

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorgeschichte</b>	<b>1</b>
	Die Anfänge der Mathematik als Wissenschaft	1
	Geometrische Konstruktionen in der Antike	2
<b>2</b>	<b>Die natürlichen Zahlen</b>	<b>11</b>
	Die vollständige Induktion	15
	Primzahlen	17
	Das PASCALSche Dreieck	21
	Zahlenfolgen	23
<b>3</b>	<b>Elemente und Mengen</b>	<b>25</b>
	Allgemeine Begriffe	25
	Die RUSSELLsche Antinomie	27
	Grundlegende Mengenoperationen	29
	Das Produkt von Mengen	31
	Relationen	32
<b>4</b>	<b>Die ganzen Zahlen</b>	<b>35</b>
	Die Konstruktion der ganzen Zahlen	35
	Beweise für die Primzahlvermutungen	41
	Die Anordnung von $\mathbb{Z}$ auf dem Zahlenstrahl	44
	Die Abzählbarkeit unendlicher Mengen	46
	Die algebraische Struktur von $\mathbb{Z}$	47
<b>5</b>	<b>Die rationalen Zahlen</b>	<b>55</b>
	Die Konstruktion der rationalen Zahlen	55
	Der absolute Betrag und die Division in $\mathbb{Q}$	58
	Der binomische Lehrsatz	63
	Die Folge der Fibonacci-Brüche	65
	Die Dezimaldarstellung rationaler Zahlen, Teil I	67

Folgen, Reihen, Konvergenz und Grenzwerte .....	69
Die Dezimaldarstellung rationaler Zahlen, Teil II .....	76
<b>6 Die reellen Zahlen</b> .....	81
Die Konstruktion der reellen Zahlen .....	82
Die Vollständigkeit der reellen Zahlen .....	86
Sind die reellen Zahlen abzählbar? .....	93
Potenzen mit rationalen Exponenten .....	95
Das Geheimnis der FIBONACCI-Bruch-Folge .....	96
Algebraische Zahlen in $\mathbb{R}$ .....	100
Ein Beweis für die Existenz transzendenter Zahlen .....	102
<b>7 Die komplexen Zahlen</b> .....	107
Die Konstruktion der komplexen Zahlen .....	107
Irreduzible Polynome und maximale Ideale .....	108
Die imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ .....	111
Die komplexe Zahlenebene .....	113
Glückwunsch! Das Zahlensystem ist komplett. ....	115
<b>8 Elemente der linearen Algebra</b> .....	117
Vektorräume .....	118
Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension .....	120
Die Dimension algebraischer Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ .....	124
Eine mysteriöse Frage .....	131
Basen und Dreiecksmatrizen .....	134
Der Hauptsatz über elementarsymmetrische Polynome .....	137
<b>9 Funktionen und Stetigkeit</b> .....	151
Funktionen .....	151
Die Stetigkeit von Funktionen .....	153
Die Exponentialreihe .....	161
Potenzen mit reellen Exponenten .....	172
Der natürliche Logarithmus .....	173

Das Wachstumsverhalten von $\exp$ und $\ln$ .....	176
Einige Anwendungen von $\exp$ und $\ln$ .....	177
<b>10 Elemente der klassischen Algebra</b> .....	181
Die Irreduzibilität von Polynomen .....	181
Der Fundamentalsatz der Algebra .....	185
Nachbetrachtungen zum Beweis .....	193
Anwendungen des Fundamentalsatzes .....	194
<b>11 Die ersten transzendenten Zahlen</b> .....	199
Diophantische Approximationen .....	200
Das Ergebnis von LIOUVILLE .....	204
Die erste transzendente Zahl .....	209
Kettenbrüche .....	212
Kettenbrüche und transzendente Zahlen .....	221
Abschließende Bemerkungen .....	222
<b>12 Die Exponentialfunktion im Komplexen</b> .....	225
Komplexwertige Funktionen .....	226
Wo liegen die Punkte $e^z$ für $z \in \mathbb{C}$ ? .....	228
Die Kreiszahl $\pi$ .....	232
Trigonometrische Funktionen .....	235
Polarkoordinaten .....	237
<b>13 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal</b> .....	239
Elementare Konstruktionsschritte nach EUKLID .....	241
Intermezzo: Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ .....	243
Ein Kriterium für die Konstruierbarkeit eines Punktes in $\mathbb{C}$ .....	247
Die Konstruktion regelmäßiger $n$ -Ecke .....	261
Ausblick .....	271
<b>14 Differenzialrechnung</b> .....	277
Historische Entwicklung .....	277
Differenzierbarkeit .....	278

Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung .....	288
Höhere Ableitungen .....	290
<b>15 Integralrechnung .....</b>	<b>293</b>
Eine sensationelle Entdeckung .....	294
Integration und Differenziation .....	296
Das Basler Problem und seine Lösung durch FOURIER-Reihen ....	306
Kurvenintegrale in $\mathbb{R}^2$ .....	316
Uneigentliche Integrale .....	319
<b>16 Erste Erkenntnisse über <math>e</math> und <math>\pi</math> .....</b>	<b>321</b>
Das WALLISsche Produkt .....	321
Die STIRLINGSche Formel .....	322
Die Irrationalität von $e$ und $\pi$ .....	327
<b>17 Elemente der Analysis im 18. Jahrhundert .....</b>	<b>333</b>
Partielle Ableitungen .....	333
Das Kurvenintegral über ein totales Differenzial $df$ .....	338
Integration PFAFFscher Differenzialformen .....	341
<b>18 Elemente der Funktionentheorie .....</b>	<b>353</b>
Eine Idee von historischer Dimension .....	353
Komplexe PFAFFsche Differenzialformen .....	355
Der Integralsatz von CAUCHY .....	360
Integrale über homotope Kurven .....	362
Die Integralformel von CAUCHY .....	368
Folgerungen aus der CAUCHYSchen Integralformel .....	374
<b>19 Die Transzendenz von <math>e</math> und <math>\pi</math> .....</b>	<b>381</b>
Interpolation von Funktionen nach NEWTON .....	382
Die Ideen von HERMITE und LINDEMANN .....	383
Ein neuer Beweis der Irrationalität von $e$ und $\pi$ .....	385
Nachbetrachtung zum Beweis .....	391
Die Transzendenz von $e$ und $\pi$ .....	394

Nachbetrachtung zum Beweis .....	404
<b>20 Weitere Ergebnisse zu transzendenten Zahlen .....</b>	<b>405</b>
Der Satz von LINDEMANN-WEIERSTRASS .....	405
Das siebte HILBERTsche Problem .....	408
Die Arbeiten von BAKER zu Linearformen in Logarithmen .....	415
Der Satz von THUE-SIEGEL-ROTH .....	417
Weitere Resultate und offene Fragen .....	421
1974, das Jahr einer „sensationellen Entdeckung“ .....	423
<b>Literaturhinweise .....</b>	<b>427</b>
<b>Index .....</b>	<b>429</b>