Klemens Burg | Herbert Haf
Friedrich Wille | Andreas Meister

# Vektoranalysis

Höhere Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker

2. Auflage

STUDIUM

Springer Vieweg

# Vektoranalysis

Klemens Burg • Herbert Haf
Friedrich Wille • Andreas Meister

# Vektoranalysis

## Höhere Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker

2., überarbeitete Auflage

Bearbeitet von
Prof. Dr. rer. nat. Herbert Haf, Universität Kassel
Prof. Dr. rer. nat. Andreas Meister, Universität Kassel

STUDIUM

Springer Vieweg

Klemens Burg,
Herbert Haf,
Friedrich Wille,
Andreas Meister,
Kassel, Deutschland

ISBN 978-3-8348-1851-5 ISBN 978-3-8348-8346-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-8348-8346-9

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Vieweg


*Planung und Lektorat:* Ulrich Sandten, Kerstin Hoffmann
*Einbandentwurf:* KünkelLopka GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.springer-vieweg.de

# Vorwort

Der vierte Band unseres Gesamtwerkes »Höhere Mathematik für Ingenieure« beinhaltete bisher die beiden Themenbereiche »Vektoranalysis« und »Funktionentheorie«. Da kein zwingender Grund besteht, diese Gebiete in einem Band zusammenzufassen, haben wir sie neu strukturiert durch zwei eigenständige Bände. Dies wirkt sich zum einen günstig auf die Preisgestaltung aus. Zum anderen möchten wir den Leserkreis erweitern: Neben der für uns nach wie vor wichtigen Zielgruppe der Ingenieurstudenten wenden wir uns gezielt auch an Studierende der Naturwissenschaften und der Angewandten Mathematik.

Gegenstand dieses Bandes ist die Vektoranalysis, die vielfältige Anwendungen, etwa in der Strömungsmechanik und der Elektrodynamik, ermöglicht. Insbesondere bei der Herleitung von partiellen Differentialgleichungen, wie der Kontinuitätsgleichung, der Wärmeleitungsgleichung, den Maxwellschen Gleichungen erweisen sich die Integralsätze der Vektoranalysis (s. Abschn. 3) als unentbehrliches Hilfsmittel. Dies lässt sich z.B. in Burg/Haf/Wille (Partielle Dgln.) [13], Abschnitt 4.1.3, nachlesen.

Wir beginnen diesen Band mit einem ausführlichen Kapitel über Kurven. Neben differentialgeometrischen Eigenschaften, wie Bogenlänge, Krümmung, Torsion usw. sowie dem Zusammenhang mit Potentialen, sind zwei größere Abschnitte den ebenen Kurven gewidmet. Hier werden Beispiele, die für den Ingenieur wichtig sind, detailliert beschrieben: Kegelschnitte, Rollkurven, Spiralen usw. Es folgen Flächen und Flächenintegrale, eingebettet in den dreidimensionalen Raum, und dann das Herzstück: die Integralsätze von Gauß, Stokes und Green im Dreidimensionalen. Hier wurde zur anschaulichen Beschreibung und Motivation oft auf Strömungen zurückgegriffen. Weitere Differential- und Integralformeln, sowie die Erörterung von Potentialen bei wirbel- oder quellfreien Feldern vervollständigen das Kapitel, so dass Ingenieure, Physiker und Angewandte Mathematiker dort alles finden, was sie in diesem Zusammenhang brauchen. Ein Kapitel über alternierende Differentialformen, wobei auf besonders verständliche Darstellungsweise geachtet wurde, und ein Kapitel über kartesische Tensoren beschließen diesen Band. Die Beschränkung auf kartesische Tensoren ist einerseits aus Platzgründen angebracht, andererseits aber auch deshalb, weil allgemeine Tensoren fast nur in der Relativitätstheorie angewendet werden. Die leichter fasslichen kartesischen Tensoren sind genau diejenigen, die in der Elastizitätslehre, der Strömungsmechanik und Elektrodynamik gebraucht werden.

Noch ein Wort zur Sprache und zum Aufbau!

Wir haben versucht, uns von folgendem Prinzip leiten zu lassen:

> *»Die Sachverhalte sollen in der Reihenfolge aufgeschrieben werden, in der sie gedacht werden!«*

Dazu ein Beispiel: Bei der Behandlung des Stokesschen Integralsatzes wird sogleich mit einer umgangssprachlichen Formulierung des Satzes begonnen, die auf Strömungen von Flüssigkeiten fußt. Über die Zirkulation in Flüssigkeiten und Verwandtes werden dann nach und nach Begriffe motiviert und präzisiert, bis sich nach einer heuristischen Argumentation der genaue Wortlaut des Stokesschen Satzes ergibt. Auf diese Weise wurde die »natürliche« Gedankenfolge des »Suchens und Findens« entwickelt, wobei die exakte Formulierung am Schluss steht. Das Lernen von Hilfssätzen »auf Vorrat« wurde dadurch vermieden.

