KAPITEL 1

Einleitung

Die klassische Spieltheorie bietet eine elegante Möglichkeit, die Interaktionen zwischen konkurrierenden oder kooperierenden Parteien – die eigene oder gemeinsame Ziele erreichen wollen – zu untersuchen. Viele Prozesse der Informatik können als Spiele mit mehreren Spielern oder Agenten modelliert werden. Es ist daher nicht überraschend, dass es enge Verbindungen zwischen den Bereichen der Spieltheorie und der Algorithmik gibt. Mit der Entwicklung von Computern und besonders mit der Einführung des Internets haben in den letzten Jahrzehnten die algorithmischen Aspekte solcher Interaktionen stark an Bedeutung gewonnen. Die „Algorithmische Spieltheorie“ beschäftigt sich mit der Komplexität von Problemstellungen in der Spieltheorie und mit den Algorithmen zur Lösung solcher Probleme.

1.1 Einige Beispiele

Bevor wir in das Thema richtig einsteigen, starten wir mit einer kleinen Menge an Beispielen und damit auch ersten Einblicken in die Themen sowie Typen von Spielen, die wir in diesem Buch betrachten werden.

Zunächst jedoch noch zwei Kommentare: Titel und Beschreibung des kommenden Spiels *Battle of the Sexes*, bzw. *Kampf der Geschlechter*, sind etabliert und werden zur besseren Wiedererkennung auch hier so verwendet. Auch wird in diesem Buch regelmäßig von *Spielern* die Rede sein, für die wir — zur besseren Lesbarkeit — nicht in das Femininum wechseln werden.

1.1.1 Battle of the Sexes

Der „Kampf der Geschlechter“ ist ein klassisches Zwei-Personen-Spiel, in dem die „Spieler“, die wir hier als *Er* und *Sie* bezeichnen werden, zwischen zwei Optionen wählen müssen. So können sie (a) zu einem Fußballspiel oder (b) ins Theater gehen. Dabei präferieren beide Spieler eine „gemeinsam“ durchgeführte Aktion.

$$\begin{array}{cc} & \text{Sie} \\ & \begin{array}{cc} \text{Theater} & \text{Fußball} \end{array} \\ \text{Er} \begin{array}{c} \text{Theater} \\ \text{Fußball} \end{array} & \begin{pmatrix} 2/4 & 0/0 \\ 1/1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Wir bezeichnen die verschiedenen Wahlmöglichkeiten der beiden Spieler als „Strategien“. So haben beide („Er“ und „Sie“) unabhängig voneinander die Strategien *Theater* und *Fußball*:

$$S_{\text{Sie}} = \{\text{Theater}, \text{Fußball}\}$$
$$S_{\text{Er}} = \{\text{Theater}, \text{Fußball}\}$$

Kombiniert existieren damit vier Strategiekombinationen, die bereits durch die vier Einträge in der Matrix repräsentiert werden. Abkürzend schreiben wir hier „T“ für die Wahl des Theaters und „F“ für die Wahl des Fußballspiels:

$$S_{\text{Er}} \times S_{\text{Sie}} = \{(\text{T}, \text{T}),\ (\text{T}, \text{F}),\ (\text{F}, \text{T}),\ (\text{F}, \text{F})\}$$

Anhand dieses einfachen Szenarios können wir nun bereits eine interessante Beobachtung machen. In diesem Spiel finden wir mehrere *stabile* Strategiekombinationen, sogenannte „Nash-Gleichgewichte“.

