Franz Embacher

Mathematische Grundlagen für das Lehramtsstudium Physik

2. Auflage

STUDIUM

VIEWEG+TEUBNER

Franz Embacher

Mathematische Grundlagen für das Lehramtsstudium Physik

Franz Embacher

Mathematische Grundlagen für das Lehramtsstudium Physik

2., überarbeitete Auflage

STUDIUM

VIEWEG+
TEUBNER

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Franz Embacher
Franz Embacher ist Dozent für theoretische Physik an der Universität Wien. Neben seiner Forschungstätigkeit in allgemeiner Relativitätstheorie, Supergravitation, Stringtheorie, Kosmologie und Quantengravitation entwickelte er seit langem ein besonderes Interesse an der Didaktik der Physik und der Mathematik, zeitgemäßen Lehr- und Lernformen sowie der Modernisierung der im Lehramtsstudium vermittelten Inhalte. Seit vielen Jahren ist er in der mathematischen Grundausbildung der Lehramtsstudierenden aktiv und hält Lehrveranstaltungen zum Thema „Moderne Physik und Schule“ ab. Er ist Mitautor der Mathematik-Plattform www.mathe-online.at. Zwischen 2005 und 2010 leitete er das eLearning-Projekt *eLearnPhysik* an der Fakultät für Physik der Universität Wien. 2010 erschien bei Vieweg+Teubner das von ihm verfasste Lehrbuch *Elemente der theoretischen Physik, Band 1: Klassische Mechanik und Spezielle Relativitätstheorie*.

1. Auflage 2008
2., überarbeitete Auflage 2011

Lektorat: Ulrich Sandten | Kerstin Hoffmann

Vieweg+Teubner Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.
Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.viewegteubner.de

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0948-3

Inhaltsverzeichnis

Ergänzende Materialien zu diesem Buch:

http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/grundlagen/

1 Einleitung

Über dieses Buch

Das vorliegende Lehrbuch ist aus einem Skriptum entstanden, das zwei Vorlesungen samt zugehöriger Proseminare über *Mathematische Grundlagen für das Physikstudium* an der Universität Wien während mehrerer Semester begleitete. Es richtet sich vor allem an Studierende des Lehramts Physik in ihrem ersten Jahr, durchaus auch an jene, die *nicht* Mathematik als zweites Fach studieren. Sein Ziel ist es, das im Laufe des Studiums benötigte mathematische Grundwissen zu vermitteln und seinen BenutzerInnen die Erlangung der nötigen Sicherheit im Umgang mit den behandelten Strukturen und Methoden zu erleichtern.

Dieses Buch zu „benutzen" heißt nicht nur, es zu lesen, sondern auch, eine gewisse Zeit zu investieren, um mit den Inhalten zu operieren und sie anzuwenden. Zu diesem Zweck sind am Ende jedes Kapitels Aufgaben zusammengestellt. Die Lösungen oder zumindest Lösungstipps (für *fast* alle Aufgaben) sind nach dem in den Kapiteln 2 bis 20 präsentierten Stoff zusammengefasst. Am Ende des Buches finden Sie zwei Muster-Klausuren, die Ihnen zur Prüfungsvorbereitung dienen können. Nicht zuletzt kann (und soll) das Werk während des Studiums (und vielleicht auch danach) zum Auffrischen und Nachschlagen dienen.

Die Rolle der Mathematik in der Physik

Die moderne Physik versucht, Naturvorgänge in einer formalen und quantitativen Weise zu modellieren. So wird beispielsweise die Bewegung eines aus der Ruhelage losgelassenen, frei fallenden Körpers auf der Erdoberfläche üblicherweise durch die (auf Galileo Galilei zurückgehende) Formel

$$x(t) = \frac{g}{2}t^2 \tag{0.1}$$

beschrieben, wobei $x(t)$ die bis zur Zeit t durchfallene Strecke und g die Erdbeschleunigung ist. Diese Formel ist durchaus nicht *exakt*, denn sie

- behandelt den fallenden Körper als (Massen-)Punkt,
- vernachlässigt den Luftwiderstand,
- vernachlässigt die Tatsache, dass die Beschleunigung zunimmt, während sich der fallende Körper dem Erdmittelpunkt nähert, und sie
- ignoriert die Erkenntnisse der Relativitätstheorie und der Quantentheorie.

