Fredi Tröltzsch

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Theorie, Verfahren und Anwendungen

2. Auflage

STUDIUM

VIEWEG+TEUBNER

Fredi Tröltzsch

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Fredi Tröltzsch

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Theorie, Verfahren und Anwendungen

2., überarbeitete Auflage

STUDIUM

VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Prof. Dr. Fredi Tröltzsch
Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Straße des 17. Juni 136
10623 Berlin

E-Mail: troeltzsch@math.tu-berlin.de

1. Auflage 2005
2., überarbeitete Auflage 2009

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Nastassja Vanselow

Vieweg+Teubner ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0885-1

Vorwort

Die mathematische Optimierung von Vorgängen, die durch partielle Differentialgleichungen modelliert werden, hat in den letzten Jahren einen beachtlichen Aufschwung genommen. Die Verfügbarkeit immer besserer Computer ermöglichte neue interessante Anwendungen dieses Gebietes in der Praxis, etwa in Strömungsmechanik, Mikroelektronik, Kristallzüchtung, Gefäßchirurgie oder Herzmedizin, um nur einige Beispiele zu nennen. Im Zusammenhang damit ist das Interesse von Numerikern und Optimierern an der Verwendung ihrer Methoden in der Optimalsteuerung von partiellen Differentialgleichungen deutlich gestiegen und es gibt mehr Nachfrage von Studenten und Doktoranden der Mathematik nach einer Einführung in Grundideen der zugehörigen Theorie.

Heute existiert eine Reihe von Monographien zu verschiedenen Aspekten der optimalen Steuerung von partiellen Differentialgleichungen, insbesondere das bekannte Standardwerk von J.L. Lions [144], dem für Aufgaben mit linearen Gleichungen und konvexen Zielfunktionalen kaum etwas hinzuzufügen ist. Das Interesse am Skript meiner Vorlesungen zur optimalen Steuerung an den technischen Universitäten in Chemnitz und Berlin zeigte jedoch den Bedarf an einer Einführung in die Thematik in deutscher Sprache, die auch Aspekte der nichtlinearen Optimierung im Funktionenraum berücksichtigt.

Das vorliegende Buch soll diesem Anliegen entsprechen und den Leser befähigen, grundlegende Probleme bzw. Begriffe wie die Existenz von Lösungen gängiger linearer und semilinearer partieller Differentialgleichungen, Existenz optimaler Steuerungen, notwendige Optimalitätsbedingungen und adjungierte Gleichung, hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung sowie die Konzeption einfacher numerischer Verfahren zu verstehen. Dabei sind generell Schranken an die Steuerfunktionen zugelassen und teilweise auch Restriktionen an den Zustand des betrachteten Systems vorgegeben. Das sind die Schwerpunkte des Buchs. Weitere wichtige Fragestellungen wie Steuerbarkeit, Regelung und Riccati-Gleichungen, Diskretisierung und Fehlerabschätzungen oder Hamilton-Bellman-Jacobi-Theorie hätten den beabsichtigten Rahmen überschritten.

Der erste Teil behandelt konvexe Aufgaben mit quadratischem Zielfunktional und linearen elliptischen bzw. parabolischen Gleichungen und damit Resultate, die lange bekannt sind und umfassender in [144] dargestellt wurden. Zur Überleitung auf Probleme mit semilinearen Gleichungen sind aber diese Aufgaben am besten geeignet. Es werden auch einige Begriffe der Funktionalanalysis sowie der Theorie linearer elliptischer und parabolischer partieller Differentialgleichungen zusammengestellt, um Lesern das Verständnis zu erleichtern, die kaum Vorkenntnisse auf diesen Gebieten haben. Den Schwerpunkt der Darstellung bilden nichtkonvexe Aufgaben mit semilinearen Gleichungen. Sie erfordern Methoden aus Analysis, Optimierung und Numerik, die bisher vorrangig in Originalarbeiten zu finden sind. Dazu gehören insbesondere grundlegende Resultate von E. Casas sowie von J.-P. Raymond über die Beschränktheit und Stetigkeit von Lösungen semilinearer partieller Differentialgleichungen.