Wir hoffen, dass insgesamt ein verständlicher Text entstanden ist. Rücksichtnahme auf den Anwender von Mathematik war uns dabei ein Anliegen, ohne jedoch die mathematische Genauigkeit preiszugeben.

Die ursprüngliche Fassung der »Vektoranalysis« geht auf Friedrich Wille zurück, der am 9. August 1992 verstorben ist. Die vorliegende Neuauflage, insbesondere die Fehlerkorrektur, wurde von Herbert Haf bearbeitet.

Zum Schluss danken wir allen, die uns bei diesem Band unterstützt haben: Herrn Dr.-Ing. Jörg Barner für die Erstellung der hervorragenden LaTeX-Vorlage und sein sorgfältiges Mitdenken. Nicht zuletzt danken wir dem Verlag B.G. Teubner für die ausgezeichnete Zusammenarbeit und für das ansprechend gewählte Layout dieses Buches.

Kassel, Juni 2006 *Herbert Haf*

**Vorwort zur zweiten Auflage**

Die vorliegende zweite Auflage dieses Bandes enthält nur kleine Veränderungen. Neben der Beseitigung von Druckfehlern haben wir das Herzstück der Vektoranalysis, die Integralsätze von Gauß und Stokes, etwas mehr ins Blickfeld der Anwendungen gerückt, insbesondere ihren Stellenwert bei der Herleitung partieller Differentialgleichungen (s. Abschn. 3.3.4). Die Verfasser hoffen nun, dass dieser Band unseres sechsteiligen Gesamtwerkes *Mathematik für Ingenieure* auch weiterhin eine freundliche Aufnahme durch die Leser findet. Für Anregungen sind wir dankbar. Unserer Dank gilt in diesem Sinne insbesondere einem aufmerksamen Leser aus Österreich, der uns bei der Fehlersuche sehr unterstützt hat. Dem Vieweg+Teubner-Verlag danken wir herzlich für die bewährte und angenehme Zusammenarbeit.

Kassel, Oktober 2011 *Herbert Haf, Andreas Meister*

# Inhaltsverzeichnis


**1 Kurven** **1**
1.1 Wege, Kurven, Bogenlänge . . . 1
1.1.1 Einführung: Ebene Kurven . . . 1
1.1.2 Kurven im $\mathbb{R}^n$ . . . 5
1.1.3 Glatte und stückweise glatte Kurven . . . 9
1.1.4 Die Bogenlänge . . . 11
1.1.5 Parametertransformation, Orientierung . . . 16
1.2 Theorie ebener Kurven . . . 20
1.2.1 Bogenlänge und umschlossene Fläche . . . 20
1.2.2 Krümmung und Krümmungsradius . . . 24
1.2.3 Tangenteneinheitsvektor, Normalenvektor, natürliche Gleichung . . . 27
1.2.4 Evolute und Evolvente . . . 30
1.3 Beispiele ebener Kurven I: Kegelschnitte . . . 33
1.3.1 Kreis . . . 33
1.3.2 Ellipse . . . 37
1.3.3 Hyperbel . . . 40
1.3.4 Parabel . . . 44
1.3.5 Allgemeine Kegelschnittgleichung, Hauptachsentransformation . . . 49
1.4 Beispiele ebener Kurven II: Rollkurven, Blätter, Spiralen . . . 55
1.4.1 Zykloiden . . . 55
1.4.2 Epizykloiden . . . 56
1.4.3 Anwendung: Wankelmotor . . . 60
1.4.4 Hypozykloiden . . . 63
1.4.5 Blattartige Kurven . . . 66
1.4.6 Kurbelgetriebe . . . 70
1.4.7 Spiralen . . . 71
1.5 Theorie räumlicher Kurven . . . 76
1.5.1 Krümmung, Torsion und begleitendes Dreibein . . . 76
1.5.2 Berechnung von Krümmung, Torsion und Dreibein in beliebiger Parameterdarstellung . . . 79
1.5.3 Natürliche Gleichungen und Frenetsche Formeln . . . 83
1.6 Vektorfelder, Potentiale, Kurvenintegrale . . . 86
1.6.1 Vektorfelder und Skalarfelder . . . 86
1.6.2 Kurvenintegrale . . . 89
1.6.3 Der Kurvenhauptsatz . . . 93
1.6.4 Potentialkriterium . . . 96
1.6.5 Berechnung von Potentialen . . . 100
1.6.6 Beweis des Potentialkriteriums . . . 104