Auch eine Reihe weiterer, tiefer liegender Annahmen ist mit dieser Formel verbunden, z.B. dass für die Beschreibung von Positionen im Raum *reelle Zahlen* herangezogen werden und dass das Voranschreiten der Zeit als *kontinuierliche* Entwicklung angesehen wird (beschrieben durch eine *Funktion*, die jedem reellen Zeitpunkt t eine Position $x(t)$ im Raum zuordnet), nicht etwa als *diskrete* Abfolge von Zeitpunkten. Ob derartige Annahmen auch in Zu-

F. Embacher, *Mathematische Grundlagen für das Lehramtsstudium Physik*, DOI 10.1007/978-3-8348-9848-7_1,

kunft der Physik zugrunde gelegt werden, oder ob Beobachtungen (oder auch theoretische Erwägungen) uns eines Tages zwingen werden, davon abzugehen und andersartige mathematische Modelle zu verwenden, wissen wir nicht. Trotz all dieser Unsicherheiten sind Aussagen wie (0.1) nützlich – sie werden als *mathematische Modelle* angesehen. *Innerhalb eines solchen mathematischen Modells* sind weitergehende Fragestellungen möglich, wie zum Beispiel:

- **Welche Geschwindigkeit hat der Körper zu einer vorgegebenen Zeit t?**

  Dies wirft zunächst die Frage auf, was „die Geschwindigkeit" überhaupt ist. Dass ein gemäß (0.1) bewegter Körper immer schneller wird, wird durch den Quotienten „durchfallene Strecke/benötigte Zeit" (die Durchschnittsgeschwindigkeit) nicht besonders gut beschrieben. An seine Stelle tritt die „Momentangeschwindigkeit", definiert als *Ableitung* der Funktion $x(t)$ nach der Zeit t, geschrieben als $\dot{x}(t)$. Damit sind wir durch eine harmlos klingende Frage in der *Differentialrechnung* gelandet! Ausgerüstet mit deren Methoden, können wir als Antwort sofort $v(t) \equiv \dot{x}(t) = gt$ hinschreiben. Die Geschwindigkeit nimmt linear mit der Zeit zu.

- **Nach welcher durchfallenen Strecke erreicht der Körper eine gegebene Geschwindigkeit v?**

  Um diese Frage – wieder innerhalb des Modells (0.1) – zu beantworten, ist es (neben der Lösung des in der vorigen Frage aufgeworfenen Geschwindigkeitsproblems) nötig, in *Variablen* zu denken, mit *Termen* umzugehen und eine *Gleichung* zu lösen, etwa so: Der Zusammenhang zwischen Ort und Zeit ist durch $x = \frac{g}{2}t^2$, der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Zeit durch $v = gt$ gegeben. Die letzte Beziehung kann als Gleichung für die Zeit t, die vergangen ist, bis der Körper die Geschwindigkeit v hat, aufgefasst werden. Sie kann nach t gelöst werden, was auf $t = \frac{v}{g}$ führt. In die erste Beziehung eingesetzt, ergibt sich $x = \frac{g}{2}\left(\frac{v}{g}\right)^2 = \frac{v^2}{2g}$. Damit ist die durchfallene Strecke in Abhängigkeit von der erreichten Geschwindigkeit ausgedrückt, d.h. die Frage ist beantwortet: Eine gegebene Geschwindigkeit v ist erreicht, wenn der Körper die Strecke $\frac{v^2}{2g}$ durchfallen hat. Im Zuge dieser Rechnung wird g als *Konstante* angesehen, während x, t und v als *Variable* behandelt werden, die je nach der Beziehung, in der sie auftreten, *vorgegeben* werden können (also *unabhängige* Variable darstellen) oder durch die jeweils anderen *bestimmt* sind (also *abhängige* Variable darstellen).

Wir sehen, dass mit der Beantwortung der gestellten Fragen eine Menge mathematischer Begriffe und Techniken verbunden ist. Auch wenn mit dem bloßen Hinschreiben der Formel (0.1) vielleicht nicht beabsichtigt war, Mathematik zu betreiben, kommen wir doch nicht um sie herum! Ein weiteres Problemfeld eröffnet sich, wenn versucht wird, die Beziehung (0.1) in einem realen Experiment zu überprüfen. Die gewonnenen Messwerte werden dem Modell nur näherungsweise entsprechen – der Wunsch, zu formulieren, *wie genau* die Theorie bestätigt wurde (oder etwa *wie genau* die Erdbeschleunigung g in einem Fallexperiment gemessen wurde), führt direkt in das Gebiet der *Fehlerrechnung*. Aus all diesen Gründen ist es für PhysikerInnen (und auch für Physik-LehrerInnen) notwendig, stets ein Köfferchen mit dem wichtigsten mathematischen Handwerkszeug mit sich zu tragen.

