Werner Poguntke

Keine Angst vor Mathe

Hochschulmathematik für Einsteiger

4. Auflage

STUDIUM

VIEWEG+
TEUBNER

Werner Poguntke

Keine Angst vor Mathe

Werner Poguntke

Keine Angst vor Mathe

Hochschulmathematik für Einsteiger

4., aktualisierte Auflage

STUDIUM

VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Prof. Dr. Werner Poguntke
Geboren 1949 in Duisburg-Homberg. 1972 Diplom und 1974 Promotion in Mathematik an der TH Darmstadt. Von 1974 bis 1985 wiss. Mitarbeiter und Hochschulassistent an der TH Darmstadt. 1981 Habilitation im Fachbereich Mathematik der TH Darmstadt. 1985 bis 1988 Industrietätigkeit bei TELENORMA/Frankfurt. 1988 bis 1994 wiss. Mitarbeiter im Fachbereich Elektrotechnik der Fernuniversität Hagen. Seit 1994 Professor für Angewandte Informatik an der FH Südwestfalen.

1. Auflage 2004
2. Auflage 2006
3. Auflage 2009
4., aktualisierte Auflage 2010

Lektorat: Ulrich Sandten | Kerstin Hoffmann

Vieweg+Teubner ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Druck und buchbinderische Verarbeitung: STRAUSS GMBH, Mörlenbach
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0966-7

Vorwort

„Es geht darum, alles so einfach wie möglich zu machen.
Aber nicht einfacher.“
Albert Einstein

Wenn mindestens eine der folgenden Aussagen auf Sie zutrifft, dann dürfte das vorliegende Buch für Sie von Interesse sein:

- Sie müssen sich nach längerer Zeit zwangsweise wieder mit Mathematik beschäftigen, beispielsweise als Erstsemester an der Hochschule.
- Sie benötigen in Ihrem Beruf Mathematikkenntnisse, die aus der Schulzeit längst vergessen oder verdrängt sind.
- Sie waren „in Mathe immer schlecht“, finden das aber heute bedauerlich, weil Sie ein weltoffener und wissbegieriger Mensch sind und wissen, dass jede moderne Technikentwicklung auch stark auf Mathematik beruht.

Das folgende Zitat des Mathematikers und Kabarettisten Dietrich Paul[i] finde ich sehr treffend:

„Deutschland war leider schon immer das einzige Land der Welt, in dem man ungestraft damit kokettieren kann, dass man in Mathe schon immer schlecht war. Und dafür auch noch bewundert wird und, je nach sozialem Umfeld, als besonders sensibel, metaphysisch oder engagiert gilt.“

Aber es gibt Hoffnung: Immer häufiger wird über mathematische Themen berichtet (sogar in Tageszeitungen, in *bild der wissenschaft* sowieso), die Bedeutung für Schlüsseltechnologien wird inzwischen allgemein gesehen.

Beim Verfassen des Buches hatte ich primär die „Verbundstudierenden“ des Landes Nordrhein-Westfalen im Auge, die ich hauptberuflich unterrichte. Beim Verbundstudium handelt es sich um eine Art Fernstudium an Fachhochschulen, wobei allerdings an jedem zweiten Samstag Präsenzveranstaltungen in der Hochschule stattfinden. Hier sind die Erstsemester im Schnitt ein paar Jahre älter als sonst an den Hochschulen, der (meist ungeliebte) Mathematikunterricht liegt z. T. viele Jahre zurück. Man kann sich vorstellen: Bevor man als Lehrender zum Studienbeginn überhaupt dazu kommt, den für die anderen Fächer notwendigen Mathematikstoff zu vermitteln, hat man wochenlang damit zu tun, alte Vorbehalte und Ängste gegenüber der Mathematik abzubauen. Das vorliegende Buch soll dazu eine zusätzliche Hilfe sein. Da die geschilderte Situation auf viele andere Menschen in ähnlicher Form zutrifft, hege

---

[i] Aus: Mitteilungen der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Heft 2/2003.

ich die Hoffnung, dass das Buch über meine Studentinnen und Studenten hinaus auf Interesse stößt.

