als „Graph“ bezeichnen. Bei Bedarf müssten Sie dann Graphen, die nicht einfach sind, „Multigraphen“ nennen. Der Königsberger Brückengraph ist dann bereits ein Multigraph. Diese Alternative ist besonders dann interessant, wenn Sie nicht vorhaben, mehr als die Themen „Körper“ oder „Farben“ zu behandeln.

Zu den hier angebotenen Aufgaben können Sie sich leicht anspruchsvollere Alternativen ausdenken, wenn die hier angebotenen Aufgaben zu einfach erscheinen.

Das Thema ist geeignet die kreativen Fähigkeiten der Schüler zu fördern und das Problemlösen zu üben. „Zeichne Graphen mit der Eigenschaft . . .?“ ist reizvoll genug und die Suche nach sämtlichen Lösungen ergibt sich oftmals von selbst. Manche Aufgaben lassen sich auch so umformulieren, dass sie offener sind und unterschiedliche Lösungen zulassen. Auch dass Schüler selbst Aufgaben erfinden, ist beim Thema „Graphentheorie“ sehr gut möglich.

Im Gegensatz zum erklärenden Teil kommen in den Aufgaben viele Zählaufgaben vor. Auch hier wird die kreative Seite der Schüler angesprochen: Sie müssen selbst geeignete Zählstrategien suchen. Man kann diese kombinatorische Seite der Graphentheorie noch ausbauen.

„Graphentheorie macht mehr Spaß als Mathe“, der Schüler, der das gesagt hat, hat wohl etwas nicht ganz verstanden, aber er drückt das aus, was viele Schüler im Unterricht über Graphen empfinden.

Danke!

Für geduldige fachliche Unterstützung danke ich Hans Mielke. Viele Verbesserungen von Formulierungen verdanke ich Birgit Mielke, und Reinhard Nitzsche danke ich für zahlreiche Computer-Hilfen. Viele Kolleginnen und Kollegen haben mich bei meiner Arbeit beraten und vor allem ermutigt. Dank auch an Leserinnen und Leser der 1. und 2. Auflage, die mich durch diverse Anfragen zu einigen Umformulierungen veranlasst haben, und an die Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter des Verlags Vieweg+Teubner für vielfältige Unterstützung.

Nicht zuletzt danke ich den Schülerinnen und Schülern des Beethoven-Gymnasiums in Berlin, die – ohne es zu wissen – mir manche Anregungen für Beispiele und Formulierungen gegeben haben.

Gegenüber der 1. und 2. Auflage enthält das Buch einige Ergänzungen und zusätzliche Aufgaben.

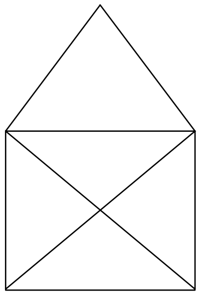
Und jetzt viel Spaß beim Lesen in einem Kapitel der aktuellen Mathematik!

Berlin, März 2009 Manfred Nitzsche

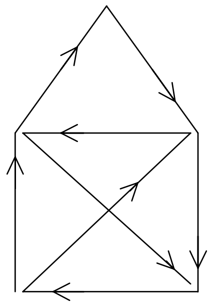
Inhaltsverzeichnis

1 Erste Graphen

Das Haus vom Nikolaus



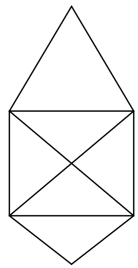
Kinder kennen dieses Bild. Man soll es zeichnen ohne den Stift abzusetzen und ohne eine Linie doppelt zu ziehen. Wer weiß, wie es geht, fängt links unten oder rechts unten an und er kann auch meist einen Spruch dazu aufsagen, zu jedem Strich eine Silbe: „Das - ist - das - Haus - vom - Ni - ko - laus."



So kann man das Nikolaus-Haus zeichnen.

Wer aber die Lösung aus seiner Kinderzeit nicht mehr parat hat, kann sich leicht selbst überlegen, wo er anfangen muss: Es kann nur links oder rechts unten sein, weil nur dort drei Linien zusammentreffen. Alle anderen Punkte grenzen an zwei oder vier Linien; zu diesen Punkten kann man mit dem Stift hinkommen und von ihnen wieder weggehen, und dies ein- oder zweimal. In den beiden Punkten ganz unten fängt man an und dort hört man auch auf und geht außerdem noch einmal hindurch.