Auch komplexere Themen der Physik funktionieren im Grunde genommen nach einem ähnlichen Schema. Hier eine Auflistung der mathematischen Themen, die in diesem Buch auf dem Programm stehen, zusammen mit einigen (ganz und gar unvollständigen) Verweisen auf ihre Anwendungen in der Physik:

2. In zahlreichen Gebieten der Physik (unter anderem in der Quantentheorie) bilden die **komplexen Zahlen** (obwohl sie nicht „in der Natur vorkommen") eine unerlässliche Hilfe.
3. **Reihenentwicklungen (Taylorreihen)** und **Approximationen** werden in praktisch allen Gebieten der Physik dazu benutzt, um komplizierte Modelle soweit zu vereinfachen, dass Berechnungen möglich sind.
4. Die **komplexe Exponentialfunktion** ist besonders bei der Beschreibung von Schwingungsphänomenen und Feldern nützlich.
5. Elementare Schwingungsphänomene werden durch **lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten** beschrieben.
6. Die **Fehlerrechnung** ist nötig, um empirische Daten auszuwerten und den Grad an Genauigkeit und Glaubwürdigkeit der aus ihnen gewonnenen Aussagen zu ermitteln.
7. **Funktionen mehrerer Variablen** kommen in allen Gebieten der Physik zum Einsatz, um physikalische Felder, die ja in der Regel von einer Zeit- und drei Raumkoordinaten abhängen (z.B. das elektromagnetische Feld), zu beschreiben.
8. Gleiches gilt für die Begriffe **Skalar-** und **Vektorfeld**. Sie sind zudem eng mit den Symmetrieprinzipien der modernen Physik verbunden.
9. Die Methoden der **Vektoranalysis („Nabla-Kalkül"**) sowie die mathematischen Operationen **Gradient**, **Divergenz**, **Laplace-Operator** und **Rotation** sind unerlässliche Werkzeuge bei der Formulierung der Grundgleichungen zahlreicher physikalischer Gebiete, vor allem wenn es um die Beschreibung der Eigenschaften und der Dynamik von Feldern geht.
10. **Kugel-** und **Zylinderkoordinaten** eignen sich zur Beschreibung kugel- und zylindersymmetrischer Situationen besser als rechtwinkelige (kartesische) Koordinaten, und sie vereinfachen das Leben beträchtlich.
11. **Mehrfachintegrale** sind unter anderem notwendig, um so elementare Begriffe wie die Ladungs- oder Massendichte zu verstehen.
12. Die **Parameterdarstellung** von Kurven und der Begriff des **Linienintegrals** werden beispielsweise benutzt, um die Arbeit zu ermitteln, die nötig ist, um einen Körper gegen eine Kraftwirkung zu bewegen.
13. **Oberflächenintegrale** sind nötig, um die Idee der „Zahl der Feldlinien, die durch eine Fläche gehen" genauer zu formulieren, oder um die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch eine gegebene Fläche fließt, quantitativ zu fassen.
14. Die **Integralsätze der Vektoranalysis** stellen Verallgemeinerungen des „Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung" dar. Sie erleichtern es, den Zusammenhang zwischen Quellen (z.B. Ladungen und Massen) und den von diesen Quellen erzeugten Feldern zu verstehen.
15. Die **lineare Algebra**, d.h. die mathematische Theorie der **Vektorräume**, liefert einen einheitlichen Rahmen für die Beschreibung vieler unterschiedlicher physikalischer Strukturen sowohl in der klassischen wie in der Quantenphysik.
16. **Matrizen**, **lineare Gleichungssysteme** und **lineare Operatoren** kommen überall dort zum Einsatz, wo lineare Zusammenhänge zwischen mehreren Größen auftreten. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn ein Koordinatensystem gedreht wird. In der Quantentheorie werden Messgrößen nicht durch Zahlen, sondern durch lineare Operatoren beschrieben.
17. **Eigenwerte** und **Eigenvektoren** helfen, Eigenschaften linearer Operatoren zu ermitteln.
18. **Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung** spielen in all jenen Gebieten der Physik eine Rolle, in denen die Kenntnis aller Messgrößen eines Systems aus praktischen Gründen nicht möglich ist (wie in der statistischen Mechanik) oder in denen Messgrößen mit prinzipiellen „Unschärfen" behaftet sind (wie in der Quantentheorie).
19. **Fourierreihen** helfen unter anderem, zu verstehen, wie die Klangfarbe eines Tones physikalisch zustande kommt.