Inhaltlich ist das Buch insofern „bodenständig“, als es vorwiegend Grundlagen der Mathematik aufgreift, die man zu Beginn eines Studiums eigentlich beherrschen sollte – Beispiele sind der Begriff des Logarithmus oder das Rechnen mit einer Unbekannten. Diese Themen werden in knapper, jedoch (hoffentlich) lebendiger und verständlicher Form aufgegriffen. Der Leser mag selbst beurteilen, ob er nicht besser ein altes Schulbuch zur Hand genommen hätte...

Das Buch will jedoch kein alternatives Schulbuch sein, es soll vor allem den etwas „älteren“ Menschen (so ab 20 Jahre) ansprechen, der dies alles „schon mal gehört“ hat. Dazu gehört, dass immer wieder die Bedeutung, aber auch die Grenzen der Mathematik aufgezeigt werden. Ich weiß, es gibt sehr gute Schulbücher – aber auf Fragen der Art „Existiert die Zahl π wirklich?“ oder „Was sagt die Wahrscheinlichkeitstheorie eigentlich über die reale Welt?“ wird recht selten eingegangen. Vielleicht ist es auch zu schwierig, solche Fragen in der Schule zu thematisieren. Dabei sind es nach meiner Auffassung gerade solche Überlegungen, die ein gelockertes Verhältnis zur Mathematik und Spaß an diesem Fach zulassen. Auf der anderen Seite ist die Beschäftigung mit Mathematik oft auch Arbeit, beim Lesen des Buches wird es immer wieder „Durststrecken“ geben!

Und nun viel Erfolg und Spaß mit diesem Buch!

Wuppertal, im Juli 2004
Werner Poguntke

Mit der vorliegenden gründlich durchgesehenen vierten Auflage sind gegenüber der Erstauflage hoffentlich fast alle Tipp- und Rechenfehler beseitigt.

Dabei haben mir mit zahlreichen Anregungen und Korrekturvorschlägen eine Reihe von Personen geholfen. Besonders herausheben möchte ich meine ehemalige Mitarbeiterin Dipl.-Math. Sabine Schiller, Herrn Ulrich Sandten vom Verlag Vieweg+Teubner sowie die kritische Leserin Frau Dr. med. Angela Müller.

Wuppertal, im Oktober 2009
Werner Poguntke

Inhalt

Einleitung

Das Buch enthält in insgesamt zehn Kapiteln diejenigen Mathematik-Grundlagen, welche ich persönlich entsprechend der Intention des Buches für die wichtigsten halte. Gegenüber der ersten Auflage ist ein Kapitel über Integrale hinzu gekommen, welches mit „Messen“ überschrieben ist. Neben den Kapiteln 2 bis 9, mit denen man in vielen anderen Fachgebieten sowie in zahlreichen Bereichen des täglichen Lebens direkt etwas „anfangen“ kann (weil man dort beispielsweise *rechnen* muss), stehen Kapitel 1 über Zahlen und Kapitel 10 zum Thema des Unendlichen, die eher dazu dienen, ein Verständnis für einige Grundfragen der Mathematik zu vermitteln.

Dem unterschiedlichen Charakter der Kapitel entsprechend finden sich am Ende der Kapitel auch unterschiedliche Arten von Übungsaufgaben. Während die Kapitel 1 und 10 Wissensfragen enthalten, anhand derer der Leser sich die diskutierten Themen noch einmal vergegenwärtigen kann, enden Kapitel 2 bis 9 mit jeweils einer Reihe von Übungs- bzw. Sachaufgaben, wobei bei letzteren die Herausarbeitung der mathematischen Problemstellung mit zur Aufgabe gehört („Textaufgaben“). Am Ende des Buches finden sich dann Lösungen aller Aufgaben.

Manche Leser werden vielleicht das eine oder andere Thema vermissen, die von mir getroffene Auswahl ist – wie gesagt – natürlich subjektiv. Gegenüber der ersten Auflage sind neben dem Kapitel über Integrale eigene Abschnitte zu den komplexen Zahlen sowie zu Vektoren eingefügt worden. Die meisten dieser Ergänzungen sprechen auf den ersten Blick vorwiegend den technisch orientierten Leser an, sie spielen jedoch heute auch in vielen anderen Bereichen eine große Rolle (beispielsweise die Integrale in der fortgeschrittenen Finanzmathematik).

