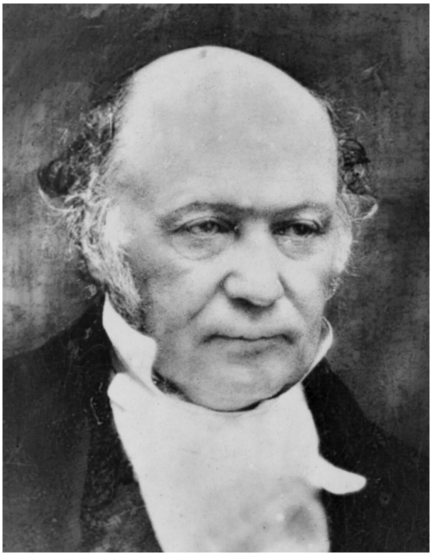
Hamiltonsche Mechanik
Mathematische Aspekte

Tankred Hirschmann

Hamiltonsche Mechanik

Mathematische Aspekte



Sir William Rowan Hamilton

tredition

2025

Hamiltonsche Mechanik
Mathematische Aspekte

Bibliografische Information
der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über folgende Adresse abrufbar: http://dnb.dnb.de

tredition

IMPRESSUM
© 2025 Tankred Hirschmann

Druck und Distribution im Auftrag des Autors: tredition GmbH, Heinz-Beusen-Stieg 5, 22926 Ahrensburg, Deutschland

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Für die Inhalte ist der Autor verantwortlich. Jede Verwertung ist ohne seine Zustimmung unzulässig. Die Publikation und Verbreitung erfolgen im Auftrag des Autors, zu erreichen unter: Tankred Hirschmann, Tucholskystr. 81, 60598 Frankfurt.

Beratung: Claudine Hirschmann
ISBN: 978-3-384-52760-8
Email: hm24@vodafonemail.de

tPB/101001/250213

Vorwort

Die klassische theoretische Mechanik gehört zu den Basisdisziplinen der Physik, die zuerst von Isaac Newton formuliert wurde. Joseph-Louis Lagrange fand eine Reformulierung, die ohne Verwendung von Kräften auskommt. Weswegen sich diese Methode als besonders flexibel erwies, insbesondere für die Behandlung von Systemen mit Nebenbedingungen, da in diesem Fall die umständliche Berechnung von Zwangskräften entfielen.

William Rowan Hamilton entdecke schließlich eine besonders symmetrische Formulierung der Bewegungsgleichungen, die Orts- und Impulskoordinaten gleichberechtigt behandelt. Dadurch bleibt die Struktur dieser Gleichungen unter einer großen Klasse sogenannter kanonischer Transformationen erhalten.

Diese Theorien sind allerdings auch wesentlich abstrakter als der Newtonsche Ansatz, aus diesem Grund werden sie auch als Analytische Mechanik bezeichnet.

Zudem steht die Hamiltonsche Mechanik in interessanter Beziehung zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, auf die Carl Gustav Jacobi ([Jac96], Vorlesung 36, 37) hingewiesen hat. Lösungen dieser Differentialgleichungen können mittels der Methode charakteristischer Kurven gewonnen werden. Im Fall der Hamilton Jacobi Gleichung sind diese charakteristischen Kurven gerade die Lösungen der Hamilton Gleichungen. Ferner sind die Lösungen der Hamilton Jacobi Gleichung wiederum organisch mit kanonischen Transformationen verbunden.

Das vorliegende Buch verfolgt insbesondere das Ziel, die mathematischen Aspekte dieser verschiedenartigen Beziehungen und Zusammenhänge mit einer gewissen Strenge und Vollständigkeit herauszuarbeiten oder abzuleiten.

Besonderer Dank gilt meiner Schwester, Claudine Hirschmann, für ihre Unterstützung bei der Veröffentlichung diese Textes.