Das Buch konzentriert sich im Wesentlichen auf die Analysis der Probleme, obwohl auch numerische Verfahren angesprochen werden. Numerische Methoden könnten sicher ein weiteres Buch füllen. Die Darstellung beschränkt sich auf kurze Einführungen in entsprechende Grundideen, um dem Leser eine Vorstellung davon zu geben, wie man die Theorie vom Grundsatz her numerisch umsetzen kann. Großer Wert wird auf das Herausarbeiten versteckter mathematischer Schwierigkeiten gelegt, die man erfahrungsgemäß leicht übersieht.

Der gesamte Stoff ist für einen vierstündigen einsemestrigen Kurs zu umfangreich, so dass man Teile auswählen muss. Eine zu empfehlende Variante besteht im Durcharbeiten der gesamten elliptischen Theorie (linear-quadratisch und nichtlinear) bei Verzicht auf den parabolischen Teil. Eine solche Vorlesung könnte sich auf die Abschnitte 1.2–1.4, 2.3–2.10 und 2.12 zur linear-quadratischen sowie 4.1–4.6, 4.8–4.10 zur nichtlinearen Theorie konzentrieren. Die Kapitel zu elliptischen Problemen benötigen keine Resultate aus denen zu parabolischen Aufgaben.

Alternativ kann man sich auf linear-quadratische elliptische und parabolische Aufgaben beschränken und die Abschnitte 3.3–3.7 zur linear-quadratischen parabolischen Theorie hinzufügen. Bei hinreichenden Vorkenntnissen zu Funktionalanalysis und partiellen Differentialgleichungen ist aber ein größerer Umfang zu schaffen. Mit einem Stern gekennzeichnete Abschnitte sind für das Verständnis der nachfolgenden Kapitel nicht unbedingt erforderlich. Sie können daher bei Bedarf ausgelassen werden. Der Leser findet eine Reihe von Formeln eingerahmt. Das betrifft besonders wichtige Aussagen sowie die für den jeweiligen Abschnitt maßgebende partielle Differentialgleichung.

Die Arbeit am Buch fand das Interesse und die Unterstützung vieler Fachkollegen. Dazu gehören die Herren M. Hinze, P. Maaß sowie L. v. Wolfersdorf, die verschiedene Kapitel durchgesehen und zum Teil mit ihren Studenten bzw. Doktoranden behandelt haben. Herr W. Alt hat mir mit Hinweisen zur typographischen Gestaltung geholfen und den ersten Anstoß zum Buch gab Herr T. Grund mit einer in LATEX geschriebenen Vorlesungsmitschrift. Meine Berliner Kollegen C. Meyer, I. Neitzel, U. Prüfert, T. Slawig, D. Wachsmuth und I. Yousept haben schließlich die Endversion Korrektur gelesen. Allen Genannten bin ich für ihre Hilfe sehr dankbar. Außerdem danke ich Frau U. Schmickler-Hirzebruch und Frau P. Rußkamp vom Vieweg-Verlag für die sehr angenehme Zusammenarbeit bei der Vorbereitung und Umsetzung des Buchprojekts.

Berlin, April 2005

Vorwort zur zweiten Auflage. Neben der Korrektur von Schreibfehlern und Unsauberkeiten habe ich einige Passagen überarbeitet und ergänzt. Die Abschnitte zum Gradientenverfahren sind gekürzt, um der primal-dualen Aktive-Mengen-Strategie mehr Raum zu geben. Deren Darstellung führt jetzt bis auf die zu lösenden linearen Gleichungssysteme. Auf Wunsch mehrerer Leser werden die verwendeten Greenschen Funktionen mit der Fouriermethode hergeleitet. Manche Quellen sind detaillierter angegeben und einige aktuelle Referenzen zur numerischen Analysis zustandsbeschränkter Aufgaben hinzugefügt. In der Transliteration russischer Namen bevorzuge ich hier die englische Version.