Auf mathematische *Beweise* wird innerhalb der Kapitel weitgehend verzichtet. Da das Beweisen jedoch zum Kern aller Mathematik gehört (im Sinne von: aus Bekanntem oder als bekannt Vorausgesetztem nach streng logischen Gesetzen weitere wahre Aussagen ableiten), kann man diesen Aspekt nicht völlig weglassen. Es sind daher einige Beweise in sogenannten „Extrakästen“ untergebracht, um den restlichen Textfluss nicht zu unterbrechen und dem Leser die Möglichkeit zu geben, diese Teile zu überspringen. Neben einigen wenigen Beweisen finden sich auch zusätzliche historische Bemerkungen, Erklärungen zu Bezeichnungsweisen etc. in solchen Extrakästen – immer mit dem Angebot an den Leser, dies ggf. (zunächst) zu ignorieren.

1 Zahlen

1.1 Die reellen Zahlen

Die Zahlen 1,2,3,4,5, ... , die man beim Abzählen irgendwelcher Gegenstände verwendet, bezeichnet man als **natürliche Zahlen**. Diese Folge der natürlichen Zahlen endet nie. Man kann dies auch so ausdrücken: Es gibt *unendlich viele* natürliche Zahlen. Das Unendliche spielt in der Mathematik eine große Rolle und wird in diesem Buch an vielen Stellen auftauchen.

Was *ist* eine Zahl, beispielsweise die Zahl 3? Man kann sich die 3 als die abstrakte Eigenschaft denken, die z. B. 3 Äpfel, 3 Autos und 3 Träume gemeinsam haben. Mit dieser Aussage ist man auch schon beim Kern der Unterscheidung der Mathematik von den Naturwissenschaften wie Physik und Chemie: Während man in den Naturwissenschaften *reale* Dinge untersucht wie herunterfallende Gegenstände, fließenden Strom oder freigesetzte Wärme bei einer chemischen Reaktion, handelt die Mathematik von *abstrakten* Dingen und deren Beziehungen zueinander. Dass dies keine Spielerei, sondern für die Realität von großer Bedeutung ist, wird an dem folgenden simplen Beispiel sofort klar:

Die Mathematik sagt: 2+2=4.

Damit weiß man ein für allemal, dass

- *2 Autos plus 2 Autos 4 Autos ergeben*
- *2 Äpfel plus 2 Äpfel zusammen 4 Äpfel sind*
- *usw.*

Die Abstraktheit der natürlichen Zahlen wird besonders deutlich, wenn man eine riesige Zahl hinschreibt wie

756389994536234746432l.

Kein Mensch wird jemals so viele Objekte abzählen, wie diese Zahl angibt – und doch zweifelt niemand an der Existenz dieser Zahl. Das liegt daran, dass wir uns seit unserer Kindheit an die abstrakte Tätigkeit des *Immer-Weiter-Zählens* (also: Es gibt immer eine nächste Zahl) gewöhnt haben.

Die Mathematik sieht es als ihre Hauptaufgabe, formale strukturmäßige Zusammenhänge zwischen den von ihr betrachteten Objekten (also auch den Zahlen) zu untersuchen - dazu gehört das **Rechnen**. Dabei besteht stets der Anspruch, dass die betrachteten Objekte in der Realität von Interesse sind bzw. dort interpretiert werden können. Mathematische Fragestellungen sind immer weiter „von der Realität entfernt“ als solche aus den Naturwissenschaften (z. B. der Physik), weshalb viele Menschen der Meinung sind, dass von den Mathematikern hauptsächlich weltfremde und unnütze Fragen behandelt werden.

Allerdings bezweifelt niemand, dass es nützlich ist, *rechnen* zu können. Mit den **Grundrechenarten** werden wir uns im nächsten Kapitel beschäftigen. Im vorliegenden Kapitel geht es nur um die Frage, welche weiteren Zahlen (ausser den natürlichen) es gibt.