Frankfurt, 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Einführungen in die Analytische Mechanik gibt es zahlreiche, darunter sind viele exzellente Werke. Hierzu gehören sicher das Standardwerk von Goldstein [GJS06], ebenso wie das elegante, knappe Buch von Landau [LL67], der Klassiker von Lanczos [Lan70] oder Joses [JS06] Text, der moderne Aspekte berücksichtigt. All diese Lehrbücher liefern eine gründliche Darstellung der Lagrangeschen und Hamiltonschen Methoden der klassischen Mechanik und demonstrieren diese durch Anwendung auf zahlreiche zentrale Probleme der Mechanik: Bewegung unter Einfluss einer Zentralkraft, Kepler- Probleme, Schwingungen, starre Körper etc. Die Kombination aus durchgerechneten Problemen, Beispielen und Übungsaufgaben, vermitteln ein festes Gerüst aus mathematischen Methoden und Anwendungsticks zur Vermittlung der zugrundeliegenden physikalischen Ideen, zu deren Vertiefung und Konkretisierung sie wesentlich beitragen.

Allerdings sind diese Standard-Texte gelegentlich auch hinsichtlich ihrer mathematischen Exaktheit erstaunlich lax, gerade wenn es um Konzepte, wie kanonische Transformationen und deren erzeugenden Funktionen, geht. Die Existenz solcher Generatoren wird oft unzureichend begründet, gelegentlich werden lediglich notwendiger Bedingungen angegeben.

Einen einfachen Ausweg hat Torres del Castillo [Cas11] aufgezeigt. Er betrachtet generierende Funktionen, die nur von den Original-Variablen abhängen, deren Existenz folgt ganz elementar aus der Verifikation entsprechender Integrabilitätsbedingungen. Diese Art von erzeugenden Funktionen nennt Johns [Joh11] (Sec. 20.1) Proto-Generating Functions, sie finden auch eine kurze Erwähnung von Jose [JS06] – wir werden sie im Folgenden als **erzeugende Funktionen vom Typ (G)** bezeichnen. Die eigentlichen Generatoren von kanonischen Transformationen vom Typ (F_1) .. (F_4), wie sie in den Standardtexten betrachte werden, ergeben sich dann durch geeignete Variables-Substitutionen. Aber während letzte nur unter bestimmten Auflösbarkeitsbedingungen existieren, ist die Existenz von (G) Generatoren notwendig und hinreichend für die Kanonizität der entsprechenden Abbildung.

Die Zusammenstellung und Ausarbeitungen dieser Argumente und Ideen sprengte bald den Rahmen verschiedener, der Entropie unterworfener, loser Blattsammlungen, so dass schließlich der Plan zu diesem Buch Gestalt annahm.

Wiewohl also kanonische Transformationen, und die damit eng zusammenhängende Hamilton Jacobi Theorie, Kernthemen des vorliegenden Buches bilden, stellen wir diesen Erörterungen einen kurzen Abriss der analytische Mechanik voran, um die Darstellung in sich geschlossenen zu halten. Wir beginnen dabei direkt mit einer fast axiomatischen Einführung der **Lagrangeschen Methode** und beschränken uns darauf, anhand eines System von Massepunkten, die unter dem Einfluss Potentialkräften stehen, zu zeigen, dass die Ergebnisse der Newtonschen Mechanik, deren Kenntnis wir vorausgesetzten, rekonstruiert werden.

Dem gerade geschilderten Hauptziel des Buches sind auch einige Abweichungen gegenüber Standardtexten geschuldet. Das betrifft zuallererst den Begriff der kanonischen Transformation selbst, da etliche Darstellungen zwei Aspekte dieser Abbildungen nicht ganz sauber voneinander separieren. Intentional werden Abbildungen kanonisch genannt, wenn sie Lösungen eines Hamiltonschen Systems auf Lösungen eines anderen Hamiltonschen Systems abbilden; in modernen Darstellungen werden hingegen Transformationen als kanonisch definiert, wenn sie Poisson Klammern (zu jedem Zeitpunkt) invariant lassen; das hat den Vorteil, dass dazu nur Eigenschaften der Abbildung selbst herangezogen werden. Wir folgen dieser Konvention, führen aber, zur Formulierung des ersten Aspekts, den Begriff der $(H \to K)$ **Hamiltonschen Abbildungen** ein, um damit gerade die Abbildungen zu bezeichnen, die jede Lösung der Hamilton Gleichungen bzgl. einer Hamilton Funktion H in eine Lösung der Hamilton Gleichungen bzgl. K transformieren. Eine der Aufgaben, der wir uns hier widmen, besteht gerade darin, die genauen Relationen beider Begriffe zueinander zu klären.

