

Albrecht Beutelspacher

„Das ist o. B. d. A. trivial!“

Tipps und Tricks zur Formulierung
mathematischer Gedanken

9. Auflage

STUDIUM



Vieweg +
Teubner

Albrecht Beutelspacher

„Das ist o. B. d. A. trivial!“

Tipps und Tricks zur Formulierung
mathematischer Gedanken

9. Auflage

STUDIUM



VIEWEG+
TEUBNER

Albrecht Beutelspacher

„Das ist o. B. d. A. trivial!“

Albrecht Beutelspacher

„Das ist o. B. d. A. trivial!“

Tipps und Tricks zur Formulierung
mathematischer Gedanken

9., aktualisierte Auflage

STUDIUM



VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Professor Dr. Albrecht Beutelspacher
Universität Gießen
Mathematisches Institut
Arndtstraße 2
D-35392 Gießen

E-Mail: albrecht.beutelspacher@math.uni-giessen.de

1. Auflage 1991
2. Auflage 1992
3. Auflage 1995
4. Auflage 1997
5. Auflage 1999
6. Auflage 2002
7. Auflage 2004
8. Auflage 2006
9. Auflage 2009

Alle Rechte vorbehalten

© Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2009

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Nastassja Vanselow

Vieweg+Teubner ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg

Porträtfoto: Rolf K. Wegst, www.rolfwegst.com

Druck und buchbinderische Verarbeitung: STRAUSS GMBH, Mörlenbach

Gedruckt auf säurefrei und chlorfrei gebleichtem Papier.

Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0771-7

Inhaltsverzeichnis

Das höchste Ziel: Klarheit!	1
Auch ein mathematischer Text ist ein Text in deutscher Sprache!	3
Definitionen.....	6
Wohldefiniert	9
Satz, Lemma, Korollar	11
Bezeichnungen	13
Gute Bezeichnungen	17
Keine unnötigen Bezeichnungen!	21
„2 paarweise verschiedene Zahlen“	24
„3 5-elementige Mengen haben 15 Elemente“.....	27
Symbole.....	29
Symbole im Text	31
\Rightarrow	33
$ M $	35
∞	37
Notwendig und hinreichend	39
Trivial.....	41
Beispiele.....	44
\forall	47
\exists	51
$\forall \exists$ und $\exists \forall$	54
Gegenbeispiele	57
Beweise	58
Zitate	61
Der, die, das.....	63
Eineindeutig	65
Kanonisch.....	67

O. B. d. A.	69
Ich, wir, man	71
Mein, unser	74
Abbildung, Funktion, Operator	75
Konjunktiv	78
Wörter, die man wissen muss	80
Lesen	87
Übungsaufgaben	90
Was soll ich lesen?	93
Schlusswort	95

Das höchste Ziel: Klarheit!

„Ich hab's verstanden, aber ich kann es nicht ausdrücken!“, „Ist das jetzt ein Beweis?“,... – mit solchen Problemen und Fragen muss jeder umgehen, der sich bemüht, mathematische Gedanken zu Papier zu bringen. Besonders schmerzlich wird oft Studienanfängern diese Problematik bewusst. Hauptsächlich für sie ist dieses Büchlein geschrieben.

Ich versuche darin, Sie mit Ihren Formulierungsproblemen nicht allein zu lassen. Sie können dabei (so hoffe ich!) die folgenden Dinge lernen:

- **Besser formulieren**

Sie lernen die „mathematische Sprache“ kennen, die ihre eigenen Vokabeln hat. Sie erhalten praktische Tipps zur Formulierung Ihrer Übungs- und Klausuraufgaben. Ich sage Ihnen jedenfalls sehr deutlich, welche Formulierungen Sie besser *nicht* verwenden sollten.

- **Bessere Kontrolle über Ihre eigenen Formulierungen**

Wenn Sie Definitionen, Sätze und Beweise richtig aufschreiben, können Sie auch überprüfen, ob das, was Sie aufgeschrieben haben, stichhaltig ist. Ihr eigenes Produkt tritt Ihnen dann nicht mehr als unverständlicher Wust entgegen, bei dem Sie froh sind, ihn fertig zu haben, sondern als ein Text, der nach gewissen Regeln strukturiert ist. So können Sie eventuelle Beweislücken, vergessene Fälle usw. entdecken. Sie haben also die Möglichkeit, selbst zu prüfen, ob Sie die Sache wirklich verstanden haben, oder ob Sie nur glauben, sie verstanden zu haben.

- **Besser lesen**

Die Beherrschung des Instruments des besseren Schreibens wird Ihnen auch helfen, mathematische Texte genauer lesen zu können. Sie werden Feinheiten der Argumentation entdecken, die Ihnen zuvor entgangen sind. In diesem Sinne lernen Sie also auch ‚besser sehen‘.