Einfacher wird die Aufgabe, wenn das Nikolaus-Haus noch einen „Keller" bekommt, weil man dann anfangen kann, wo man will. Zum Schluss kehrt man zum Anfangspunkt zurück:

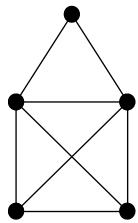


Ein Nikolaus-Haus mit Keller

Was ist ein Graph?

Das Nikolaus-Haus hat bereits alles, was ein Graph braucht: Es enthält Linien – man nennt sie Kanten; und diese Kanten werden von Punkten begrenzt – man nennt sie Ecken.

Unter einem **Graphen** verstehen wir also ein Gebilde, das aus **Ecken** und **Kanten** besteht. Jede Kante verbindet zwei Ecken. Es ist üblich, die Ecken als dicke Punkte zu zeichnen.

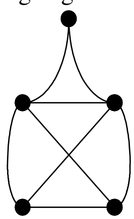


Ein Nikolaus-Haus als Graph gezeichnet

Unser Nikolaus-Haus hat also 5 Ecken und 8 Kanten. Der Punkt in der Mitte ist nur ein Kreuzungspunkt von zwei Kanten ist und zählt nicht als Ecke. Man könnte ihn hinzunehmen, aber dann ist es ein anderer Graph, nämlich einer mit 6 Ecken und 10 Kanten.

Statt „Ecken“ ist auch das Wort „Knoten“ gebräuchlich.

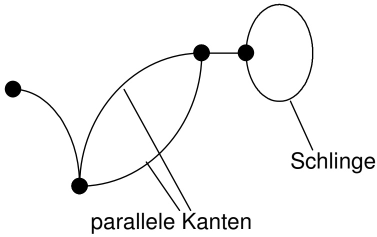
Wir haben die Kanten als gerade Strecken gezeichnet. Das ist aber nicht notwendig, sie könnten ebenso gebogen gezeichnet werden.



Ein etwas verändertes Nikolaus-Haus – aber derselbe Graph

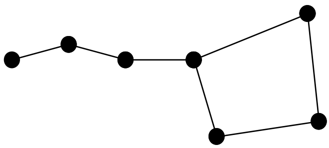
Auch das ist bei Graphen möglich!

In einem Graphen wird zwar jede Kante durch zwei Ecken begrenzt. Aber es ist nicht notwendig, dass jede Ecke mit jeder anderen Ecke verbunden ist. Zum Beispiel ist der höchste Punkt des Nikolaus-Hauses nicht mit den beiden Punkte ganz unten verbunden. Es ist aber erlaubt, dass es mehrere Kanten zwischen zwei Ecken gibt, sie heißen **parallele** Kanten (oder **Mehrfachkanten**). Es darf sogar eine Ecke mit sich selbst verbunden sein, die entsprechende Kante nennt man **Schlinge.** Die meisten Graphen, die wir hier betrachten, haben keine parallelen Kanten und keine Schlingen. Solche Graphen nennt man **einfache Graphen**. Das Haus des Nikolaus ist also einfach, während der folgende Graph nicht einfach ist.

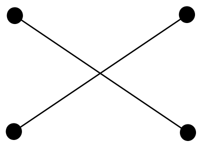


Ein Graph mit Besonderheiten

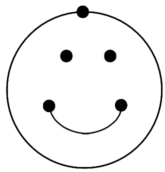
Unsere Festlegung des Begriffs des Graphen lässt es auch zu, dass eine Ecke überhaupt nicht mit einer weiteren Ecke verbunden ist. Eine solche Ecke heißt **isolierte Ecke**. Ja, es ist sogar möglich, dass ein Graph aus mehreren Teilen besteht, er ist dann nicht **zusammenhängend**. Die genaue Definition folgt später.



Ein zusammenhängender Graph



Ein nicht zusammenhängender Graph



Ein Graph mit zwei isolierten Ecken