Die natürlichen Zahlen werden durch Hinzunahme der Null und der negativen ganzen Zahlen -1, -2, -3, -4, -5,... zu den **ganzen Zahlen** erweitert. Dass die Einbeziehung der negativen ganzen Zahlen nützlich ist, kann man schon Grundschülern klar machen: *Wenn ich 3 € in der Hosentasche habe, bin ich im Besitz von 3 €; wenn ich nichts in der Hosentasche habe, bin ich im Besitz von 0 €; wenn ich ausserdem meinem Freund 3 € schulde, bin ich im Besitz von –3 €. (Und wenn ich dann 5 € von meinem Großvater bekomme und meine Schulden abbezahle, habe ich noch 2 € übrig, etc.)*

Mathematiker mögen (unter anderem) Scherze, in denen ihre Begriffsbildungen auf reale Situationen übertragen werden, wo es keinen Sinn ergibt bzw. zu übertrieben präzisen oder sogar absurden Aussagen führt. Hier ist ein Beispiel zu den ganzen Zahlen: *Wenn in einem Bus 7 Fahrgäste sitzen und an der nächsten Haltestelle 11 aussteigen, so müssen danach 4 Fahrgäste einsteigen, damit der Bus wieder leer ist.*

Durch die Einführung der negativen Zahlen hat man auch erreicht, dass man alle Gleichungen der Form

$$a + x = b\ ,$$

bei denen a und b natürliche Zahlen sind, nach x auflösen kann. (Mit dieser Feststellung greifen wir dem Abschnitt 3 vor, in dem ausführlicher über Gleichungen gesprochen wird.) Beispielsweise hat die Gleichung

$$5 + x = 7$$

die Lösung $x = 2$, hier werden noch keine negativen Zahlen gebraucht. Wenn man aber die Gleichung

$$20 + x = 17$$

nach x auflösen will, kommt man zu $x = -3$, man braucht also die negativen Zahlen.

Die ganzen Zahlen

... ,-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...

können durch Punkte auf der sogenannten **Zahlengeraden** (vgl. Abb. 1.1) veranschaulicht werden. Die Zahlengerade ist eine Gerade mit willkürlich gewähltem Nullpunkt und Einheitspunkt 1. Die positiven Zahlen werden vom Nullpunkt aus nach rechts und die negativen Zahlen vom Nullpunkt aus nach links abgetragen.

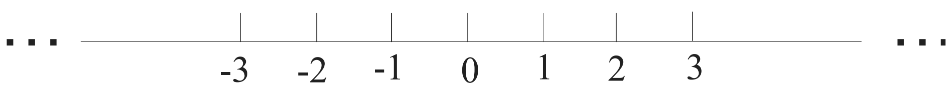


Abb. 1.1: Die Zahlengerade

Brüche

Als nächstes kommen die **Brüche**. Den Quotienten $\frac{p}{q}$ mit $q \neq 0$ zweier beliebiger, positiver oder negativer, ganzer Zahlen p und q bezeichnet man als Bruch[ii]. Mit Brüchen können „Bruchteile“ eines Ganzen in ihrer Größe beschrieben werden – beispielsweise steht der Bruch $\frac{3}{4}$ für „drei Viertel“ (eines Kuchens, eines Glases Wasser usw.). Es sind die Brüche von allen ganzen Zahlen definiert mit Ausnahme der Division durch die Zahl Null. Man kann die ganzen Zahlen als spezielle Brüche sehen: Bei der Darstellung der ganzen Zahlen als Bruch besitzt der Nenner speziell den Wert $q = 1$, beispielsweise kann 5 als $\frac{5}{1}$ („fünf Eintel“) geschrieben werden usw.

Für die Interpretation des Rechnens mit Brüchen ist wichtig zu wissen, dass die Multiplikation dem „Bruchteil von“ entspricht: Zum Beispiel wird „$\frac{3}{4}$ von 7“ berechnet als $\frac{3}{4} \cdot 7$.

Die Brüche werden auch als **rationale Zahlen** bezeichnet. Gleichungen der Form $a \cdot x = b$ mit gegebenen ganzen Zahlen a und b und $a \neq 0$ sind innerhalb der rationalen Zahlen uneingeschränkt lösbar.