Nash-Gleichgewicht

Diese Gleichgewichte werden wir später noch genauer charakterisieren, sie sind aber für diese einfache Betrachtung bereits von Interesse. Ein Nash-Gleichgewicht liegt vor, wenn für jeden Spieler x (in diesem Fall Er und Sie) folgendes gilt: Behalten alle anderen Spieler ihre Strategie bei, so kann x durch einen Wechsel der Strategie keinen Vorteil erlangen. Anders gesagt: *Kein Spieler kann seine Situation durch einen Wechsel der eigenen Strategie verbessern.*

In unserem Beispiel gibt es zwei Nash-Gleichgewichte: (T, T) und (F, F). Betrachten wir einmal die Theater-Theater-Kombination: Hier erhalten „Er“ zwei und „Sie“ vier Punkte. Wechselt nun „Er“ seine Strategie (dies entspricht der Situation (F, T)), so verringert sich seine Zufriedenheit (sein „Nutzen“, seine „Punktzahl“, sein „Gewinn“, seine „Auszahlung“,. . . ; hier gibt es mehrere Begriffe, die alle das gleiche beschreiben) um einen Punkt. Wechselt hingegen „Sie“ ihre Strategie (also von Theater zu Fußball), verringert sich ihre Zufriedenheit von vier auf null. Analog lässt sich dies bei der Fußball-Fußball-Kombination zeigen.

Wir werden den Begriff des **Nash-Gleichgewichts**[→16] im nächsten Kapitel genauer formalisieren.

1.1.2 Das Gefangenendilemma

Betrachten wir ein weiteres klassisches Spiel mit zwei Spielern, das Gefangenendilemma. Die beiden Spieler sind hier Verdächtige, die unabhängig voneinander von der Polizei verhört werden. Sie haben gemeinsam ein Verbrechen begangen, für welches der Polizei allerdings noch nicht ausreichend Beweise vorliegen. Dies könnte sich natürlich ändern, wenn die Verdächtigen sich dazu entscheiden würden, den jeweils anderen unter dem Angebot einer Strafminderung zu verraten, denn selbst wenn die Spieler leugnen, können sie noch wegen eines weniger schlimmen Verbrechens hinter Gitter gebracht werden.

Den Verdächtigen stehen also als Strategien „Verrat“ oder „Leugnen“ zur Verfügung. Für dieses Dilemma gibt es unzählige mögliche Beschreibungen, alle mit ähnlichen Eigenschaften. Eine mögliche Auszahlungsmatrix gestaltet sich dabei wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Spieler B} \\ & & \begin{array}{cc}\text{Verrat} & \text{Leugnen}\end{array} \\ \text{Spieler A} & \begin{array}{r}\text{Verrat} \\ \text{Leugnen}\end{array} & \begin{pmatrix} \text{-4/-4} & \text{-1/-5} \\ \text{-5/-1} & \text{-2/-2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Ein **Nash-Gleichgewicht**[→16] liegt hier vor, wenn beide Spieler die „Verrat“-Option wählen: -4/-4. Würde Spieler A nämlich leugnen, so würde sich seine Punktzahl um 1 verschlechtern. Ebenso bei Spieler B.

Hier ist Leugnen-Leugnen (also die Situation rechts unten) aber *kein* Nash-Gleichgewicht: So können beide Spieler jeweils ihre Punktzahl verbessern, indem sie „Verrat“ begehen. Das Gefangenendilemma ist als solches auch besonders, da hier „Verrat“ stets die bessere Option ist, unabhängig von der Wahl des anderen Spielers. Wir haben damit eine sogenannte **dominante Strategie**[→14] gefunden, ein Thema, mit welchem wir uns in **Kapitel 2**[→9] noch genauer auseinandersetzen werden.

1.1.3 Das Braess-Paradoxon

Auch der Straßenverkehr lässt sich als Spiel modellieren. Ein berühmtes Beispiel ist der Graph aus **Abbildung 1.1**[→5], welcher ein vereinfachtes Straßennetz veranschaulicht, in dem alle n Teilnehmer (hier beispielsweise Autos) vom Start $\mathtt{s}$ zum Ziel $\mathtt{t}$ gelangen möchten. Das Spiel gehört in die Gruppe der *Congestion-Spiele*, mit denen wir uns in **Kapitel 6**[→65] ausführlich beschäftigen werden.