**2 Flächen und Flächenintegrale** **109**
2.1 Flächenstücke und Flächen . . . 109
2.1.1 Flächenstücke . . . 109
2.1.2 Tangentialebenen, Normalenvektoren . . . 112
2.1.3 Parametertransformation, Orientierung . . . 115
2.1.4 Flächen . . . 118
2.2 Flächenintegrale . . . 119
2.2.1 Flächeninhalt . . . 119
2.2.2 Flächenintegrale erster und zweiter Art . . . 122
2.2.3 Transformationsformel für Flächenintegrale zweiter Art . . . 126

**3 Integralsätze** **129**
3.1 Der Gaußsche Integralsatz . . . 129
3.1.1 Ergiebigkeit, Divergenz . . . 129
3.1.2 Der Gaußsche Integralsatz für Bereiche mit stückweise glattem Rand . . . 134
3.1.3 Die Kettenregel der Divergenz . . . 136
3.1.4 Beweis des Gaußschen Integralsatzes für Bereiche mit stückweise glattem Rand 138
3.1.5 Gaußscher und Greenscher Integralsatz in der Ebene . . . 141
3.1.6 Der Gaußsche Integralsatz für Skalarfelder . . . 144
3.2 Der Stokessche Integralsatz . . . 147
3.2.1 Einfache Flächenstücke . . . 147
3.2.2 Zirkulation, Wirbelstärke, Rotation . . . 148
3.2.3 Idee des Stokesschen Integralsatzes . . . 153
3.2.4 Stokesscher Integralsatz im dreidimensionalen Raum . . . 154
3.2.5 Zirkulation und Stokesscher Satz in der Ebene . . . 158
3.3 Weitere Differential- und Integralformeln im $\mathbb{R}^3$ . . . 159
3.3.1 Nabla-Operator . . . 160
3.3.2 Formeln über Zusammensetzungen mit grad, div und rot . . . 160
3.3.3 Gaußscher und Stokesscher Satz in div-, grad-, rot-, und Nabla-Form . . . 162
3.3.4 Eine Anwendung auf partielle Differentialgleichungen . . . 164
3.3.5 Partielle Integration . . . 165
3.3.6 Die beiden Greenschen Integralformeln . . . 166
3.3.7 Krummlinige orthogonale Koordinaten . . . 167
3.3.8 Die Differentialoperatoren grad, div, rot, $\Delta$ in krummlinigen orthogonalen Koordinaten . . . 171
3.4 Wirbelfreiheit, Quellfreiheit, Potentiale . . . 175
3.4.1 Wirbelfreiheit: rot $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$, skalare Potentiale . . . 175
3.4.2 Laplace-Gleichung, harmonische Funktionen . . . 177
3.4.3 Poissongleichung . . . 179
3.4.4 Quellfreiheit: div $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{0}$, Vektorpotentiale . . . 181
3.4.5 Quellfreie Vektorpotentiale . . . 184
3.4.6 Helmholtzscher Zerlegungssatz . . . 186

**4 Alternierende Differentialformen** **189**
4.1 Alternierende Differentialformen im $\mathbb{R}^3$ . . . 189

4.1.1 Integralsätze in Komponentenschreibweise . . . . . . . . . . 189
4.1.2 Differentialformen und totale Differentiale . . . . . . . . . . 191
4.1.3 Rechenregeln für Differentialformen . . . . . . . . . . 193
4.1.4 Integration von Differentialformen, Integralsätze . . . . . . . . . . 196
4.2 Alternierende Differentialformen im $\mathbb{R}^n$ . . . . . . . . . . 198
4.2.1 Definition, Rechenregeln . . . . . . . . . . 198
4.2.2 Integrale über $p$-dimensionalen Flächen . . . . . . . . . . 200
4.2.3 Transformationsformel für Integrale . . . . . . . . . . 201
4.2.4 Der allgemeine Stokessche Satz . . . . . . . . . . 202

**5 Kartesische Tensoren** **205**
5.1 Tensoralgebra . . . . . . . . . . 205
5.1.1 Motivation: Spannungstensor . . . . . . . . . . 205
5.1.2 Definition kartesischer Tensoren . . . . . . . . . . 206
5.1.3 Rechenregeln für Tensoren . . . . . . . . . . 211
5.1.4 Invariante Tensoren . . . . . . . . . . 214
5.1.5 Diagonalisierung symmetrischer Tensoren und das Tensorellipsoid . . . . . . . 217
5.2 Tensoranalysis . . . . . . . . . . 220
5.2.1 Differenzierbare Tensorfelder, Fundamentalsatz der Feldtheorie . . . . . . . . 220
5.2.2 Zusammenhang zwischen Tensorgradienten und grad, div, rot, $\Delta$ . . . . . . . . 222
5.2.3 Der Gaußsche Satz für Tensorfelder zweiter Stufe . . . . . . . . . . 224
5.2.4 Anwendungen . . . . . . . . . . 225