Allen Lesern, die mich mit Hinweisen zu Fehlern und Verbesserungsvorschlägen unterstützt haben, danke ich herzlich, insbesondere Roland Griesse, Markus Müller, Hans Josef Pesch, Uwe Prüfert, Arnd Rösch und Lothar v. Wolfersdorf. Bei der Aktualisierung der Resultate zu partiellen Differentialgleichungen haben mich Eduardo Casas und Jens Griepentrog unterstützt, denen ich für ihre Hilfe sehr dankbar bin. Besonderer Dank gilt Jürgen Sprekels für die sorgfältige Übersetzung des Buchs ins Englische. Seine zahlreichen Anregungen sind auch in die zweite deutsche Auflage eingeflossen.

Berlin, April 2009.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Beispiele

1.1 Was ist optimale Steuerung?

Die mathematische Theorie der optimalen Steuerung hat sich im Zusammenhang mit Berechnungen für die Raumfahrt schnell zu einem wichtigen und eigenständigen Gebiet der angewandten Mathematik entwickelt. Die Bewegungsgleichungen von Luft- und Raumfahrzeugen werden durch Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen beschrieben und Aspekte der Optimierung kommen dann ins Spiel, wenn die Bewegungen der Flugkörper optimal ablaufen sollen.

Folgendes einfache akademische Beispiel verdeutlicht die Situation: Ein Fahrzeug soll auf einer geraden Strecke aus der Ruhelage in einem Punkt A heraus in kürzester Zeit nach Punkt B bewegt werden und dort wieder zum Stehen kommen. Das Fahrzeug kann dabei in beiden Richtungen mit der gleichen Kraft beschleunigt werden, etwa durch je ein nach vorn und hinten gerichtetes Düsentriebwerk. Bezeichnet $y(t) \in \mathbb{R}$ die Position des Fahrzeugs zur Zeit t, m seine Masse und $u(t)$ die Schubkraft des Fahrzeugs mit der Kapazität $-1 \leq u(t) \leq 1$ (+1: volle Kraft voraus, −1: Vollbremsung), dann lautet die Aufgabe mathematisch wie folgt:

Minimiere die Zeit T unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
m\,y''(t) &= u(t) \quad \text{in } (0,T)\\
y(0) &= y_0\\
y'(0) &= 0\\
\\
y(T) &= y_T\\
y'(T) &= 0, \qquad\qquad |u(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Die Punkte $y_0, y_T \in \mathbb{R}$ entsprechen den Positionen A, B. Dieses Beispiel wird im Lehrbuch von Macki und Strauss [154] als das *Problem des Raketenautos* bezeichnet. Es enthält die wesentlichen Bestandteile eines *Optimalsteuerungsproblems*. Das sind die zu minimierende *Zielfunktion*, hier die Fahrtzeit T, die den gesamten Bewegungsprozess modellierende Differentialgleichung $m\,y'' = u$ mit Anfangsbedingungen zur Bestimmung des *Zustands* y, eine *Steuerfunktion* u sowie zu erfüllende *Nebenbedingungen* $y(T) = y_T$, $y'(T) = 0$, $|u| \leq 1$. Die Steuerung u kann innerhalb der gegebenen Schranken frei gewählt werden (z.B. per Gaspedal im Raketenauto), während sich der Zustand in Abhängigkeit von der gewählten Steuerung eindeutig als Lösung der Differentialgleichung unter Beachtung der Anfangsbedingungen ergibt. Die Steuerung ist so zu wählen, dass die Zielfunktion den kleinsten Wert annimmt. Eine solche Steuerung heißt *optimal*. Beim Beispiel des Raketenautos ist diese intuitiv sofort zu ermitteln. Es wird daher gern zum

Testen der Theorie benutzt.

Optimale Steuerung bei gewöhnlichen Differentialgleichungen ist nicht nur für die Luft- und Raumfahrt von Interesse. Sie ist auch wichtig für die Robotik, für Bewegungsabläufe im Sport, für die Steuerung chemischer Prozesse oder die Kraftwerksoptimierung, um nur einige der vielfältigen Anwendungen zu nennen. Oft können die zu optimierenden Prozesse nicht adäquat durch gewöhnliche Differentialgleichungen modelliert werden, sondern es sind *partielle Differentialgleichungen* zu ihrer Beschreibung nötig. Beispielsweise werden Wärmeleitung, Diffusion, Schwingungen, elektromagnetische Wellen, Strömungen, Erstarrungsvorgänge und andere physikalische Phänomene durch partielle Differentialgleichungen erfasst.