Bei der geometrischen Darstellung kann man nun die Zahlengerade erweitern, indem man jeder rationalen Zahl einen Punkt zuordnet. Für $\frac{p}{q} > 0$ ist dies der Endpunkt der vom Nullpunkt aus nach rechts (für $\frac{p}{q} < 0$ nach links) abgetragenen Strecke der Länge $\left|\frac{p}{q}\right|$. Mit $\left|\frac{p}{q}\right|$ ist dabei der Betrag von $\frac{p}{q}$ gemeint, d. h. wenn $\frac{p}{q} < 0$ ist, wird das negative Vorzeichen weggelassen (siehe auch Abb. 1.2).

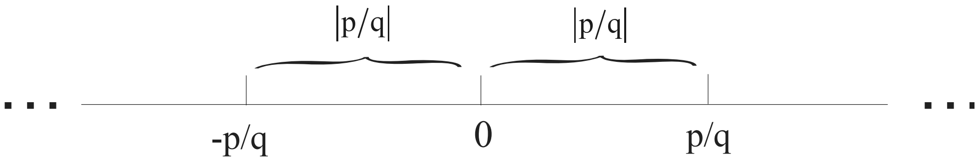


Abb. 1.2: Rationale Zahlen auf der Zahlengeraden

Auf diese Weise erhält man eine unendliche Punktmenge mit der Eigenschaft, dass diese Punkte „überall dicht“ liegen. Mit dieser Formulierung ist gemeint, dass zwischen irgend zwei Punkten stets noch ein weiterer Punkt liegt. Wird nämlich der rationalen Zahl $\frac{p_1}{q_1}$ der

---

[ii] Im Folgenden werden Brüche meist mit geraden Bruchstrichen als $\frac{p}{q}$ geschrieben, gelegentlich auch mit schrägen als ${}^{p}\!/_{q}$.

Punkt P_1 und $\frac{p_2}{q_2}$ der Punkt P_2 zugeordnet, so liegt beispielsweise der dem arithmetischen Mittel

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)$$

zugeordnete Punkt P_3 sicher zwischen P_1 und P_2. Indem man dieses Argument jetzt auf die Punkte P_1 und P_3 und so immer weiter anwendet, kommt man zu dem Ergebnis, dass zwischen zwei Punkten immer bereits *unendlich viele* weitere liegen.

Die Brüche lassen sich, wie aus der Schule bekannt, auch als **Kommazahlen** mit Vor- und Nachkommastellen darstellen. Beispielsweise wird der Bruch $\frac{1}{2}$ durch die Kommazahl 0,5 und $\frac{12}{5}$ durch 2,4 beschrieben. Der Bruch $\frac{4}{3}$ lautet in Kommadarstellung 1,333... oder $1,\overline{3}$, wobei der Strich über der Ziffer 3 die **Periode** andeutet, d. h. dass sich diese Ziffer immer wiederholt. Wenn man einen Bruch in eine Kommazahl umwandelt, dann bricht diese Kommazahl entweder ab, oder sie wird periodisch.

Zahlen, die keine Brüche sind

Es könnte nun angenommen werden, dass mit den Brüchen (anderer Name: rationale Zahlen) die Menge[iii] aller Zahlen gefunden ist, die es überhaupt „gibt". Das ist aber nicht richtig.

Einfachstes Beispiel ist die Zahl $\sqrt{2}$, die sich als Lösung der Gleichung

$$x^2 = 2$$

ergibt.

Dass diese Gleichung keinen Bruch als Lösung haben kann, wurde etwa um 500 v. Chr. entdeckt. Anders gesagt: Es gibt keinen Bruch, dessen Quadrat 2 ergibt! In der Mathematik ist es üblich, solche als wahr erkannten Aussagen in einer lückenlosen Argumentationskette zweifelsfrei zu „beweisen". Dieses klassische Beispiel eines **Widerspruchsbeweises** sollte sich der interessierte Leser einmal ansehen (siehe Extrakasten) – es handelt sich um einen der berühmtesten Beweise der Mathematik!

Zahlen, die keine Brüche sind, nennt man **irrationale Zahlen**. $\sqrt{2}$ ist also eine irrationale Zahl. Wie sehen die irrationalen Zahlen als Kommazahlen aus? Die meisten Leser werden sich (zumindest dunkel) erinnern, dass $\sqrt{2}$ so anfängt:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}414...$$

Und dann geht es „immer weiter".