Eine Folge des mathematischen Blickwinkels, besteht in der Betonung **kategorieller Aspekte** der betrachteten Objekte. Im Fall kanonischer Transformationen bedeutet das, deren Eigenschaften in Bezug auf die Operationen Komposition und Inversion zu untersuchen. In der Tat ergeben sich interessante Eigenschaften für Erzeugende vom Typ (G) für kanonische Transformationen unter diesen Operationen. U.a. können wird damit zu einer einheitliche Behandlung der (F_i), $i = 1, .., 4$, Erzeugenden gelangen, die sich alle als (F_1) Generatoren erweisen, allerdings von Kompositionen der Abbildung mit gewissen Swap-Transformationen $S\colon (q, p) \mapsto (-p, q)$.

Diese Beobachtung lässt sich dann sogar auf erzeugende Funktionen von beliebigen gemischten Typ verallgemeinern.

Da wir uns hier hauptsächlich um die stringente Entwicklung wesentlicher Elemente der analytischen Mechanik bemühen, andererseits die Standardliteratur Ausgezeichnetes bei der Behandlung der üblichen physikalischen Probleme leistet, werden wir auf solche, eher angewandte, Themen nicht eingehen. Das gilt auf für die Relativitätstheorie, die den Rahmen dieses Werks sprengen würde.

Diesen Prinzipien ist auch der Umgang mit den in loser Folge in den Text eingestreuten Beispielen untergeordnet. Diese dienen in der Regel zur Illustration der gerade theoretischen Zusammenhänge oder allgemeinen Relationen, dabei tritt die eigentlichen 'Lösung' eines physikalischen Problems oft in den Hintergrund. Aus diesem Grund, sind sie oft recht elementar, wenn dies genügt, um einen wesentlichen Punkt herauszuarbeiten; ggf. sind sie auch nur konstruiert, um ein Gegenbeispiel zu liefern oder zu zeigen, dass bestimmte Voraussetzungen tatsächlich notwendig sind. Aus diesem Grund beziehen sich die Beispiele oft nur auf freie Teilchen, Teilchen in einem Schwerefeld, gelegentlich auch auf geladene Partikel in einem elektromagnetischen Feld. Tatsächlich werden wir uns aber immer wieder mit dem harmonischen Oszillator beschäftigen – dieses Beispiel erweist sich insbesondere in der Hamilton Jacobi Theorie als erstaunlich vielseitig.

1.1 Weitere Besonderheiten ...

Lagrange Funktion und deren Variablen. Wir trennen die Definition einer Lagrange Funktion konsequent von ihrer 'Auswertung'. In diesem Sinne ist $L(q, u, t)$ einfach eine Funktionen von $2n + 1$ Variablen. Erst bei der Auswertung entlang einer Kurve $q(t)$, d.h. einer (potentiellen) Zeitentwicklung des betrachteten Systems, wird diese in L eingesetzt und $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ betrachtet. Dadurch erübrigen sich von vornherein solche Diskussionen, wie diese, inwiefern die Variablen q_i und $\dot{q}_j$ unabhängig sind.