Es gibt zahlreiche interessante Optimierungsprobleme, eine Zielfunktion bei Vorgabe einer partiellen Differentialgleichung unter weiteren Nebenbedingungen zu minimieren. Der Unterschied zum obigen Beispiel besteht „nur“ darin, dass an Stelle einer gewöhnlichen eine partielle Differentialgleichung gegeben ist. Im Buch treten als mathematisch vereinfachte Beispiele exemplarisch die optimale Steuerung von Aufheizungsprozessen, Zweiphasenproblemen sowie von Strömungen auf.

Die Vielfalt an Typen partieller Differentialgleichungen ist groß. Wir werden hier nur lineare und semilineare elliptische sowie parabolische partielle Differentialgleichungen zulassen. Die Regularität der Lösungen dieser Gleichungen ist gut untersucht. Bei hyperbolischen Differentialgleichungen liegen die Dinge anders. Auch die Behandlung quasilinearer partieller Differentialgleichungen ist deutlich schwieriger und die entsprechende Theorie der optimalen Steuerung noch in mancher Beziehung offen.

Wir behandeln am Anfang Probleme mit linearer Gleichung und quadratischem Zielfunktional. Im nächsten Abschnitt sind dazu einfache akademische Modellprobleme formuliert, die im Weiteren zur Illustration der Theorie immer wieder herangezogen werden. Für die linear-quadratische Theorie reichen Hilberträume aus, was das Arbeiten erleichtert. Der zweite Teil ist Aufgaben mit semilinearen Gleichungen gewidmet. Hier sind die Beispiele weniger akademisch. Bedingt durch die Nichtlinearitäten ist die Theorie aber komplizierter.

1.2 Beispiele konvexer Aufgaben

1.2.1 Optimale stationäre Aufheizung

Optimale Randtemperatur

Gegeben sei ein Ortsgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit Rand Γ, das für einen aufzuheizenden bzw. abzukühlenden Körper steht. An seinem Rand Γ wird eine zeitlich konstante, aber vom Randpunkt x abhängige Temperatur $u = u(x)$ - die Steuerung - angelegt. Ziel der Steuerung ist die bestmögliche Approximation einer vorgegebenen stationären Temperaturverteilung $y_\Omega = y_\Omega(x)$ in Ω. Diese Zielstellung führt auf das Problem

$$\min \; J(y,u) := \frac{1}{2} \int_\Omega \big(y(x) - y_\Omega(x)\big)^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_\Gamma u(x)^2 \, ds(x)$$

bei den Nebenbedingungen

$$\boxed{\begin{aligned} -\Delta y &= 0 && \text{in } \Omega \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} &= \alpha\,(u-y) && \text{auf } \Gamma \end{aligned}}$$

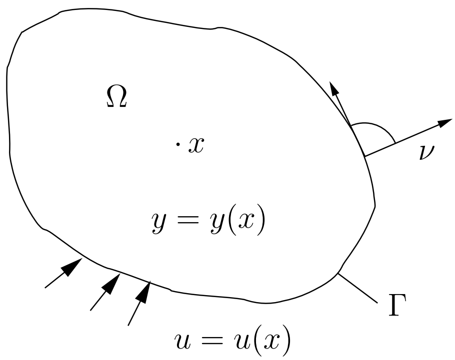
(*Zustandsgleichung*) sowie

$$u_a(x) \le u(x) \le u_b(x) \quad \text{auf } \Gamma$$

(*punktweise Beschränkungen an die Steuerung*).

Schranken an die Steuerung sind wegen beschränkter Aufheizungs- bzw. Abkühlungskapazität einzuhalten. Den Faktor λ kann man als Maß für die Energiekosten der Steuerung u interpretieren. Mathematisch gesehen dient dieser Term auch der Regularisierung. Er bewirkt, dass optimale Steuerungen bessere Glattheitseigenschaften aufweisen.