**Lösungen zu den Übungen** **231**

**Symbole** **237**

**Literaturverzeichnis** **239**

**Stichwortverzeichnis** **243**

## Band I: Analysis (F. Wille†, bearbeitet von H. Haf, A. Meister)


**1 Grundlagen**

1.1 Reelle Zahlen
1.2 Elementare Kombinatorik
1.3 Funktionen
1.4 Unendliche Folgen reeller Zahlen
1.5 Unendliche Reihen reeller Zahlen
1.6 Stetige Funktionen

**2 Elementare Funktionen**

2.1 Polynome
2.2 Rationale und algebraische Funktionen
2.3 Trigonometrische Funktionen
2.4 Exponentialfunktionen, Logarithmus, Hyperbelfunktionen
2.5 Komplexe Zahlen

**3 Differentialrechnung einer reellen Variablen**

3.1 Grundlagen der Differentialrechnung
3.2 Ausbau der Differentialrechnung
3.3 Anwendungen

**4 Integralrechnung einer reellen Variablen**

4.1 Grundlagen der Integralrechnung
4.2 Berechnung von Integralen
4.3 Uneigentliche Integrale
4.4 Anwendung: Wechselstromrechnung

**5 Folgen und Reihen von Funktionen**

5.1 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen
5.2 Potenzreihen
5.3 Der Weierstraß'sche Approximationssatz
5.4 Interpolation
5.5 Fourierreihen

**6 Differentialrechnung mehrerer reeller Variabler**

6.1 Der $n$-dimensionale Raum $\mathbb{R}^n$
6.2 Abbildungen im $\mathbb{R}^n$
6.3 Differenzierbare Abbildungen von mehreren Variablen
6.4 Gleichungssysteme, Extremalprobleme, Anwendungen

**7 Integralrechnung mehrerer reeller Variabler**

7.1 Integration bei zwei Variablen
7.2 Allgemeinfall: Integration bei mehreren Variablen
7.3 Parameterabhängige Integrale

## Band II: Lineare Algebra (F. Wille†, H. Haf, K. Burg†, A. Meister)

**1 Vektorrechnung in zwei und drei Dimensionen**

1.1 Vektoren in der Ebene
1.2 Vektoren im dreidimensionalen Raum

**2 Vektorräume beliebiger Dimensionen**

2.1 Die Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$
2.2 Lineare Gleichungssysteme, Gaußscher Algorithmus
2.3 Algebraische Strukturen: Gruppen und Körper
2.4 Vektorräume über beliebigen Körpern

**3 Matrizen**

3.1 Definition, Addition, $s$-Multiplikation
3.2 Matrizenmultiplikation
3.3 Reguläre und inverse Matrizen
3.4 Determinanten
3.5 Spezielle Matrizen
3.6 Eigenwerte und Eigenvektoren
3.7 Die Jordansche Normalform
3.8 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen
3.9 Matrix-Funktionen
3.10 Drehungen, Spiegelungen, Koordinatentransformationen
3.11 Lineare Ausgleichsprobleme

**4 Anwendungen**

4.1 Technische Strukturen
4.2 Roboter-Bewegung

## Band III: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen (H. Haf, A. Meister)

### Gewöhnliche Differentialgleichungen

**1 Einführung in die gewöhnlichen Differentialgleichungen**

1.1 Was ist eine Differentialgleichung?
1.2 Differentialgleichungen 1-ter Ordnung

1.3 Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme 1-ter Ordnung
1.4 Ebene autonome Systeme

**2 Lineare Differentialgleichungen**

2.1 Lösungsverhalten
2.2 Homogene lineare Systeme 1-ter Ordnung
2.3 Inhomogene lineare Systeme 1-ter Ordnung
2.4 Lineare Differentialgleichungen $n$-ter Ordnung

**3 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**

3.1 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung
3.2 Lineare Systeme 1-ter Ordnung

**4 Potenzreihenansätze und Anwendungen**

4.1 Potenzreihenansätze
4.2 Verallgemeinerte Potenzreihenansätze

**5 Rand- und Eigenwertprobleme. Anwendungen**

5.1 Rand- und Eigenwertprobleme
5.2 Anwendung auf eine partielle Differentialgleichung
5.3 Anwendung auf ein nichtlineares Problem (Stabknickung)