Genauer ausgedrückt verhält es sich so:

[iii] Zum Gebrauch des Begriffs „Menge" in der Mathematik gibt es einen Extrakasten.

Unter den Kommazahlen zeichnen sich die irrationalen Zahlen (also die Nicht-Brüche) dadurch aus, dass sie hinter dem Komma unendlich viele Stellen ohne ein sich wiederholendes Muster (also ohne eine Periode) haben.

Mengen

Mitunter kann man mathematische Sachverhalte mit Hilfe der Mengensprache recht einfach ausdrücken. Grundelemente der Mengensprache sind zunächst der Begriff der **Menge** selbst sowie die **Elementbeziehung**.
Eine Menge ist nichts anderes als eine (endliche oder unendliche) Ansammlung von Objekten; sie besteht aus einzelnen Elementen – und auch *nur* das: Kennt man ihre Elemente, dann kennt man auch die Menge. Dabei kann man eine Menge entweder durch die Aufzählung ihrer Elemente beschreiben (üblicherweise werden diese zwischen geschweiften Klammern {...} aufgelistet) oder durch die Angabe einer Eigenschaft, die den Elementen der Menge gemeinsam ist. Beispielsweise hat man die folgenden beiden Beschreibungen der Menge der Vokale:
- $V = \{a, e, i, o, u\}$
- $V = \{x \mid x \text{ ist ein Vokal des lateinischen Alphabets}\}$

(Hier liest man: „Menge aller x mit der Eigenschaft: x ist ein Vokal des lateinischen Alphabets")

Um auszudrücken, dass a als Element zu der Menge V gehört, schreibt man:

$$a \in V$$

Man kann auch Variablen für Elemente verwenden – mit $x \in V$ ist dann gemeint, dass x irgendeines der Elemente von V ist.

Für die Zahlenbereiche haben sich bestimmte Mengenbezeichnungen durchgesetzt:
- $\mathbb{N}$ für die Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{Z}$ für die Menge der ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q}$ für die Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$ für die Menge der reellen Zahlen

Statt „Angenommen, x sei irgendeine reelle Zahl..." kann man also auch sagen: „Sei $x \in \mathbb{R}$ ...". Dies kann man auch auf **Intervalle** (siehe in Kapitel 3) anwenden: $x \in [a, b)$ ist gleichbedeutend mit $a \le x < b$.

Wichtig sind noch Vereinigung und Durchschnitt.
- Als **Vereinigung** oder **Vereinigungsmenge** $A \cup B$ (gelesen: „A vereinigt B") der Mengen A und B wird die Menge aller Elemente bezeichnet, die in A oder B enthalten sind.
Beispiel: Für $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$ ist $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Als **Durchschnitt** oder **Schnittmenge** $A \cap B$ (gelesen: „A geschnitten B") der Mengen A und B wird die Menge aller Elemente bezeichnet, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.
Beispiel: Für $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$ ist $A \cap B = \{3\}$.

An dieser Stelle ist eine eher „philosophische Anmerkung“ nötig.

Die Zahl $\sqrt{2}$ wird weder ein Mensch noch ein Computer jemals vollständig niederschreiben können – eben weil in der unendlichen Ziffernfolge keine Wiederholungen vorkommen; *gibt* es denn dann diese Zahl überhaupt? Die Mathematik geht an diese Frage forsch heran, indem sie diese letztlich ignoriert: Die Mathematik fragt nicht, was die von ihr behandelten Objekte *sind*, sondern wie sie *sich verhalten*. So gesehen, hat die Zahl $\sqrt{2}$ (charakteristische Eigenschaft: ihr Quadrat ergibt 2) als abstraktes Objekt die gleiche Berechtigung wie die weiter oben erwähnte Zahl 7563899945362347464321. Ohne diese pragmatische Herangehensweise hätte man zudem die Schwierigkeit, der Diagonalen eines Quadrats von 1 Meter Seitenlänge keine Länge zuordnen zu können: Nach dem **Satz des Pythagoras** (vgl. auch Kapitel 6) muss für diese Länge l (in Metern) nämlich gelten

$$l^2 = 2\,.$$

Beweis, dass $\sqrt{2}$ kein Bruch ist

(Dieser Widerspruchsbeweis stammt von Euklid, ca. 300 v. Chr.)