- **Abbau der Angst vor der Mathematik**

Die mathematischen Begriffe und Formalismen wirken oft wahrhaft furchterregend; Sie sollten lernen, dass diese in Wirklichkeit eine Hilfe sind, die es gera-

de dem Nichtexperten ermöglichen soll, Mathematik klar auszudrücken und gut zu verstehen.

Was ist dieses Buch nicht?

- Das Buch ist kein Mathematikbuch; es ersetzt nicht das genaue und intensive Studium der Analysis, der Linearen Algebra und der höheren Vorlesungen.
- Dieses Buch kann Sie von Anfang an begleiten. Insbesondere hilft es Ihnen, schon zu Beginn des Bachelor-Studiums, Sicherheit in der Verwendung der mathematischen Sprache zu erlangen.
- Dies ist kein Buch, das Sie zu einem perfekten mathematischen Schriftsteller macht. Mein Ziel ist bewusst sehr niedrig gehalten: Sie sollen konkrete Hinweise erhalten, wie Sie mit geringem Aufwand
 - *die schlimmsten Fehler vermeiden* und
 - *mathematische Gedanken gut formulieren*können.

* * *

In diesem Buch werden Sie mitunter sehr deutliche Ratschläge finden, die ich nur zum Teil mit der üblichen wissenschaftlich-vorsichtigen Distanzierung formuliert habe. Diese deutlichen Regeln wenden sich vor allem an die Anfänger. Wenn Sie als schon weiter Fortgeschrittene manche Regeln zu restriktiv finden, machen Sie sich nichts draus! Wenn Sie bessere Vorschläge haben, bitte ich Sie ausdrücklich, mir diese mitzuteilen.

In jedem Fall bitte ich Sie, sich den trostreichen Satz zu Herzen zu nehmen, den Theodor FONTANE seinen Stechlin sagen lässt:

*Unanfechtbare Wahrheiten gibt es überhaupt nicht,
und wenn es welche gibt, so sind sie langweilig.*

Auch ein mathematischer Text ist ein Text in deutscher Sprache!

Mathematische Texte dienen, wie viele andere Texte, zur Informationsübermittlung. Der Autor will eine mathematische Aussage (einen „Satz“), einen Beweis, oder eine Definition... anderen mitteilen. Die Aufgabe des Verfassers ist es, den Text so zu gestalten, dass der Leser möglichst wenig Mühe und Zeit aufwenden muss, um den Text zu verstehen.

Man muss zwei Phasen der mathematischen Arbeit unterscheiden:

Explorationsphase („Schmierzettel“). In dieser entstehen die mathematischen Gedanken. Wie jeder kreative Prozess hängt auch dieser äußerst stark von der Person ab, die die Ideen hat (bzw. haben soll). In der Regel läuft diese Phase nicht sehr planbar ab, sondern ist irrational und fehleranfällig. Die meisten Mathematiker kritzeln dabei Unmengen von Papier voll oder malen an eine Tafel.

Konsolidierungsphase („Reinschrift“). In dieser Phase müssen Sie versuchen, Ihre Gedanken in Form zu bringen – und zwar in eine solche Form, die die Gedanken für Sie und andere nachvollziehbar macht. Dabei müssen Sie die Spreu vom Weizen trennen, Argumente ordnen, fehlende Begründungen entdecken, Bezeichnungen einführen und harmonisieren... Die einfache Abfolge Explorations- / Konsolidierungsphase werden Sie bei längeren Aufgaben und komplizierten mathematischen Entwicklungen natürlich wiederholt anwenden müssen.

Das vorliegende Buch behandelt nur die zweite Phase.

Für einen von Ihnen geschriebenen Text kommen als Leser zwei Personengruppen vor: Einerseits Sie selbst und andererseits alle anderen. Die Sprache dient zur Kontrolle dieser beiden „Schnittstellen“.

Die eine Schnittstelle ist die *zwischen den Gedanken in Ihrem Kopf und der formulierbaren Mathematik*. Die Bedeutung einer präzisen Sprache kann dabei gar nicht überschätzt werden: Durch den nicht nachlassenden Versuch, das, was sich in Ihrer Gedankenwelt abspielt, möglichst genau auszudrücken, wird Ihnen die Grenze bewusst zwischen dem, was Sie wissen und dem, was Sie (noch) nicht wissen. Stellen Sie unangenehme Fragen an Ihre Gedanken! Nur so können Sie herausfinden, ob Sie wirklich etwas erkannt haben oder ob Sie sich nur etwas vormachen.

Die andere Schnittstelle ist die *zwischen formulierten mathematischen Gedanken*. Wenn zwei Personen über Mathematik miteinander reden, sollten sie wis-