20. **Fourierintegrale** sind nützliche Techniken der Feldtheorie, da sie es erleichtern, deren Grundgleichungen zu lösen. In der Quantentheorie spielen sie eine besonders prominente Rolle – sie werden insbesondere dazu benutzt, um den Zusammenhang zwischen Ort und Impuls zu beschreiben.

All diese mathematischen Themen werden im vorliegenden Buch mit einem an die Anwendungen im Lehramtsstudium angepassten Grad an mathematischer „Milde" behandelt. Ein gewisses Maß an mathematischer und argumentativer „Strenge" wird nur dort eingehalten, wo es notwendig ist, um Missverständnissen und Anwendungsfehlern vorzubeugen. Zahlreiche Aussagen werden ohne Beweis (oder lediglich mit einer „Beweisidee") präsentiert. Die am Ende der einzelnen Kapiteln zusammengestellten Aufgaben betreffen vor allem das Grundverständnis des Stoffs und die wichtigsten Rechentechniken. Der Haupttext des Buches stellt auch darüber hinausgehende Zusammenhänge, Argumentationen und Anwendungen vor.

Um ein mögliches Missverständnis auszuräumen, sei an dieser Stelle betont, dass die hier behandelte Mathematik – sowohl in ihrer Breite als auch in ihrer Tiefe – weit über das hinausgeht, was Sie in Ihrer künftigen Berufspraxis an Ihre SchülerInnen weitergeben können. Es ist *nicht* der Zweck dieses Buches, die „mathematischen Methoden des Physikunterrichts" zu beschreiben. *À la longue* soll es Ihnen helfen, die Theorien der Physik während ihres Studiums so gut kennen zu lernen, dass Sie Ihren Unterricht souverän und mit Verständnis planen können.

Abschnitte, die mit einem Stern * gekennzeichnet sind, enthalten Ergänzungsstoff, der der Vertiefung dient, zum weiteren Nachdenken anregen soll und – wenn es denn sein muss – übersprungen werden kann.

Elektronische Werkzeuge

An zahlreichen Stellen des Buches werden Hinweise gegeben, wie Computeralgebra zur Darstellung und Berechnung genutzt werden kann, und etliche Aufgaben sind mit derartigen Techniken zu lösen. Computermethoden sind nützlich, um mathematische Operationen, die *im Prinzip verstanden werden*, von einer Maschine ausführen zu lassen. Sie dienen *nicht* dazu, Verständnis zu ersetzen, aber manchmal können sie Verständnis fördern! Wenn Sie beispielsweise wissen, wie eine Multiplikation der Art

$$(a-3b)(-2c+d-f)$$

auf dem Papier ausgeführt, d.h. wie die Klammern ausmultipliziert werden, können Sie die langwierigere Rechnung

$$(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6+q^7+q^8+q^9+q^{10})(1-q)$$

von einem Computeralgebra-System (CAS) ausführen lassen. Probieren Sie es! – Wenn Sie das erstaunliche Resultat sehen, sollten Sie sogleich versuchen, zu *verstehen*, wie es zustande kommt. Die beste Methode, dies zu erreichen, besteht darin, wieder zum Papier zurückzukehren und die gleiche Rechnung „händisch" durchzuführen! Dann werden Sie auch sehen, dass sie gar nicht *so* langwierig ist wie vielleicht vermutet.

Berechnungen mit dem Computer können helfen, Zeit zu sparen und Resultate zu erlangen, die wir (innerhalb einer vertretbaren Zeitspanne) auf andere Weise nicht gewinnen könnten. Wenn Sie etwa *im Prinzip* wissen, wie eine gegebene Funktion graphisch dargestellt werden kann und wie ein Funktionsgraph benutzt werden kann, um Eigenschaften der Funktion abzulesen, ist es durchaus statthaft, den Graphen der Funktion $f(x)=x^4-5x^3-x^2-3$ mit Hilfe eines geeigneten Werkzeugs zu plotten, um herauszufinden, wie viele Nullstellen sie besitzt. Probieren Sie es! – Sie sollten genau zwei reelle Nullstellen finden.