Wir bezeichnen generell mit ds das Oberflächenelement und mit $\nu = \nu(x)$ den nach außen gerichteten Normalenvektor auf Γ. Die Funktion α steht für die Wärmeübergangszahl von Ω in das umgebende Medium. Das zu minimierende Funktional J wird *Zielfunktional* genannt. Der hier enthaltene Faktor $1/2$ hat auf die optimale Lösung keinen Einfluss und wird nur aus Gründen der Zweckmäßigkeit gewählt. Er kompensiert später den Faktor 2, der sich aus der Ableitung ergibt. Gesucht ist eine optimale *Steuerung* $u = u(x)$ mit zugehörigem *Zustand* $y = y(x)$. Das auf den ersten Blick überflüssige Minuszeichen vor dem Laplace-Operator hat damit zu tun, dass $-\Delta$, aber nicht Δ koerziv ist.



Randsteuerung

Die Aufgabe hat ein quadratisches Zielfunktional, eine lineare elliptische partielle Differentialgleichung als Zustandsgleichung und eine Steuerung, die auf dem Rand des Ortsgebiets auftritt. Daher gehört dieses Problem zur Klasse der *linear-quadratischen elliptischen Randsteuerungsprobleme.*

Bemerkung. Die Aufgabenstellung ist stark vereinfacht. Beispielsweise muss bei realistischer Modellierung an Stelle der Laplacegleichung $\Delta y = 0$ die stationäre Wärmeleitungsgleichung $\operatorname{div}(a \operatorname{grad} y) = 0$ betrachtet werden, wobei der Koeffizient a von x und sogar von y abhängen kann. Im Fall $a = a(y)$ oder $a = a(x, y)$ liegt eine quasilineare partielle Differentialgleichung vor. Außerdem wird eine zeitlich instationäre Beschreibung oft sinnvoller sein.

Optimale Temperaturquelle

Analog kann die Steuerung als *Temperaturquelle im Gebiet* Ω wirken. Probleme dieser Art treten etwa bei der Aufheizung eines Körpers Ω durch elektromagnetische Induktion oder Mikrowellen auf. Die Randtemperatur sei zunächst gleich null. Dann erhalten wir die Aufgabe

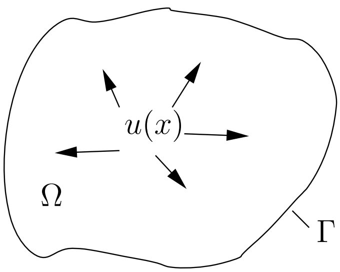
$$\min \ J(y,u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \big(y(x) - y_\Omega(x)\big)^2\,dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u(x)^2\,dx$$

bei

$$\boxed{\begin{array}{rcll} -\Delta y &=& \beta\, u & \text{in } \ \Omega \\ y &=& 0 & \text{auf } \Gamma \end{array}}$$

$$u_a(x) \le u(x) \le u_b(x) \quad \text{in } \Omega.$$

Hier ist zusätzlich ein Koeffizient $\beta = \beta(x)$ vorgegeben. Durch die Wahl $\beta = \chi_{\Omega_c}$ kann man u gegebenenfalls nur in einem Teilgebiet $\Omega_c \subset \Omega$ wirken lassen (χ_E ist die charakteristische Funktion einer Menge E). Die Aufgabe ist ein *linear-quadratisches elliptisches Steuerproblem mit verteilter Steuerung.*



Verteilte Steuerung

Anstatt die Randtemperatur mit null anzunehmen, kann die Vorgabe einer Außentemperatur y_a realistischer sein. Dann modelliert die Zustandsgleichung

$$\begin{array}{rcll} -\Delta y &=& \beta\, u & \text{in } \ \Omega \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu} &=& \alpha\,(y_a - y) & \text{auf } \Gamma \end{array}$$

den Sachverhalt besser.