Diese Betrachtungsweise mag auf den ersten Blick etwas umständlich erscheinen, sie schafft aber Klarheit, etwa im Rahmen der Diskussion, inwiefern ein zusätzlicher Term, der eine totale Zeitableitung ist, die Euler

Lagrange Gleichungen nicht ändert. Etwas

$$\tilde{L}(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(q,t).$$

Dann ist

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \underbrace{\frac{\partial \dot{F}}{\partial \dot{q}_i}}_{\underset{!}{=} F_{q_i}}, \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \underbrace{\frac{\partial \dot{F}}{\partial q_i}}_{= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{q_i}} .$$

Die Behauptung folgt somit, wenn wir verwenden

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(q,t) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left\{F_{q_k}\dot{q}_k + F_t\right\} = F_{q_i}. \tag{1.1}$$

Aber Ableitungen sind vertauschbar, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(q,t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}F(q,t)}_{=0},$$

wenn wir darauf bestehen, dass die $\dot{q}_i$ unabhängig von q_j sind. Das ergibt aber offenbar Unsinn, der aber sofort verschwindet, wenn man vorsichtiger formuliert, dass $F(q,t)$ mit der Lagrange Funktion

$$L_F(q,u,t) := \frac{\partial}{\partial q_i}F(q,t)u_i + \frac{\partial}{\partial t}F(q,t)$$

assoziiert ist. Dann gilt $\frac{\partial L_F}{\partial u_i} = F_{q_i}$. Erst nach Einsetzen einer Kurve $q(t)$, erhält man tatsächlich:

$$L_F(q(t),\dot{q}(t),t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(q(t),t).$$

Variablen vs. Funktionen. Physiker reden gern von Variablen, die in Beziehung zueinander stehen, in der Regel werden einige als unabhängig betrachten, andere als abhängig, wobei diese Rollen im Laufe der Betrachtung auch wechseln können. Das ist sogar besonders naheliegend, da diese Variablen in einem physikalischen Kontext mit physikalischen Größen assoziiert werden, die auch zunächst in einem wechselseitigen Zusammenhang stehen, der dann in Rahmen einer physikalischen Theorie beschrieben und analysiert wird.

Dem kommt zugute, das der Kalkül erster Ableitungen (mit Ketten- und Inversions-Regel) ein solches Vorgehen unterstützt. Etwa kann

$$\mathrm{d}z = z_x \mathrm{d}x + z_y \mathrm{d}y,$$

einfach umgestellt werden, wenn $z_y \neq 0$ ist, zu

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{z_y}\mathrm{d}z - \frac{z_x}{z_y}\mathrm{d}x.$$

Solche Differential- Manipulationen können sehr elegant aussehen, zum Beispiel beim Übergang von den Lagrangeschen Gleichungen zu den Hamiltonschen. Aus $H = p\dot{q} - L$ wird

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H &= \mathrm{d}(p\dot{q}) - \mathrm{d}L \\ &= p\mathrm{d}\dot{q} + \dot{q}\mathrm{d}p - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q}}_{\dot{p}}\mathrm{d}q - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}_{=p}\mathrm{d}\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &= \dot{q}\mathrm{d}p - \dot{p}\mathrm{d}q - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Voraus nun abgelesen werden kann:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Allein mathematisch korrekt ist: Ableitungen können nur von Funktionen gebildet werden, ebenso haben 'Variablen' nur als Platzhalter in Funktionen einen konkreten Sinne, der somit auch einen streng lokalen Kontext hat. Bei diesen 'magischen' Manipulationen bleiben die eventuell implizit verwendeten Bedingung verborgen und die genauen Abhängigkeiten werden ggf. aus den Augen verloren. Wir vermeiden deswegen diese Art der Abkürzungen nicht und statt dessen etwas 'pedantischer' argumentieren: vorausgesetzt, dass $p = \frac{\partial L}{\partial u}(q, u, t)$ nach u auflösbar ist, etwa vermöge $u = \varphi(q, p, t)$, können wir genauer setzen

$$H(q, p, t) := p\ \varphi(q, p, t) - L(q, \varphi(q, p, t), t).$$

Dann erhalten wir die Hamilton Gleichung nun durch geduldiges Ausdifferenzieren, unter Verwendung der Ableitungen der Relation

$$p = \frac{\partial L}{\partial u}(q, \varphi(q, p, t), t).$$

Hier zahlt es sich aus, dass für die Umkehrfunktion ein unabhängiger Bezeichner wie φ verwendet wird und nicht einfach $u = u(q, p, t)$.