Computermethoden können auch helfen, mehr unserer wertvollen Zeit der *Interpretation* von Resultaten zu widmen. Zahlreiche Gleichungen und Differentialgleichungen der Physik (von denen nur die allerwichtigsten Typen in diesem Buch besprochen werden) können (exakt oder näherungsweise) mit ihrer Hilfe gelöst werden. Sie sind aus der physikalischen Forschung nicht mehr wegzudenken und eröffnen auch dem Physikunterricht neue Perspektiven, sollten also von Studierenden des Lehramts möglichst früh beherrscht werden.

Computerprogramme sind aber nicht unfehlbar – wir müssen *immer* mitdenken, wenn wir sie benutzen! So wird beispielsweise die Gleichung

$$\frac{x}{x} = 1$$

(über der Menge der reellen Zahlen) von den meisten Computeralgebra-Systemen als „wahre Aussage" klassifiziert, da die linke Seite zu 1 gekürzt wird. Das hieße, dass die Lösungsmenge aus allen reellen Zahlen besteht. Tatsächlich besteht die Lösungsmenge aber aus allen *von Null verschiedenen* reellen Zahlen. Der Grund dafür liegt darin, dass die linke Seite der Gleichung für $x=0$ *nicht* zu 1 gekürzt werden kann – und genau diesen kritischen Punkt berücksichtigt ein Computeralgebra-System in der Regel nicht! Wenn Sie regelmäßig elektronische Berechnungswerkzeuge einsetzen, werden Sie mit der Zeit ein Gefühl dafür bekommen, wann Sie einem Resultat gegenüber misstrauisch sein sollten.

Was die Aufgaben zu den einzelnen Kapiteln dieses Buches betrifft, so sollten Sie immer, wenn Sie es für sinnvoll halten (und der Aufgabentext es nicht ausdrücklich verbietet), entsprechende Tools verwenden! In manchen Aufgaben wird der Computereinsatz eigens empfohlen oder vorgeschrieben.

Wie bereits erwähnt, kommt der Computeralgebra unter den elektronischen Hilfsmitteln eine besondere Bedeutung zu. In diesem Buch werden ausschließlich Hinweise zur Bedienung des Programms ***Mathematica*** (eines der mächtigsten Werkzeuge für mathematische und physikalische Anwendungen) gegeben. (Eingeflochtener *Mathematica*-Code ist in `dieser Schriftart` geschrieben). Prinzipiell können Sie anstelle von *Mathematica* auch ein anderes Computeralgebra-System verwenden (wobei sich natürlich gewisse Unterschiede in Umfang und Bedienung ergeben), wie beispielsweise eines aus der folgenden Liste:

- ***Maple*** (http://www.scientific.de/maple.html und http://www.maplesoft.com/)
- ***Derive*** (http://www.chartwellyorke.com/derive.html)
  Leider wird dieses für den Unterricht besonders geeignete Werkzeug nicht mehr weiterentwickelt.
  Online-Kurs: http://www.austromath.at/daten/derive/
  International Derive User Group: http://www.derive-europe.com/support.asp?dug
- ***Maxima*** (http://maxima.sourceforge.net/)
  Ein gratis erhältliches Open-Source-CAS!
  Online-Kurs: http://www.austromath.at/daten/maxima/
- ***Wiris*** (http://wiris.schule.at/)
  Ein relativ junges System, dessen Online-Version (derzeit) gratis genutzt werden kann.

Welche Programme in den Schulen zum Einsatz kommen werden, wenn Sie Ihr Studium beendet haben, lässt sich natürlich nicht voraussagen. Das Prinzip der Nutzung ist aber bei allen derartigen Systemen ähnlich.

Auf den Seiten http://www.univie.ac.at/physik/studium/mathematischeMethoden/einstieg/ (Einstieg in die physikalischen Rechenmethoden) der Universität Wien finden Sie nützliche Informationen zum Einstieg in die Nutzung von *Mathematica* anhand einfacher mathematischer Aufgabenstellungen, die Ihnen bereits vertraut sein sollten.

Notwendige Vorkenntnisse

Wie in jedem Lehrbuch dieser Art werden auch hier einige Kenntnisse vorausgesetzt. Sie gehen über den üblichen Mathematik-Schulstoff nicht hinaus. Besonders wichtig ist, dass Sie

- ohne Hilfsmittel Terme umformen und einfache Gleichungen lösen können,
- ohne Hilfsmittel grundlegende Eigenschaften reeller Funktionen ermitteln können,
- Graphen einfacher Funktionen ohne Hilfsmittel skizzieren und interpretieren können,
- die Winkelfunktionen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen kennen,
- Grundzüge der Vektorrechnung beherrschen,
- wissen, was die Ableitung einer Funktion ist,
- einfache Funktionsausdrücke ohne Hilfsmittel differenzieren können,
- wissen, was das unbestimmte und das bestimmte Integral einer Funktion ist und
- einfache Funktionen ohne Hilfsmittel integrieren können.

