

# Inhaltsverzeichnis

<b>7 Lineare Abbildungen und Transformationen</b>	<b>1</b>
7.1 Lineare Abbildungen und Funktionale . . . . .	1
7.1.1 Lineare Funktionale auf unitären Vektorräumen . . . . .	3
7.1.2 Lineare Operatoren auf endlich-dimensionalen unitären Vektorräumen und Matrizen . . . . .	4
7.1.2.1 Definition der Matrix . . . . .	4
7.1.2.2 Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen und Matrixprodukt . . . . .	5
7.1.2.3 Der Vektorraum der $(d' \times d)$ -Matrizen . . . . .	8
7.1.2.4 Die Algebra der quadratischen Matrizen . . . . .	8
7.1.2.5 Funktionen von Matrizen . . . . .	10
7.1.2.6 Zur Frage der Inversen einer quadratischen Matrix . . . . .	11
7.1.2.7 Die transponierte und die adjungierte Matrix .	12
7.2 Drehungen, orthogonale und unitäre Koordinatentransformationen . . . . .	14
7.2.1 Definition und allgemeine Eigenschaften . . . . .	14
7.2.2 Die aktive und die passive Deutung; orthogonale Koordinatentransformationen . . . . .	16
7.3 Eigenwerte, Eigenvektoren und hermitesche Matrizen . . . . .	18
7.3.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften . . . . .	18
7.3.2 Das Eigenwertproblem bei speziellen Typen von Abbildungen . . . . .	19
7.3.2.1 Hermitesche Matrizen in unitären Vektorräumen . . . . .	20
7.3.2.2 Hauptachsentransformationen . . . . .	21
7.3.2.3 Symmetrische Matrizen in euklidischen Vektorräumen . . . . .	23
7.3.2.4 Unitäre und orthogonale Matrizen . . . . .	23
7.3.2.5 Antisymmetrische Matrizen im dreidimensionalen euklidischen Vektorraum . . . . .	24

<b>7.4</b>	Weiteres zu unitären und orthogonalen Transformationen . . . . .	25
7.4.1	Allgemeine Definition von Matrixfunktionen . . . . .	25
7.4.2	Hypermaximale Darstellung unitärer Transformationen	26
7.4.3	Die Exponentialdarstellung eigentlicher Drehungen im dreidimensionalen euklidischen Vektorraum . . . . .	27
<b>7.5</b>	Determinanten . . . . .	28
7.5.1	Definition und grundlegende Eigenschaften . . . . .	28
7.5.2	Anwendungen auf die Matrizenrechnung . . . . .	31
<b>8</b>	<b>Gleichgewichte und Schwingungen von Punktsystemen</b>	<b>34</b>
8.1	Harmonisch gebundene Punktsysteme . . . . .	34
8.1.1	Das Modell . . . . .	34
8.1.2	Die Formulierung des Problems mittels Matrizen . . . . .	36
8.1.3	Das mechanische Gleichgewicht des Punktsystems . . . . .	37
8.1.4	Bewegungen um die Gleichgewichtslage . . . . .	38
8.1.5	Anwendungen und Beispiele . . . . .	40
8.1.5.1	Zwei gekoppelte lineare Oszillatoren . . . . .	41
8.1.5.2	Lineare Schwingungen eines dreiatomigen symmetrischen Moleküls . . . . .	43
8.1.5.3	Physikalische Anwendungen . . . . .	45
8.2	Schwingungen um Gleichgewichte . . . . .	46
<b>9</b>	<b>Bewegte Bezugssysteme</b>	<b>51</b>
9.1	Transformation zwischen kartesischen Koordinatensystemen . . . . .	51
9.2	Zeitabhängige Koordinatentransformationen . . . . .	54
9.2.1	Reine Drehungen . . . . .	54
9.2.2	Allgemeine Bewegungen . . . . .	58
9.3	Physikalische Anwendungen . . . . .	59
9.3.1	Transformation der Bewegungsgleichungen . . . . .	59
9.3.2	Irdische Laborsysteme als beschleunigte Bezugssysteme	60
<b>10</b>	<b>Krummlinige Koordinaten</b>	<b>64</b>
10.1	Differenzierbare punktweise Abbildungen des Raumes . . . . .	65
10.2	Krummlinige Koordinaten und Koordinatensysteme . . . . .	69
10.2.1	Die lokale Basis . . . . .	69
10.2.2	Darstellungen in der lokalen Basis . . . . .	74
10.2.2.1	Darstellung von Vektoren . . . . .	74
10.2.2.2	Darstellung von skalaren und Vektorfeldern . . . . .	76
10.2.2.3	Zeitableitungen und Vektoroperationen . . . . .	78
10.3	Beispiele . . . . .	81
10.3.1	Zylinderkoordinaten . . . . .	82
10.3.2	Kugelkoordinaten . . . . .	84