Dieses Verfahren ist zwar umständlicher, funktioniert aber 'straight forward'. Damit lassen sich auch komplexere Situationen bewältigen, wie sie im Kontext von kanonischen Transformationen und deren erzeugenden Funktionen auftreten, da zwischen verschieden Variablen-Mengen hin und her abgebildet wird, und sogar Variablen aus Original und Bild gemischt auftreten.

Hamilton Prinzip. Bei der Behandlung des Hamilton Prinzips verzichten wir auf Begriffe wie infinitesimale oder "kleine"Variationen oder Parameter, sowie auf δ- Symbole. All das sind oft verwendete, aber unnötige Zutaten, die den Kern der Sache eher verschleiern, tatsächlich benötigen wir lediglich "*Richtungsableitungen*", um stationäre Kurven zu bestimmen. Ein Kurve $q()$ wird etwa in Richtung "$f()$"verschoben, dann ist

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} I[q() + \tau f()]$$

die zugehörige Richtungsableitung; und $q()$ ist stationär bzgl. des Funktional $I[\,]$, wenn alle diese Richtungsableitungen verschwinden. Die Verschiebung $f(t)$ muss dabei in der Tat nicht "klein" sein oder τ infinitesimal, es genügt, dass $q(t) + \tau f(t)$ im Definitionsbereich der Lagrange Funktion bleibt.

Diese Betrachtungsweise werden wir auch auf Einparameterfamilien kanonischer Transformationen, die Symmetrien eines Hamiltonschen System beschreiben, anwenden. Deren 'infinitesimaler' Generator ist dann einfach

$$g(q, p, t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left(p_i\, Q_{i,s}(q, p, t) - G_s(q, p, t)\right),$$

wobei s der Parameter der Familie T_s ist und $G_s(q, p, t)$ die zugehörigen (G) Erzeugenden ist.

Ebenso werden wir im Zusammenhang mit dem d'Alembert Prinzip, die sogenannten *virtuellen Verschiebungen* als Tangentialvektoren an die, den Nebenbedingung genügende, Untermannigfaltigkeit entmystifizieren.

Von Lagrange zu Hamilton. Gelegentlich wird von der Äquivalenz der Lagrangeschen zur Hamiltonschen Mechanik gesprochen. Das gilt aber nur sehr bedingt. Wir stellen heraus, dass der Übergange von Euler

Lagrange zu entsprechenden Hamilton Gleichungen nur für reguläre Lagrange Funktionen funktioniert; dabei wird eine solche Lagrange Funktion in eine reguläre Hamilton Funktion überführt (mittels einer Legendre Transformation). Und nur unter dieser Voraussetzung beschreiben beide Differentialgleichungssysteme äquivalente Lösungskurven, d.h. sie repräsentieren das gleiche mechanische System.

Innerhalb der Hamiltonischen Theorie sind aber beliebige, also auch nicht-reguläre, Hamilton Funktionen durchaus üblich. In der Hamilton Jacobi Theorie werden sogar solchen kanonischen Transformationen gesucht, die eine bestimmte Hamilton Funktion in die Hamilton Funktion Null überführen, die in der Tat singulär ist.

Wir werden deswegen die Voraussetzungen, unter der wir Lagrange oder Hamilton Funktionen benutzen, explizit benennen, wenn diese nicht durch den Kontext klar hervorgeht. Insbesondere im Rahmen der Behandlung von Wirkungsfunktionen ordnen wir deswegen einer Hamilton Funktion H eine Lagrange Funktion (in Hamilton Form) zu

$$L_H(q,p,t) := p\frac{\partial H}{\partial p}(q,p,t) - H(q,p,t).$$

Gemischte erzeugenden Funktionen. Die Swap- Transformation kann auf gemischte Variablenkonstellationen verallgemeinert werden, die es ermöglicht einzelnen Variablen q_i gegen p_i oder p_j gegen $-q_j$ auszutauschen, so dass wir nach dem Schema der erzeugenden Funktionen (F_i), $i = 1,..,4$, auch generierende Funktionen von beliebig gemischten Typen behandeln können. Während Generatoren vom Typ (G) immer existieren, ist die einer erzeugenden Funktion von einem der (F) Typen, stets an eine Auflösbarkeitsbedingung geknüpft.