Die Zusätze „ohne Hilfsmittel“ sind wichtig, denn sie drücken aus, dass es bei diesen Voraussetzungen um das *Verstehen* elementarer Begriffe und Methoden geht! Am Ende dieses Kapitels finden Sie eine Reihe von Aufgaben, die Sie bewältigen können sollten. Wenn Sie mit ihnen Schwierigkeiten haben, so versuchen Sie bitte, die entsprechenden Inhalte so schnell wie möglich nachzulernen!

Tipps zum Lernen und zum Lösen der Aufgaben

Bitte beherzigen Sie einige allgemeine Tipps beim Arbeiten mit diesem Buch:

- Versuchen Sie, den Stoff zu *verstehen*! Gelingt Ihnen das, ist der Aufwand des Auswendiglernens von Formeln erheblich geringer, als Sie sich vielleicht träumen lassen! Falls Sie das Buch begleitend zu einer Lehrveranstaltung nutzen, scheuen Sie sich nicht, *rechtzeitig* Verständnisfragen an den Vortragenden oder an Ihre KollegInnen zu stellen!
- Lernen Sie allein *und* gemeinsam mit KollegInnen! Diese Kombination zählt zu den effektivsten Lernmethoden.
- Lassen Sie sich auf die mathematischen Sprech- und Schreibweisen ein! Benutzen Sie sie selbst (z.B. beim Lösen der Aufgaben und beim Präsentieren in Lehrveranstaltungen)! Auch wenn es Ihnen vielleicht zu Beginn schwer fällt, sich mathematisch einigermaßen genau auszudrücken, wird es für Sie ein großer Gewinn sein, wenn Sie die ersten Hürden meistern.
- Auch wenn dieser (oder ein ähnlicher) Stoff in einer Lehrveranstaltung vorgetragen wird – schreiben Sie (trotz der Existenz dieses Buches) mit!

Hier noch ein paar Tipps für die Bearbeitung der Aufgaben:

- Versuchen Sie, die Aufgaben zu bewältigen, *bevor* Sie die mitgelieferten Lösungen heranziehen!

- Schreiben Sie die Lösungswege der Aufgaben möglichst vollständig auf (egal ob handschriftlich oder elektronisch)! Um sie auch ein paar Monate später noch lesen zu können, fügen Sie eigene Kommentare (z.B. über noch offene Fragen) ein!
- Wann immer Sie eine Aufgabe gelöst haben, fragen Sie sich, was Sie jetzt besser wissen als vorher! Die mathematische (und auch physikalische) Interpretation eines Rechenergebnisses ist oft wichtiger als die Rechnung selbst. Typische Methoden, dies zu tun, können sein:

    - einen Weg finden, um die Glaubwürdigkeit des Resultats zu überprüfen,
    - die Graphen auftretender Funktionen zeichnen oder plotten, um deren Verhalten besser zu verstehen,
    - Spezialfälle betrachten und
    - versuchen, den eingeschlagenen Lösungsweg kurz und bündig (in Worten) zu formulieren.

- Wann immer Sie es für nützlich halten, setzen Sie Computermethoden ein, auch wenn dies im Aufgabentext nicht ausdrücklich nahegelegt wird (z.B. um einen Graphen zu zeichnen oder um ein Gleichungssystem zu lösen). Falls Sie bisher bereits mit solchen Methoden gearbeitet haben, greifen Sie auf Ihre Erfahrungen und die Ihnen bekannten Werkzeuge zurück!