Die Beschriftung, beziehungsweise das Gewicht, der Kanten gibt die Länge beziehungsweise die Kosten der jeweiligen Strecke an. Dabei hängen Kosten der Kanten $\mathtt{s} \to \mathtt{a}$ und $\mathtt{b} \to \mathtt{t}$ zusätzlich von der Anzahl der Spieler x ab, welche die Kante auf ihrem Weg von $\mathtt{s} \to \mathtt{t}$ verwenden. Je mehr Teilnehmer eine Kante verwenden

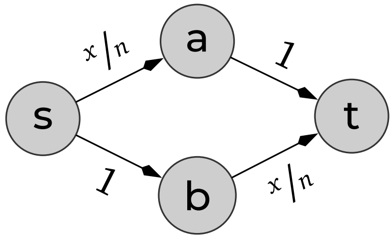

Abbildung 1.1: Eine Straßenverkehrssituation.

möchten, desto teurer wird typischerweise deren Benutzung *für alle Spieler auf der Kante*. So können wir erhöhtes Verkehrsaufkommen (wie beispielsweise Stau) simulieren.

Anders als in vorher betrachteten Spielern reden wir hier von Kosten, die die Spieler minimieren möchten, statt von einer Auszahlung, die maximiert werden soll. Beide Konzepte sind natürlich leicht ineinander überführbar, zum Beispiel durch die Verwendung negativer Auszahlungen für die Simulation von Kosten.

Erneut haben die Spieler unabhängig voneinander zwei Strategien, die sich durch die Wahl der ersten Strecke ergeben:

$$\{\text{„s} \to \text{a} \to \text{t“}, \text{„s} \to \text{b} \to \text{t“}\}.$$

Wird nun jede Strategie von 50 % der Spieler verfolgt, so betragen die gesamten Kosten für alle Spieler: $^{50}/_{100} + 1 = 1 + {}^{50}/_{100} = 1{,}5$. Bei dieser Aufteilung handelt es sich übrigens wieder um ein **Nash-Gleichgewicht**[→4], wie sich leicht zeigen lässt (bei einem Wechsel würden die Kosten ja von $^{50}/_{100} + 1$ auf $1 + {}^{51}/_{100}$ für den Wechselnden ansteigen). In diesem Fall ist dies auch das einzige Gleichgewicht des Spiels.

Die Brücke

Mit der bisherigen Betrachtung erscheint das Szenario recht simpel und ist auch noch recht uninteressant. Etwas spannender wird es nun, wenn wir a und b durch eine Brücke verbinden. Diese ist sehr kurz und breit, wir können also vereinfacht konstante Kosten 0 für deren Benutzung einplanen. Nun gibt es für jeden Spieler vier Strategien zur Auswahl:

$$\begin{aligned} S = \{&\text{„s} \to \text{a} \to \text{t“}, \text{„s} \to \text{b} \to \text{t“}, \\ &\text{„s} \to \text{a} \to \text{b} \to \text{t“}, \text{„s} \to \text{b} \to \text{a} \to \text{t“}\} \end{aligned}$$

Damit verändern sich auch die Gleichgewichte! Es handelt sich nun auch um ein Gleichgewicht, wenn alle Teilnehmer die Route „s → a → b → t“ verfolgen. In dem Fall sorgt nämlich jede Routenwahl dafür, dass die Strecke auf $1 + 1 = 2$ Kosten kommt.

Allerdings verlieren wir auch das vorherige **Nash-Gleichgewicht**[→16]: So kann ein Spieler, welcher die Strecke s → a → t gewählt hatte, nun die Brücke benutzen, um die Kosten für die zweite Kante a → t (welche 1 betragen) auf $0 + \frac{51}{100}$ zu reduzieren.

Diese Ergebnisse sind hier recht überraschend und machen vielleicht klar, weswegen von einem „Paradoxon“ die Rede ist: durch die Integration der kostenlosen Brücke a ⟷ b erhöht sich die zu erwartende Fahrdauer von 1,5 auf 2, da alle die Wege mit Kosten $^{x}/_{n}$ verwenden möchten. Das heißt also, dass das *Entfernen* einer quasi perfekten Straße (hier die Brücke) die Verkehrssituation verbessern kann. Oder andersherum formuliert: Die kostenlose Brücke sorgt hier dafür, dass sich die Situation im Gleichgewicht für alle Teilnehmer verschlechtert.

