

Matthias Ludwig

Mathematik + Sport

Olympische Disziplinen im mathematischen Blick

$\pi \cdot x^2$

POPULÄR



 VIEWEG+
TEUBNER

Matthias Ludwig
Mathematik + Sport

Matthias Ludwig

Mathematik + Sport

Olympische Disziplinen
im mathematischen Blick

POPULÄR



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Prof. Dr. Matthias Ludwig
PH Weingarten
Fachbereich Mathematik
Kirchplatz 2
88250 Weingarten

ludwig@ph-weingarten.de

1. Auflage 2008

Alle Rechte vorbehalten
© Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2008

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Susanne Jahnel

Vieweg+Teubner ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt.
Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg

Illustration Umschlag: Anne Rapp, München

Satz: FROMM MediaDesign, Selters/Ts.

Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0477-8

*Für Toni, die Künstlerin,
und
Moritz, den Fußballprofi*

Vorwort

Im Jahr der Mathematik, der UEFA Euro 2008™ und der Olympischen Spiele ein Buch mit dem Titel „Mathematik und Sport“ erscheinen zu lassen, ist fast eine Pflicht. Aber ein Buch über dieses Thema zu schreiben, ist auch ein sehr umfangreiches Unternehmen, und da es in fast jeder Sportart Mathematik bzw. etwas Mathematisches zu entdecken gibt, ist es kaum möglich, alle Sportarten in einem mathematischen Buch unterzubringen. Es wurde hier der Fokus auf einige olympische Sportarten und Sportanlagen gelegt. Und selbst da bleibt so viel an Recherche zu tun, dass dies einer allein kaum schaffen kann. Ständig ändern sich die Rekorde und Leistungen der Sportler. Während ich dieses Vorwort schreibe, hat sich der Weltrekord für den 100-m-Lauf aus dem Jahr 2007 von 9,74 Sekunden (Asafa Powell) auf 9,72 Sekunden (Usain Bolt) verbessert. Diese neueste Entwicklung konnte nicht mehr in das Kapitel der Laufrekorde eingebaut werden (irgendwann muss das Buch auch einmal gedruckt werden), aber dieser Rekord bestätigt die Vorhersage, welche dort getroffen wird.

Viele Personen haben im Hintergrund agiert, um Mathematik und Sport zu verbinden. Ich möchte auf diesem Wege einigen Personen danken, welche an der Erstellung dieses Buches mitgewirkt haben: Zunächst möchte ich zwei Personen erwähnen, die mir inhaltliche Ideen und Hilfen haben zukommen lassen. Hier ist zum einen Hans-Georg Weigand zu nennen, dem ich die Idee der Basketball-Mathematik zu verdanken habe, und Sascha Steiner, der mich auf die Besonderheiten der Mehrkampfformeln aufmerksam gemacht hat. Für die Beschaffung von Rekorddaten sei Marco Wottge und meinem Mitarbeiter Markus Mann gedankt. Herrn Steinwandel danke ich für die konstruktive und kritische inhaltliche Durchsicht der Beiträge sowie Frau Agel und Frau Jahnel für die sehr engagierte Unterstützung beim Lektorieren. Besonderer Dank sei an Frau Schmickler-Hirzebruch gerichtet, die mit besonderem Geschick in allen Fragen der Buchherstellung dazu beigetragen hat, dass das Buch so pünktlich erscheinen konnte.

Besonders möchte ich mich auch für die schnelle und unkomplizierte Zusammenarbeit mit der FIFA™ bei Kapitel 10 bedanken. Dank sei auch an Holger Geschwindner gerichtet, der mir für das Basketball-Kapitel (Kapitel 6) wichtige Informationen gab.

Ganz besonderer Dank gilt meiner Frau und meinen beiden Kindern, welche auf viel gemeinsame Zeit mit mir verzichten mussten. Ich verspreche: Wir holen das alles nach. Nach den Olympischen Spielen.