1.2.2 Optimale instationäre Randtemperatur

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ stehe für eine Kartoffel, die wir im Feuer in fest vorgebener Zeit $T > 0$ braten wollen. Ihre Temperatur sei $y = y(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \in [0,T]$. Zu Beginn habe sie die Temperatur $y_0 = y_0(x)$ und zum Endzeitpunkt T ist eine mundgerechte Temperaturverteilung y_Ω gewünscht. Im Weiteren verwenden wir generell die Bezeichnungen $Q := \Omega \times (0,T)$ sowie $\Sigma := \Gamma \times (0,T)$. Die Aufgabe lautet damit

$$\min \ J(y,u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \big(y(x,T) - y_\Omega(x)\big)^2\,dx + \frac{\lambda}{2}\int_0^T\!\!\int_\Gamma u(x,t)^2\,ds(x)\,dt$$

$$\boxed{\begin{array}{rcll} y_t - \Delta y &=& 0 & \text{in } Q \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu} &=& \alpha\,(u - y) & \text{in } \Sigma \\ y(x,0) &=& y_0(x) & \text{in } \Omega \end{array}}$$

$$u_a(x,t) \leq u(x,t) \leq u_b(x,t) \quad \text{in } \Sigma.$$

Durch laufendes Drehen des Bratspießes erzeugen wir uns $u(x,t)$. Die Aufheizung wird nun durch die *instationäre Wärmeleitungsgleichung* beschrieben, eine parabolische Differentialgleichung. Es liegt ein *linear-quadratisches parabolisches Randsteuerungsproblem* vor. Hier und im Weiteren bezeichnet y_t die partielle Ableitung von y nach t.

1.2.3 Optimales Schwingen

Eine Gruppe von Fußgängern läuft über eine Brücke und regt sie (offenbar gezielt) zum Schwingen an. Stark abstrahiert ergibt sich folgende Konstellation: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist das Gebiet der Brücke, $y = y(x,t)$ deren vertikale Auslenkung, $u = u(x,t)$ die vertikal wirkende Kraftdichte und $y_d = y_d(x,t)$ ein gewünschter Schwingungsverlauf. Es ergibt sich die Optimalsteuerungsaufgabe

$$\min\ J(y,u) := \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \big(y(x,t) - y_d(x,t)\big)^2\,dx\,dt + \frac{\lambda}{2}\int_0^T\int_\Omega u(x,t)^2\ dx\,dt$$

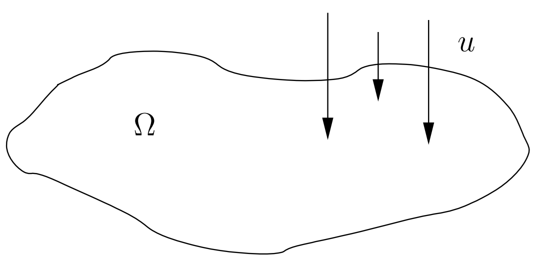
bei

$$\begin{aligned} y_{tt} - \Delta y &= u && \text{in } Q\\ y(0) &= y_0 && \text{in } \Omega\\ y_t(0) &= y_1 && \text{in } \Omega\\ y &= 0 && \text{in } \Sigma \end{aligned}$$

sowie

$$u_a(x,t) \leq u(x,t) \leq u_b(x,t) \quad \text{in } Q.$$

Das ist ein *linear-quadratisches hyperbolisches Steuerproblem mit verteilter Steuerung.* Hyperbolische Probleme behandeln wir hier nicht und verweisen auf das Standardwerk von Lions [144] sowie auf Ahmed und Teo [4]. Interessante Probleme der Beeinflussung schwingender elastischer Netzwerke werden durch Lagnese et al. [136] behandelt. Eine elementare Einführung in die Steuerbarkeit von Schwingungen findet man in Krabs [127].



Anregung von Schwingungen

Im linear-quadratischen Fall hat die Theorie hyperbolischer Aufgaben viele Analogien zu parabolischen Problemen, die in diesem Buch ausführlich behandelt werden. Semilineare hyperbolische Probleme sind aber wegen schwacher Glättungseigenschaften der Lösungsoperatoren deutlich schwieriger. Ein Teil der im Buch verwendeten Methoden geht bei ihnen nicht durch.