Spannend zu beobachten ist auch, dass die ursprünglichen Strategien mit den günstigeren Kosten weiterhin zur Verfügung stehen. Es gibt also eine Diskrepanz zwischen einem Zustand, der für alle am besten ist, und einem stabilen Zustand. Ein ähnliches Phänomen war auch schon im **Gefangenendilemma**[→4] zu beobachten. Wir werden dieses Thema unter dem Namen „Price of Anarchy“ in **Kapitel 7**[→91] weiter diskutieren.

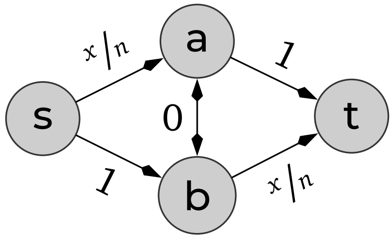

Abbildung 1.2: Eine Straßenverkehrssituation mit Brücke.

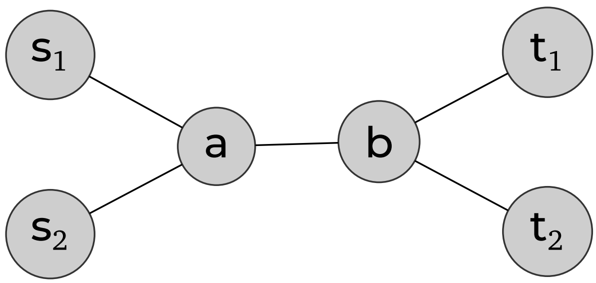

Abbildung 1.3: Ein Netzwerkverbindungsspiel. Die Kosten der Kanten sind jeweils 1.

1.1.4 Das Netzwerkverbindungsspiel

Nehmen wir an, wir haben ein Netzwerk N (Graph $N = (V, E)$) und eine Menge von n Spielern. Für jeden Spieler i gibt es einen Anfangsknoten s_i und einen Endknoten t_i. Die Spieler wollen die s Knoten mit den t Knoten verbinden und kaufen dafür Kanten aus E (Netzverbindungen, Straßen, …). Jede Kante e hat einen Preis $c(e)$. Spieler i kann eine Geldsumme $p_i(e) \geq 0$ für den Kauf von Kante e beisteuern. Eine Strategie oder Aktion E_i für i ist eine Teilmenge von Knoten in E zusammen mit einem Betrag $p_i(e)$ für jede Kante $e \in E_i$. Eine Kombination A von Strategien für alle Spieler definiert einen Lösungsgraphen $G_A = (V, E_A)$ mit $E_A = \{e \in E \mid \sum_i p_i(e) \geq c(e)\}$. Wir definieren die Kosten $\mathrm{u}_i(A)$ für Spieler i als *unendlich*, falls er seinen Zielknoten im Lösungsgraphen nicht erreichen kann. Ansonsten sind die Kosten die Summe der Beträge für die Kanten in G_A, für die er bezahlt hat: $\sum_{e \in E_i} p_i(e)$.

Als kleine Übung überlassen wir es dem Leser herauszufinden, was ein Nash-Gleichgewicht in dem Spiel im Graphen definiert in Abbildung 1.3→6 wäre, wenn alle Kanten die gleichen Kosten 1 haben.

1.1.5 Sponsored Auctions

Wir betrachten ein klassisches „Internetproblem“, an dem beispielsweise jeder Googlenutzer unbewusst teilnimmt. Es geht hierbei um Positionen für Werbeanzeigen, wobei wir deren Gesamtzahl einmal mit k festhalten. Diese k Positionen werden nach ihrer Klickzahl α_j sortiert, sodass $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_k$. Die durch einen Kunden meistgeklickte Position erhält somit die höchste Platzierung, die zweitmeist-geklickte erhält die zweit-höchste und so weiter.