Matthias Ludwig

Würzburg, im Juni 2008

Inhalt

Vorwort	VII
Einleitung	1

1

Mathematik der Mehrkampfformeln 7

- | Die Anfänge 7 – Das Ulbrich-Prinzip 11 –
Die aktuellen Tabellen 15

2

Mathematik des Elfmeters 19

- | Die Verwandlungshäufigkeit 20 – Der Flächenansatz 21
Vergleich mit der Realität 23 – Der Torwart hat eigentlich
keine Chance 24

3

Mathematik der Feldspieler 27

- | Der Flächenansatz 28 – Der mittlere Abstand 30 –
Frauenfußball 33

4

Mathematik der Laufrekorde 35

- | Die 100-m- Weltrekorde 35 – Andere Laufdisziplinen 43 –
Kritische Betrachtung 44

5

Mathematik des Kugelstoßens 47

- | Der Abwurfwinkel I 48 – Die Abwurfhöhe 52 –
Der Abwurfwinkel II 54 – Die Messtechnik 58

6

Mathematik des Freiwurfs 63

- | Der Freiwurf 63 – Der Abwurfwinkel 68 –
Die Abwurfgeschwindigkeit 70 – Die Optimierung 74

7

Mathematik und der weiße Sport 77

- | Die Mathematik der Schlägerbespannung 77 –
Die Mathematik des Tennisplatzes 82

8**Mathematik der Spielfelder 85**

| Die Spielfeldmaße und Spielfeldlinien 85 – Kanten und Knoten 88 – Das Briefträgerproblem 91

9**Mathematik des Baseballfeldes 97**

| Die Anordnung der Bases 98 – Der Baseballfeld-Algorithmus 100

10**Mathematik der Bälle 101**

| Beliebte Spielgeräte 101 – Die Spielbälle 102 – Die Ball-symmetrien 104 – Die Baseballsymmetrie 104 – Die „Volleyballsymmetrie“ 108 – Die klassische Fußballsymmetrie 112 – Die Würfelsymmetrie 117 – Zusammenfassung 120

11**Mathematik der 400-m-Bahn 123**

| Das antike Stadion 123 – Die genormte 400-m-Bahn 126 – Startlinie der Mittel- und Langstreckenläufe 129

12**Mathematik am Rad 133**

| Rahmengeometrie 133 – Übersetzungsarithmetik 135 – Der Umwerfer und das Schaltwerk 137

13**Mathematik des Olympiastadions 141**

| Ellipsen im Stadion 142 – Die Ellipse als Enveloppe 144 – Von der Ellipse zum Stadion 146 – Software 149