Um diese Betrachtungen abzurunden, gehen wir noch auf das Theorem von Arnold (vgl. [Arn89] und [Joh11]) ein, das auf besonderen Eigenschaften von Unterräumen in symplektischen Räumen beruht. Als Folge davon kann für jede kanonische Transformation die Existenz einer geeigneten gemischten (F)- Erzeugenden gezeigt werden.

Die Erfüllbarkeit einer dieser Auflösbarkeitsbedingung liefert auch das Hauptwerkzeug zur Klärung der Frage, welche Klasse von Transformationen eine verschwindende erzeugende Funktion vom Typ (G) haben.

Hamilton Jacobi Theorie. Kanonische Transformationen stehen in engen Zusammenhang mit der Hamilton Jacobi Theorie, d.h. der Theorie der Lösung der Hamilton Jacobi Differentialgleichung, einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Um diese Betrachtungen im richtigen Kontext führen zu können, stellen wir diesen einen Exkurs über partiellen Differentialgleichung erster Ordnung voran, indem wir auch wesentliche Begriffe einführen, wie den des vollständigen Integrals, also einer Schar von Lösungen, die von hinreichend vielen unabhängigen Parametern abhängen. Mit der Methode charakteristischer Kurven können wir Cauchy Probleme zu diesen Differentialgleichungen behandeln. Im Fall der Hamilton Jacobi Gleichung, sind diese Charakteristiken gerade die Lösungen der Hamilton Gleichungen. Mittels parametrisierter Anfangswerte erhalten wir sogar vollständige Integrale.

Diesen Exkurs beschließen wir mit einer kurzen Erörterung von abgeleiteten Lösungen (singulären und allgemeinen Integralen), die mit der Methode der Variation der Konstanten gewonnen werden können. Das gibt auch Anlass, auf den Mythos der Klassifikation von Lösungen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung einzugehen.

Vollständige Integrale der Hamilton Jacobi Gleichung sind auch das Bindeglied zu den von ihnen erzeugten kanonischen Transformationen.

Eine zweite Methode zur Erzeugung von Lösungen der Hamilton Jacobi Gleichung, beruht auf dem Hamilton Fluss bzgl. einer Hamilton Funktion $H(q, p, t)$, d.h. der Abbildung, die Anfangsdaten jeweils die Lösungen der Hamilton Gleichung zu einer gegebenen Zeit zuordnet. Deren Inverses ist eine kanonische Transformation, die H in 0 abbildet. Für diese existiert eine F_2 Generator Funktion, deren Negatives gerade ein vollständiges Integral der Hamilton Jacobi Gleichung ist.

Zeit als dynamische Variable. In der traditionellen analytischen Mechanik spielt die Zeit lediglich die Rolle eines (externen) Evolutionsparameters. Im letzten Teil des Buches entwickeln wir eine erweiterte Form der Mechanik, in der die Zeit als gleichberechtigte dynamische Variable behandelt wird. Obwohl wir hier nicht auf die Relativitätstheorie eingehen wollen, sind erweiterte Lagrange Funktionen interessant; sowohl die Formel für die Transformation von Lagrange Funktionen unter Koordinatensubstitutionen als auch die Behandlung von Erhaltungsgrößen vereinfachten sich. Insbesondere der Energieerhaltungssatz kann in diesem Kontext vereinheitlicht behandelt werden, als Folge einer Noether Invarianz einer erweiterten Lagrange Funktion.

Hingen gestaltet sich der Übergang von der Lagrangeschen zur Hamilton