Diese k Anzeigenplätze können nun von n Werbern (Spieler) gebucht werden, wobei sich jeder Spieler i einen Verdienst von Einheiten pro Klick verspricht (wir setzen $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$). Ist ein Werber nun bereit $b_i = 10$ pro Klick zu bezahlen und erhofft sich $v_i = 12$ von einem Klick, so zahlt er für $\alpha_3 = 30$ beispielsweise 300 und erhält 360 (da wir der Einfachheit wegen von korrekten v_i ausgehen). Der Gewinn eines Werbekunden i, welcher den

Slot j erhält, berechnet sich somit durch:

$$u_i(b) = \begin{cases} \alpha_j(v_i - b_i) & \text{falls } j \leq k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der „sonst"-Fall ist einfach erklärt: erhält er keinen der k-Anzeige-Plätze, so zahlt er nichts und bekommt auch nichts. Eine klassische Auktion: k Objekte mit Eigenschaft α_j, die von n Bietern mit v_i eingeschätzt werden. Die Bieter geben dabei Gebote b_i ab, wobei die k Höchstbietenden die Objekte (die Werbeplätze) erhalten.

In solchen Szenarien gibt es verschiedene Blickwinkel zu berücksichtigen. Was ist die Motivation des Auktionärs? Können die Bieter durch geschickte Gebote Kosten einsparen? Mit diesen und weiteren Fragen beschäftigen wir uns in **Kapitel 8**→107. Einen weiteren kleinen Vorgeschmack geben wir noch durch das folgende Beispiel:

Beispiel 1

Wir erwarten $n = 3$ Werbekunden bei $k = 2$ Slots. Sei weiter $\alpha_1 = 200$ und $\alpha_2 = 100$, die erste Werbeanzeige erhält also 200, die zweite Werbeanzeige in der Liste nur noch 100 Klicks von Benutzern. Die Kunden haben nun die Verdiensterwartungen $v_1 = 20$, $v_2 = 14$ und $v_3 = 6$.

Da sich „Kunde 3" maximal $v_3 = 6$ erwartet, wird auch $b_3 \leq v_3$ liegen, damit er durch seine Anzeigen keine Verluste einbringt. In ihrem Wunsch, den Gewinn zu maximieren, entsteht damit zwischen Kunde 1 und Kunde 2 aber nun ein Wettkampf mit besonders spannenden Eigenschaften. Kunde 2 beginnt vielleicht bei 6,01 um Kunde 3 zu überbieten, Kunde 1 bietet eventuell 6,02 (in der beispielhaften Einheit €). Damit ist in diesem Szenario $u_3(b) = 0$. Am nächsten Tag erhöht Kunde 2 auf 6,03, um sich den ersten Platz zu sichern, einen Tag später erhöht Kunde 1 auf 6,04.

Versetzen wir uns einmal in Kunde 2. Bietet er aufgrund des steigenden Preises irgendwann $b_2 = 10{,}01$, um den ersten Werbeplatz zu erhalten (und bleiben v_i und α_i konstant), so beträgt der Gewinn: $u_2(b) = 200(14 - 10{,}01) = 798$. Doch lohnt sich das noch? Lustigerweise nicht. Bezahlt er nun nämlich nur noch $b_2 = 6{,}01$ und erhält damit „nur" den zweiten Werbeplatz, so beträgt der Gewinn $u_2(b) = 100(14 - 6{,}01) = 799 > 798$. Kommt der Wettlauf also an den Preis $b_2 = 10{,}01$, so verringert Kunde 2 sein Angebot wieder drastisch.

Nun kann aber auch Kunde 1 wieder weniger bezahlen, um sich den ersten Platz zu sichern und beginnt wieder bei $b_1 = 6{,}02\ldots$ der Kreislauf beginnt erneut. Dadurch entsteht eine Sägezahn-Funktion, in der die Gebote über die Tage hinweg von 6,01 ansteigen, bis sie $b_2 = 10{,}01$ erreichen. Ein solches Verhalten der Spieler ist aber keineswegs wünschenswert. ⌋