14**Mathematisches Modellieren 151**

| Der Modellierungskreislauf 152

Literatur- und Linkverzeichnis _____ 158

Bildnachweis _____ 160

Sachwortverzeichnis _____ 161

Der EUROPASS 2008 _____ 164

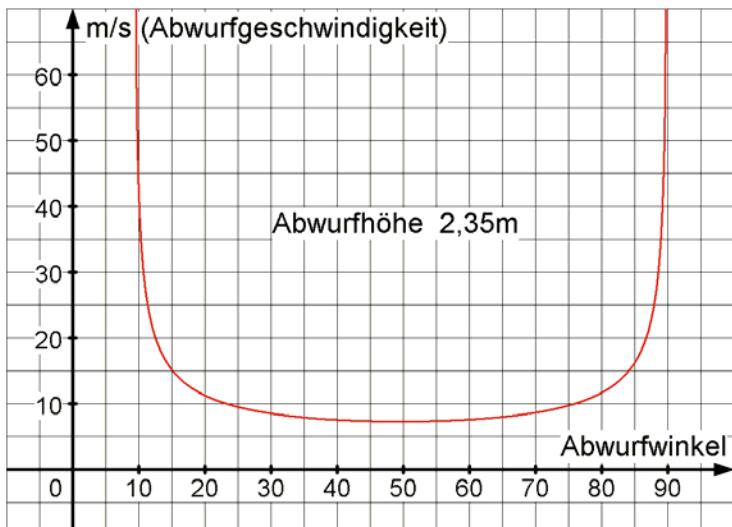
Einleitung

Die Idee, Mathematik, welche sich hinter oder in Alltagssituationen verbirgt, besonders zu betrachten, ist nicht neu. Man betrachte die Werke zur Geometrie von Georg Glaeser („Geometrie und ihre Anwendungen“) oder das Buch „Alles Mathematik“ von Martin Aigner und Ehrhard Behrends sowie die Bücher von Albrecht Beutelspacher (z. B. „Kryptologie“ oder „Pasta all’infinito“), um nur eine kleine Auswahl zu nennen. Nur wenige der bisherigen Werke widmeten sich ausgiebig der Mathematik im Sport bzw. der Mathematik hinter den Sportarten. Natürlich gibt es das Buch von Sadovskij und Sadovskij, welches fast den gleichen Titel trägt wie dieses Werk und unter anderem die Entwicklung von Rekorden im Sport untersucht. Und es gibt das wunderschöne Buch von John Wesson „Fußball-Wissenschaft mit Kick“, in dem er sich der mathematisch-physischen Seite des Fußballs nähert. Das Buch ist wirklich zu empfehlen, aber John Wesson, er ist Engländer, beschränkt sich eben nun mal auf Fußball. Die Austragung der FIFA Fussball-Weltmeisterschaft™ im Jahr 2006 in Deutschland brachte auch noch andere wissenschaftliche Fußballwerke an den Tag, nicht zu vergessen z. B. das Buch von Hans-Georg Weigand „Fußball eine Wissenschaft für sich“. Wir wollen auch nicht verschweigen, dass Fußball die populärste Sportart in Deutschland, auch in Europa, wenn nicht sogar weltweit ist, und immer wieder gibt es mathematische Abhandlungen über diese Sportart. Aber letztendlich betreiben die meisten Menschen eben nicht Fußball, sondern andere Sportarten. Nur so zum Vergleich: Beim Deutschen Fußball Bund sind mehr als sechs Millionen Menschen aktiv, im Deutschen Sport sind es dagegen mehr als 26 Millionen. Und so ist es nur natürlich, dass es ein sportliches Ereignis gibt, welches noch mehr Menschen und Athleten anzieht: die Olympischen Spiele. In diesem Buch soll der Versuch gemacht werden, viele der olympischen Sportarten aus dem Blickwinkel der Mathematik und manchmal der Physik zu betrachten. Wir werden klären, warum die Zehnkämpfer Ende der 70er Jahre des letzten Jahrhunderts heilfroh darüber waren, dass es Mathematiker gab, welche ihnen eine Punktetabelle für einen fairen Wettkampf schenkten. Wir wollen uns mit den Spielfeldern von Freiluftsportarten beschäftigen und klären, was die Idee der Symmetrie mit Fairness zu tun hat. Natürlich kommen wir an „König“ Fußball nicht vorbei, denn Fußball ist auch eine olympische Dis-

ziplin. Wir werden hier versuchen, die Verwandlungshäufigkeit beim Elf-meterschießen zu modellieren, oder versuchen zu klären, warum zehn Feldspieler eigentlich ideal sind. Mit einem mathematischen Augenzwinkern wollen wir ermitteln, in welchem olympischen Jahr Frauen schneller laufen werden als Männer und ob sie das beim Marathon früher schaffen als beim 100-m-Lauf. Kugelstoßen als technische Disziplin in der Leichtathletik ist für mathematische Betrachtungen besonders interessant. Hier können wir z. B. klären, wie wir bei gegebenen Bedingungen (Athletengröße und Abwurfgeschwindigkeit) die Wurfweite optimieren können. Dass bei der Erstellung einer für alle Starter fairen 400-m-Bahn Mathematik eine Rolle spielt, liegt fast auf der Hand: Wie will man sonst die Kurvenvorgaben in den einzelnen Bahnen bestimmen? Beim Tennis, dem weißen Sport, klären wir, wie man die Länge der Saiten aus der Schlägergeometrie ableiten kann und was eigentlich noch spannender ist: Wie kann man nach einem Tennismatch, wenn man müde und abgekämpft ist, möglichst zeitsparend die Linien kehren? Eine weitere mathematische Optimierungsfrage steckt hinter dem idealen Freiwurf beim Basketball.