**Distributionen**

**6 Verallgemeinerung des klassischen Funktionsbegriffs**

6.1 Motivierung und Definition
6.2 Distributionen als Erweiterung der klassischen Funktionen

**7 Rechnen mit Distributionen. Anwendungen**

7.1 Rechnen mit Distributionen
7.2 Anwendungen

**Integraltransformationen**

**8 Fouriertransformation**

8.1 Motivierung und Definition
8.2 Umkehrung der Fouriertransformation
8.3 Eigenschaften der Fouriertransformation
8.4 Anwendung auf partielle Differentialgleichungsprobleme
8.5 Diskrete Fouriertransformation

**9 Laplacetransformation**

9.1 Motivierung und Definition

9.2 Umkehrung der Laplacetransformation
9.3 Eigenschaften der Laplacetransformation
9.4 Anwendungen auf gewöhnliche lineare Differentialgleichungen

**10 $\mathfrak{Z}$-Transformation**

10.1 Motivierung und Definition
10.2 Eigenschaften der $\mathfrak{Z}$-Transformation
10.3 Anwendungen auf gewöhnliche lineare Differentialgleichungen

## Band Funktionentheorie: (H. Haf)

**1 Grundlagen**
1.1 Komplexe Zahlen
1.2 Funktionen einer komplexen Variablen

**2 Holomorphe Funktionen**

2.1 Differenzierbarkeit im Komplexen, Holomorphie
2.2 Komplexe Integration
2.3 Erzeugung holomorpher Funktionen durch Grenzprozesse
2.4 Asymptotische Abschätzungen

**3 Isolierte Singularitäten, Laurent-Entwicklung**

3.1 Laurentreihen
3.2 Residuensatz und Anwendungen

**4 Konforme Abbildungen**

4.1 Einführung in die Theorie konformer Abbildungen
4.2 Anwendungen auf die Potentialtheorie

**5 Anwendung der Funktionentheorie auf die Besselsche Differentialgleichung**

5.1 Die Besselsche Differentialgleichung
5.2 Die Besselschen und Neumannschen Funktionen
5.3 Anwendungen

## Band Partielle Differentialgleichungen und funktionalanalytische Grundlagen: (H. Haf, A. Meister)

## Funktionalanalysis

**1 Grundlegende Räume**
1.1 Metrische Räume

1.2 Normierte Räume. Banachräume
1.3 Skalarprodukträume. Hilberträume

**2 Lineare Operatoren in normierten Räumen**
2.1 Beschränkte lineare Operatoren
2.2 Fredholmsche Theorie in Skalarprodukträumen
2.3 Symmetrische vollstetige Operatoren

**3 Der Hilbertraum $L_2(\Omega)$ und zugehörige Sobolevräume**
3.1 Der Hilbertraum $L_2(\Omega)$
3.2 Sobolevräume

## Partielle Differentialgleichungen

**4 Einführung**
4.1 Was ist eine partielle Differentialgleichung?
4.2 Lineare partielle Differentialgleichungen 1-ter Ordnung
4.3 Lineare partielle Differentialgleichungen 2-ter Ordnung
4.4 Der Reynoldsche Transportsatz

**5 Helmholtzsche Schwingungsgleichung und Potentialgleichung**
5.1 Grundlagen
5.2 Ganzraumprobleme
5.3 Randwertprobleme
5.4 Ein Eigenwertproblem der Potentialtheorie
5.5 Einführung in die Finite-Elemente-Methode (F. Wille†)

**6 Die Wärmeleitungsgleichung**
6.1 Rand- und Anfangswertprobleme
6.2 Ein Anfangswertproblem

**7 Die Wellengleichung**
7.1 Die homogene Wellengleichung
7.2 Die inhomogene Wellengleichung

**8 Die Maxwellschen Gleichungen**
8.1 Die stationären Maxwellschen Gleichungen
8.2 Randwertprobleme

**9 Die Euler-Gleichungen und hyperbolische Bilanzgleichungen**
9.1 Kompressible und inkompressible Strömungen
9.2 Bilanzgleichungen und Erhaltungsgleichungen
9.3 Charakteristiken im skalaren eindimensionalen Fall

9.4 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten
9.5 Schwache Lösungen
9.6 Die Euler-Gleichungen

**10 Hilbertraummethoden**

10.1 Einführung
10.2 Das schwache Dirichletproblem für lineare elliptische Differentialgleichungen
10.3 Das schwache Neumannproblem für lineare elliptische Differentialgleichungen
10.4 Zur Regularitätstheorie beim Dirichletproblem