<b>11 Die Formulierung der Mechanik nach Lagrange</b>	<b>88</b>
11.1 Vorläufiges zur Motivation . . . . .	88
11.2 Zwangsbedingungen II, Freiheitsgrade, generalisierte Koordinaten und der Konfigurationsraum . . . . .	91
11.2.1 Zwangsbedingungen . . . . .	91
11.2.1.1 Vorbereitung am Beispiel eines Massenpunktes	91
11.2.1.2 Punktssysteme . . . . .	93
11.2.2 Generalisierte Koordinaten und der Konfigurationsraum	95
11.3 Das Hamiltonsche Prinzip und die Lagrangeschen Gleichungen	97
11.3.1 Vorbemerkungen . . . . .	97
11.3.2 Das Wirkungsfunktional und das Hamiltonsche Prinzip	98
11.3.3 Grundzüge der Variationsrechnung . . . . .	101
11.3.4 Die Lagrangeschen Gleichungen der Mechanik . . . . .	106
11.3.5 Die Lagrange-Funktion . . . . .	106
11.3.6 Der Äquivalenzbeweis . . . . .	107
11.3.6.1 Systeme ohne Zwangsbedingungen . . . . .	107
11.3.6.2 Die Invarianz unter Punkttransformationen .	108
11.3.6.3 Der Einbau holonomer Zwangsbedingungen .	110
11.4 Vertieftes Verständnis der Lagrange-Theorie . . . . .	111
11.4.1 Die Form der Lagrange-Funktion in beliebigen Koordinaten . . . . .	111
11.4.2 Beispiel: Das Keplerproblem . . . . .	114
11.4.3 Erweiterungen der Theorie . . . . .	115
<b>12 Das Zweikörper-Zentralkraftproblem</b>	<b>120</b>
12.1 Reduktion auf ein Einkörperproblem . . . . .	121
12.2 Die Relativbewegung . . . . .	122
12.3 Vergleich mit der eindimensionalen Bewegung und Bahnformen . . . . .	124
12.4 Die Keplerbewegung . . . . .	128
12.4.1 Allgemeine Betrachtungen . . . . .	128
12.4.2 Der Orbit der Keplerbewegung . . . . .	129
12.4.3 Die Keplerschen Gesetze . . . . .	132
12.4.4 Rückbesinnung auf das Zweikörperproblem . . . . .	134
<b>13 Elemente der Streutheorie</b>	<b>138</b>
13.1 Zur Statistik von Streuversuchen . . . . .	139
13.1.1 Determination und Statistik . . . . .	139
13.1.2 Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	140
13.1.3 Statistische Interpretation des Streuexperimentes; der Wirkungsquerschnitt . . . . .	150