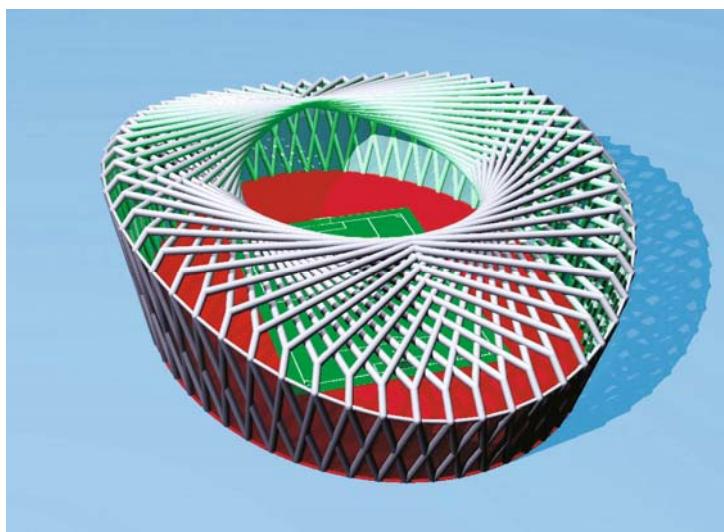
Abb. 1

Dieser Graph könnte Dirk Nowitzki vielleicht helfen, Freiwürfe noch sicherer zu verwandeln. Ein Ball, der in einer Höhe von 2,35 m so abgeworfen wird, dass seine „Koordinaten“ Abwurfwinkel und Abwurfgeschwindigkeit auf dem roten Graph liegen, wird durch die Mitte des Korbs fliegen.



Es ist zwar kaum möglich, aber können wir dem ehemaligen Würzburger Dirk Nowitzki helfen, es noch besser zu machen?

Baseball ist nur für einige Jahre olympische Disziplin und nicht nur deswegen auch mathematisch interessant. Blickt man ins Regelwerk, so findet man nämlich in den Richtlinien zum Bau eines Baseballspielfeldes mathematische Bezüge. Auch der Radsport bietet so einiges an Mathematik, vor allem das Sportgerät selbst, durch seine Rahmengeometrie und die Übersetzungen bei der Kettenfahrt. Schließlich befassen wir uns noch mit dem liebsten und idealsten aller Spielgeräte, dem Ball. Hier bietet nicht nur der Fußball einige besondere Symmetrien, sondern auch die Bälle anderer Sportarten wie Baseball, Tennis und Basketball zeigen ungeahnte Ähnlichkeiten. Am Schluss wollen wir versuchen, uns durch die Geometrie des Pekinger Olympiastadions zu arbeiten. Siehe folgende Abbildung 2.

**Abb. 2**

*Die Modellierung
des National-
stadions in
Peking*

Das Buch richtet sich hauptsächlich an Studierende des Lehramts Mathematik und Lehrende der Mathematik in allen Schularten und Stufen. Ein Kapitel zum mathematischen Modellieren als Unterrichtsmethode soll diesem Umstand Rechnung tragen. Aber auch Personen, welche einfach Freude am Umgang mit Mathematik haben, werden in diesem Buch einen neuen, ungewöhnlichen Zugang zu ihr finden.

Mathematisches Hintergrundwissen

Für die Leserin und den Leser ist es sicher interessant zu wissen, auf welches mathematische Niveau sie oder er sich hier einlässt. Um es kurz zu machen: Es wird nur manchmal kompliziert. Es wird versucht, dem Leser durch relativ kurze, in sich geschlossene Kapitel die Möglichkeit zu geben, sich punktuell mit dem Buch zu beschäftigen. Die Kapitel bauen nicht aufeinander auf, sondern sind praktisch unabhängig von einander gehalten, nur manchmal wird auf ein anderes Kapitel verwiesen um Doppelungen zu vermeiden.

Tab. 1

*Die Sportarten
bzw. Disziplinen
und die dazu
passende
Mathematik*

Sportart/ Disziplin	Mathematik	Klassen- stufen
400-m-Bahn	Kreisrechnung, lineare Gleichung, Evolente	6,8,11
Bälle	Platonische und archimedische Körper, Symmetrien (Symmetriegruppen)	alle
Baseball	Satz des Pythagoras, Kongruenzsätze	7, 8,9
Basketball	Wurfparabel, Scharfunktionen, Extremwert- bestimmung, Bewegungsgleichungen	9,11
Fußball	Wahrscheinlichkeitsrechnung, Flächen- berechnung, ebene Geometrie	6, 8
Kugelstoßen	Quadratische Funktion, Nullstellenbestimmung, Differentialrechnung, Trigonometrie, Bewegungs- gleichungen	11,12
Olympiastadion	Analytische Geometrie, Kegelschnitte	11,12
Radfahren	Bruchrechnung, Dreiecksgeometrie	5, 6
Tennis	Kreisrechnung, Termaufstellung	6,9
Spielfelder	Graphentheorie, Symmetrie	alle
Weltrekorde	Ausgleichsgerade, Lineare Gleichungssysteme, Exponentialfunktion	9, 10, 11
Zehnkampf	Aufstellen von linearen Funktionen, Potenzfunktionen	8, 10, 11