Konventionen

Um Lehrende, die dieses Buch begleitend zu Lehrveranstaltungen empfehlen, gleich zu Beginn über die verwendeten Schreibweisen zu informieren, seien hier die wichtigsten Konventionen zusammengestellt:

- In allen Kapiteln, in denen **Vektoren** vorkommen, außer 15 – 17, werden diese durch *Pfeile* gekennzeichnet, wie beispielsweise $\vec{v}$. In diesen Kapiteln ist es im Prinzip gleichgültig, ob ein Vektor in Spalten- oder Zeilenform angeschrieben wird. Der besseren Lesbarkeit halber wird in der Regel die Spaltenform vorgezogen. Weitere in diesen Kapiteln benutzte Konventionen sind:

    - Der **Ortsvektor**, d.h. der Verbindungsvektor vom Ursprung des Koordinatensystems zu einem Punkt mit Koordinaten (x,y) bzw. (x,y,z), wird einheitlich mit $\vec{x}$ bezeichnet, sein Betrag mit r.
    - **Indizes**, die Koordinaten oder Vektorkomponenten durchnummerieren, werden generell *tiefgestellt*. Die in der Differentialgeometrie übliche Unterscheidung zwischen kovarianten (oberen) und kontravarianten (unteren) Indizes wird in diesem Buch nicht benötigt. An wenigen Stellen wird statt (x,y) und (x,y,z) zwecks deutlicherer Durchnummerierung (x_1,x_2) und (x_1,x_2,x_3) geschrieben. Die x-Komponente (erste Komponente) eines Vektors $\vec{v}$ wird mit v_x oder v_1 bezeichnet, seine j-te Komponente mit v_j.

- In den Kapiteln 15 – 17, die von der **linearen Algebra** handeln, werden die *Vektorpfeile* gemäß den in diesem Teilgebiet der Mathematik üblichen Konventionen *weggelassen*. Weiters wird in diesen Kapiteln zwischen Spalten- und Zeilenvektoren ($n\times 1$-Matrizen und $1\times n$-Matrizen) unterschieden. Für die Einheitsmatrix wird das Symbol $\mathbf{1}$ verwendet.
- Die Mengen der reellen und der komplexen Zahlen werden mit $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ bezeichnet.

- Integrale werden (im Hinblick auf Mehrfachintegrationen) in der Form $\int_a^b dx\, f(x)$ geschrieben.

Dank

Ein herzliches Dankeschön möchte ich an dieser Stelle allen Studierenden aussprechen, die in den Genuss des Skriptums kamen, das diesem Buch vorausging, und die mit ihren Rückmeldungen halfen, das Werk in die vorliegende Form zu bringen. Stellvertretend für viele möchte ich Michael Edinger sowie (für die zweite Auflage) Eren Simsek und Helmut Koller danken, die mich auf etliche Fehler und unklare Textstellen hinwiesen.

Website zu diesem Buch

Unter der Web-Adresse

http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/grundlagen/

finden Sie zusätzliches Material (wie *Mathematica*-Notebooks zu einigen der in diesem Buch behandelten Themen und weitere Muster-Klausuren) sowie die Errata, die trotz x-maliger Überarbeitung des Manuskripts und einiger in der zweiten Auflage vorgenommener Korrekturen noch überlebt haben. Ich freue mich über Ihr Feedback an die Adresse franz.embacher@univie.ac.at.

Zweite Auflage

In der hier vorliegenden zweiten Auflage (2010) wurden einige Tippfehler und eine Grafik korrigiert. Die Nummerierung der Formeln, Abbildungen und Aufgaben ist davon nicht betroffen. Details zu den Korrekturen finden Sie in der oben angegebenen Webseite

Übungsaufgaben zur Überprüfung der Vorkenntnisse

1. Seien E_{kin}, m und c positiv. Ermitteln Sie jenes positive v, für das die Beziehung
$$E_{\text{kin}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) mc^2$$ gilt.

2. Vereinfachen Sie den Term $\frac{1}{wL}\left(\frac{L}{u-w} - \frac{L}{u+w} - \frac{wL}{u^2-w^2}\right)$.

3. Welche Figuren werden durch die Mengen

$$G_1 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2\}$$
$$G_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 9\}$$
$$G_3 = \{(x,y) \mid x < y\}$$

in der Zeichenebene $\mathbb{R}^2$ dargestellt?

4. Welche Körper werden durch die Mengen

$$V_1 = \{(x,y,z) \mid 0 \le x,y,z \le 1\}$$
$$V_2 = \{\vec{x} \mid |\vec{x}| \le 3\}$$
$$V_3 = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \text{ und } z > 0\}$$

im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ dargestellt?

5. Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen (zuerst ohne Hilfsmittel auf einem Blatt Papier, dann mit einem geeigneten elektronischen Werkzeug): $y(x) = 3x - 4$, $y(x) = 3x^2 + 4$, $y(x) = x^2 - 2x + 1$, $y(x) = \sqrt{4 - x^2}$ und $y(x) = \sqrt{4 + x^2}$. Um welche Kurventypen handelt es sich?

6. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen (zuerst ohne Hilfsmittel auf einem Blatt Papier, dann mit einem geeigneten elektronischen Werkzeug): $y(x) = \sin x$, $y(x) = \cos x$, $y(x) = \sin(4x)$, $y(x) = 2 - \cos x$, $y(x) = x \sin x$, $y(x) = 2e^{-x}$ und $y(x) = e^{-4x^2}$.

7. Finden Sie durch Bilden der Skalarprodukte heraus, welche der Vektoren

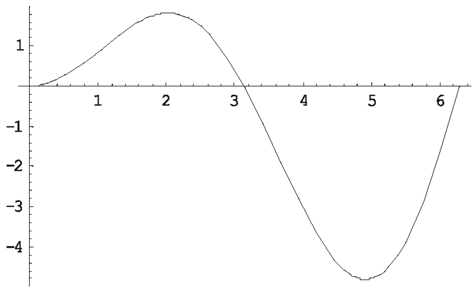
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufeinander normal stehen. Berechnen Sie außerdem deren Beträge.

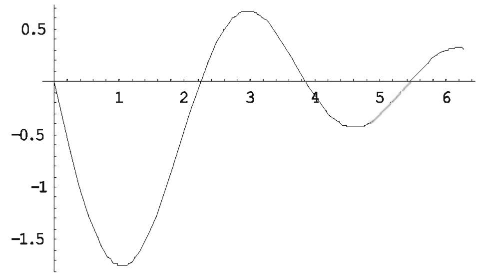
8. Berechnen Sie ohne Hilfsmittel die Ableitung (nach x) von: $\sqrt{x}$, $\sqrt{x^2+1}$, $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, $\sin x$, $A \sin x + B \cos x$, $A \sin(cx) + B \cos(cx)$, $\sin(x^2)$, $\sin^2 x$, $x^2 \sin x$, $\dfrac{\sin x}{x}$, e^{kx}, e^{x^2}, e^{-x^2} und $\ln(1 + x^2)$.

9. Ordnen Sie den durch die Graphen (1), (2), (3) dargestellten Funktionen die Graphen ihrer Ableitungen zu:

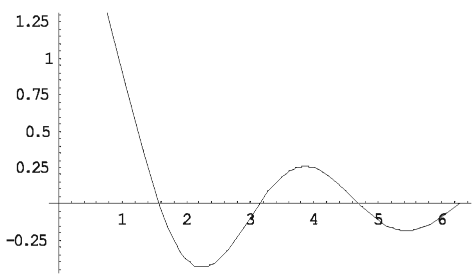
Funktionen *Ableitungen*



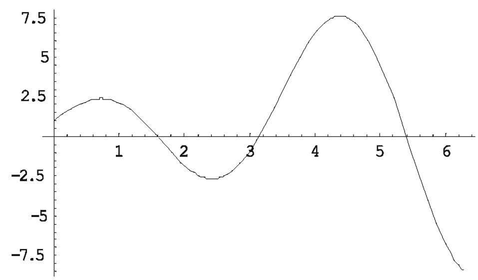
(1)



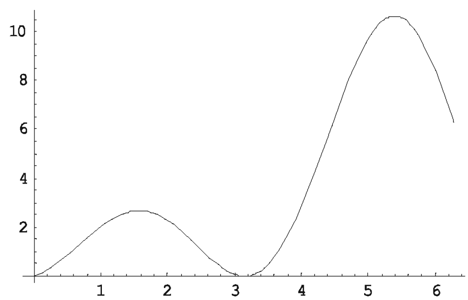
(a)



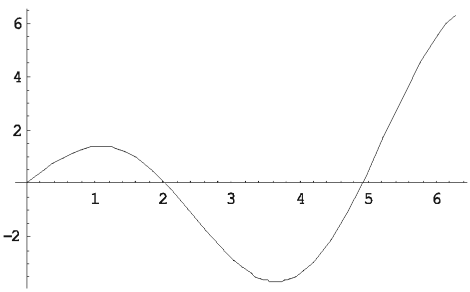
(2)



(b)



(3)



(c)

10. Ein Körper befindet sich zur Zeit t am Ort $x(t) = A\sin(\omega t)$. Berechnen Sie seine Geschwindigkeit zur Zeit $\frac{\pi}{2\omega}$. Interpretieren Sie Ihr Resultat!