Angenommen, $\sqrt{2}$ sei ein Bruch, also lasse sich als Bruch $\frac{p}{q}$ darstellen:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Da man jeden Bruch so lange kürzen kann, bis Zähler und Nenner keine gemeinsamen Faktoren mehr haben, kann man annehmen, dass man den Bruch $\frac{p}{q}$ *nicht* mehr kürzen kann. Wenn man nun beide Seiten quadriert, erhält man:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

Dies kann umgeformt werden zu $2q^2 = p^2$.

Da also p^2 das Zweifache einer anderen Zahl ist, muss p^2 eine gerade Zahl sein – p folglich auch, denn das Quadrat einer *ungeraden* Zahl wäre selbst wieder ungerade! Wenn aber nun p gerade und somit das Zweifache einer anderen Zahl ist, muss p^2 sogar das *Vierfache* einer anderen Zahl sein, und man kann schließen, dass die Zahl $2q^2$ (was ja gleich p^2 ist) durch 4 geteilt werden kann. Somit muss auch q^2 – und damit ebenfalls q – durch 2 teilbar sein. Nun sind wir bei dem Ergebnis angelangt, dass sowohl p als auch q durch 2 teilbar sind, was der Annahme widerspricht, dass der Bruch $\frac{p}{q}$ nicht weiter gekürzt werden kann. Da die Argumentationskette zwangsläufig zu diesem Widerspruch geführt hat, muss die Annahme falsch gewesen sein, dass sich $\sqrt{2}$ als Bruch schreiben lässt. Damit ist der Beweis beendet.

Es gibt irrationale Zahlen, die noch „schlimmer“ sind als beispielsweise $\sqrt{2}$ – zu diesen Zahlen gehört π. „Schlimmer“ ist π deshalb, weil diese Zahl nicht einmal als Lösung einer solch einfachen Gleichung wie

$$x^2 = 2$$

dargestellt werden kann. Ähnlich verhält es sich mit der **Eulerschen Zahl** *e*. Dass dies so ist, ist nicht so einfach nachzuweisen, deswegen werden wir darauf nicht eingehen.[iv] Die ersten 10 Stellen in der Kommadarstellung lauten:

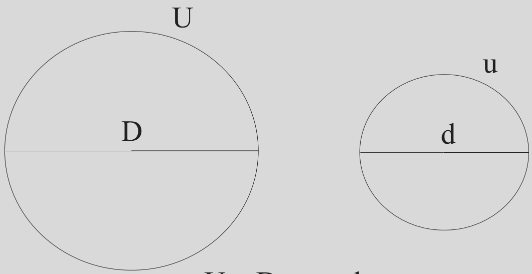
$$\pi = 3{,}141592654$$

$$e = 2{,}718281828$$

Zur Bedeutung der Zahl π ist ein Extrakasten eingefügt.

π

Das Interesse an der „Kreiszahl“ π rührt daher, dass für beliebige Kreise das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser immer dieselbe Zahl ergibt (was schon die Babylonier und die Ägypter um 2000 v. Chr. wussten), dieses Verhältnis hat man π genannt. (In Abbildung 1.3 ist dies illustriert.) Man beachte: Mit dieser Grundlegung der Zahl π ist man bereits gänzlich innerhalb des mathematischen Gedankengebäudes, denn ein exakter Kreis ist in der Natur schwer zu finden!



$$U : D = u : d = \pi$$

Abb. 1.3: Umfang und Durchmesser von Kreisen

Dass π *transzendent irrational* ist (d.h. nicht durch Wurzelziehen usw. aus einfacheren Zahlen gewonnen werden kann, vgl. auch die Fußnote), hat übrigens erst der deutsche Mathematiker Ferdinand Lindemann im Jahre 1882 bewiesen.

Aufgrund der obigen Betrachtungen zur Existenz irrationaler Zahlen müssen wir über die Existenz von π (oder *e*) nicht extra reden.

[iv] Man unterteilt die irrationalen Zahlen noch einmal in die *algebraisch irrationalen* Zahlen (wie $\sqrt{2}$) und die *transzendent irrationalen* Zahlen (wie π).