13.2 Die Streuung am Zentralpotential . . . . .	155
13.2.1 Allgemeine Betrachtungen . . . . .	156
13.2.2 Coulombstreuung und die Rutherfordsche Streuformel .	158
13.3 Reale Streuprozesse . . . . .	162
13.3.1 Umrechnung des Streuquerschnitts in das Laborsystem .	163
13.3.2 Weiterführende Bemerkungen . . . . .	164
<b>14 Mechanik des starren Körpers</b>	<b>166</b>
14.1 Der kontinuierliche Körper . . . . .	169
14.2 Kinematik des starren Körpers . . . . .	171
14.3 Statik des starren Körpers . . . . .	174
14.4 Der Trägheitstensor . . . . .	177
14.4.1 Bewegungen um einen festen Punkt . . . . .	178
14.4.1.1 Die Hauptträgheitsmomente und -achsen . .	181
14.4.1.2 Wechsel des Drehpunktes: Der Steiner- sche Satz . . . . .	183
14.4.2 Rotation um eine feste Achse . . . . .	184
14.4.2.1 Allgemeine Betrachtungen . . . . .	184
14.4.2.2 Beispiel: Das physikalische Pendel . . . .	186
14.4.3 Allgemeine Bewegungen . . . . .	187
14.5 Zur Dynamik des starren Körpers . . . . .	188
14.5.1 Die Bewegungsgleichungen . . . . .	188
14.5.2 Das Grundproblem der Koordinatenwahl . . . .	189
14.5.3 Die Eulerschen Winkel . . . . .	191
14.6 Elemente der Kreiseltheorie . . . . .	192
14.6.1 Die Kreiselgleichungen . . . . .	194
14.6.2 Der freie Kreisel . . . . .	195
14.6.2.1 Der symmetrische freie Kreisel im körper- festen Koordinatensystem . . . . .	196
14.6.2.2 Der symmetrische freie Kreisel im raumfesten Koordinatensystem . . . . .	198
14.6.3 Zur Problematik des schweren Kreisels . . . .	201
<b>15 Formale Mechanik</b>	<b>202</b>
15.1 Erhaltungssätze und Symmetrien . . . . .	203
15.1.1 Über die Klasse der zulässigen Lagrange-funktionen . .	204
15.1.2 Die Homogenität der Zeit und die Erhaltung der Energie . . . . .	205
15.1.3 Die Homogenität des Raumes und die Erhaltung des Gesamtimpulses . . . . .	207

15.1.4 Die Isotropie des Raumes und die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses . . . . .	209
15.2 Die Hamiltonsche Formulierung der Mechanik . . . . .	211
15.2.1 Die Hamiltonfunktion und die kanonischen Gleichungen der Mechanik . . . . .	212
15.2.2 Die Bestimmung der Hamiltonfunktion . . . . .	213
15.3 Phasenraum, Phasenbahn und Poissonklammern . . . . .	216
15.3.1 Phase, Phasenraum und Phasentrajektorie . . . . .	216
15.3.2 Zustand und Prozeß . . . . .	217
15.3.3 Mechanische Größen und Poissonklammern . . . . .	220
15.4 Das Hamiltonsche Prinzip und kanonische Transformationen . . . . .	226
15.4.1 Die kanonischen Gleichungen und das Hamiltonsche Prinzip . . . . .	226
15.4.2 Kanonische Transformationen . . . . .	228
15.4.2.1 Allgemeine Betrachtungen . . . . .	228
15.4.2.2 Wann ist eine Phasentransformation kanonisch? . . . . .	230
15.4.2.3 Andere Formen der Erzeugenden . . . . .	234
15.4.2.4 Praktische Kriterien für kanonische Transfor- mationen . . . . .	239
15.4.3 Die Wirkungsfunktion als Erzeugende der Bewegung . . . . .	245
15.5 Die Theorie von Hamilton-Jacobi . . . . .	247
15.5.1 Die partielle Differentialgleichung von Hamilton-Jacobi . . . . .	248
15.5.2 Zur physikalischen Bedeutung der erzeugenden Funk- tion, die die Hamilton-Jacobi-Gleichung löst . . . . .	252
15.5.3 Energieerhaltung und die ‚verkürzte Wirkung‘ . . . . .	253
15.6 Schlußbemerkungen . . . . .	255
<b>Kommentiertes Literaturverzeichnis</b>	<b>257</b>
<b>Übungsaufgaben mit Lösungen</b>	<b>263</b>
zu Kapitel 7 . . . . .	263
zu Kapitel 8 . . . . .	269
zu Kapitel 9 . . . . .	275
zu Kapitel 10 . . . . .	277
zu Kapitel 11 . . . . .	279
zu Kapitel 12 . . . . .	288
zu Kapitel 13 . . . . .	289
zu Kapitel 14 . . . . .	295
zu Kapitel 15 . . . . .	298
<b>Register</b>	<b>305</b>