Die benötigte Mathematik kann oft nur, und auch das nicht immer, in den Grundzügen dargestellt werden, nur bei Besonderheiten gehen wir darauf ein. Für fast alle Kapitel reichen aber Kenntnisse der Mittelstufengeometrie und das Wissen um das Lösen von Gleichungen sowie Gleichungssystemen. Auch benötigen wir ab und zu etwas Trigonometrie, analytische Geometrie sowie Differentialrechnung. Vereinzelt wird auf Mathematik zurückgegriffen, welche (noch) nicht in der Schule gelehrt wird oder wurde, wie z. B. die Graphentheorie. In diesen Fällen werden die Grundzüge dargelegt, welche für den Leser (hoffentlich) leicht nachvollziehbar sind. Am Ende eines jeden Kapitels findet sich eine Zusammenstellung der benötigten mathematischen Inhalte.

Ich hoffe, mit diesem Buch dazu beizutragen, dass Mathematik nicht immer nur in der Schule durch den Unterricht wahrgenommen wird, sondern auch im täglichen Leben. Denn: Mathematik findet im täglichen Leben statt. Mathematik prägt unser Leben, oft ohne, dass wir es wissen. Es ist das Verdienst vieler Kolleginnen und Kollegen, vor allem der Mitglieder der Istrom-Gruppe, welche schon lange Jahre in diesem Bereich gearbeitet haben und eine Menge Beispiele für mehr Realitätsbezug im Mathematikunterricht entwickelt haben. Ich versuche nun, dieses Spektrum durch den Lebensbereich Sport zu erweitern. Und es ist natürlich so wie immer: Je mehr man über eine Sache (hier: Mathematik und Sport) weiß, desto vertrauter wirkt sie, desto eher erkennt man sie in anderen Situationen wieder und desto stärker kann man darauf bauen. Ich höre jetzt hier auf und wünsche Ihnen viel Freude und Spaß an „olympischer Mathematik“.

1

Mathematik der Mehrkampfformeln

Lassen Sie uns gleich im ersten Kapitel mit den spannendsten Wettkämpfen in der Leichtathletik beginnen, den Mehrkämpfen. Hier kämpfen die Könige und Königinnen unter den Athleten und Athletinnen darum, wem die Krone in der Leichtathletik wirklich zusteht.

Bei den Frauen handelt es sich beim Mehrkampf um einen Siebenkampf, bei den Männern um einen Zehnkampf. Die Disziplinen sind bei beiden über zwei Tage verteilt. Bei den Frauen stehen am ersten Tag 100-m-Hürden, Hochsprung, Kugelstoßen und ein 200-m-Lauf auf dem Programm, am zweiten Tag müssen der Weitsprung, der Speerwurf und der 800-m-Lauf hinter sich gebracht werden. Die Internationale Leichtathletik Vereinigung IAAF denkt aber schon darüber nach, auch für die Frauen den Zehnkampf mit den gleichen Disziplinen wie bei den Herren einzuführen. Die Männer müssen am ersten Tag den 100-m-Lauf, den Weitsprung, das Kugelstoßen, den Hochsprung und den 400-m-Lauf absolvieren. Am zweiten Tag stehen dann der 110-m-Hürdenlauf, der Diskuswurf, der Stabhochsprung, der Speerwurf und der abschließende 1500-m-Lauf auf dem Programm.

Es stellt sich nun die Frage, wie man aus den Ergebnissen der sieben bzw. zehn Disziplinen den wahren Gewinner des Wettkampfes ermittelt.

Die Geschichte der Entwicklung dieser Mehrkampfrichtlinien (bzw. Punktabellen) ist sehr interessant und voller spannender Mathematik. Es sollen kurz, ohne dabei den exakten geschichtlichen Ablauf wiederzugeben, die mathematischen Grundprinzipien dieser verschiedenen Punktabellen dargelegt werden.

Die Anfänge

Eine Möglichkeit, den Sieger des Mehrkampfes zu ermitteln, wäre z. B., dass jeder Athlet bezogen auf die Platzierungen bei den Einzeldisziplinen eine entsprechende Punktzahl bekommt (so wurde das auch bei den ersten Mehrkämpfen um 1880 gemacht). Also, der 1. Platz beim 100-m-Lauf bedeutet einen Punkt, ein 2. Platz zwei Punkte usw. Das würde