

Inhaltsverzeichnis

1 Vorgeschichte	1
Die Anfänge der Mathematik als Wissenschaft	1
Geometrische Konstruktionen in der Antike	2
2 Die natürlichen Zahlen	11
Die vollständige Induktion	15
Primzahlen	17
Das PASCALSche Dreieck	21
Zahlenfolgen	23
3 Elemente und Mengen	25
Allgemeine Begriffe	25
Die RUSSELLSche Antinomie	27
Grundlegende Mengenoperationen	29
Das Produkt von Mengen	31
Relationen	32
4 Die ganzen Zahlen	35
Die Konstruktion der ganzen Zahlen	35
Beweise für die Primzahlvermutungen	41
Die Anordnung von \mathbb{Z} auf dem Zahlenstrahl	44
Die Abzählbarkeit unendlicher Mengen	46
Die algebraische Struktur von \mathbb{Z}	47
5 Die rationalen Zahlen	55
Die Konstruktion der rationalen Zahlen	55
Der absolute Betrag und die Division in \mathbb{Q}	58
Der binomische Lehrsatz	63
Die Folge der Fibonacci-Brüche	65
Die Dezimaldarstellung rationaler Zahlen, Teil I	67

Folgen, Reihen, Konvergenz und Grenzwerte	69
Die Dezimaldarstellung rationaler Zahlen, Teil II	76
6 Die reellen Zahlen	81
Die Konstruktion der reellen Zahlen	82
Die Vollständigkeit der reellen Zahlen	86
Sind die reellen Zahlen abzählbar?	93
Potenzen mit rationalen Exponenten	95
Das Geheimnis der FIBONACCI-Bruch-Folge	96
Algebraische Zahlen in \mathbb{R}	100
Ein Beweis für die Existenz transzendornter Zahlen	102
7 Die komplexen Zahlen	107
Die Konstruktion der komplexen Zahlen	107
Irreduzible Polynome und maximale Ideale	108
Die imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$	111
Die komplexe Zahlenebene	113
Glückwunsch! Das Zahlensystem ist komplett	115
8 Elemente der linearen Algebra	117
Vektorräume	118
Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension	120
Die Dimension algebraischer Erweiterungen von \mathbb{Q}	124
Eine mysteriöse Frage	131
Basen und Dreiecksmatrizen	134
Der Hauptsatz über elementarsymmetrische Polynome	137
9 Funktionen und Stetigkeit	151
Funktionen	151
Die Stetigkeit von Funktionen	153
Die Exponentialreihe	161
Potenzen mit reellen Exponenten	172
Der natürliche Logarithmus	173

Das Wachstumsverhalten von \exp und \ln	176
Einige Anwendungen von \exp und \ln	177
10 Elemente der klassischen Algebra	181
Die Irreduzibilität von Polynomen	181
Der Fundamentalsatz der Algebra	185
Nachbetrachtungen zum Beweis	193
Anwendungen des Fundamentalsatzes	194
11 Die ersten transzendenten Zahlen	199
Diophantische Approximationen	200
Das Ergebnis von LIOUVILLE	204
Die erste transzendente Zahl	209
Kettenbrüche	212
Kettenbrüche und transzendente Zahlen	221
Abschließende Bemerkungen	222
12 Die Exponentialfunktion im Komplexen	225
Komplexwertige Funktionen	226
Wo liegen die Punkte e^z für $z \in \mathbb{C}$?	228
Die Kreiszahl π	232
Trigonometrische Funktionen	235
Polarkoordinaten	237
13 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	239
Elementare Konstruktionsschritte nach EUKLID	241
Intermezzo: Körpererweiterungen von \mathbb{Q}	243
Ein Kriterium für die Konstruierbarkeit eines Punktes in \mathbb{C}	247
Die Konstruktion regelmäßiger n -Ecke	261
Ausblick	271
14 Differenzialrechnung	277
Historische Entwicklung	277
Differenzierbarkeit	278

Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung	288
Höhere Ableitungen	290
15 Integralrechnung	293
Eine sensationelle Entdeckung	294
Integration und Differenziation	296
Das Basler Problem und seine Lösung durch FOURIER-Reihen	306
Kurvenintegrale in \mathbb{R}^2	316
Uneigentliche Integrale	319
16 Erste Erkenntnisse über e und π	321
Das WALLISSche Produkt	321
Die STIRLINGsche Formel	322
Die Irrationalität von e und π	327
17 Elemente der Analysis im 18. Jahrhundert	333
Partielle Ableitungen	333
Das Kurvenintegral über ein totales Differenzial df	338
Integration PFAFFscher Differentialformen	341
18 Elemente der Funktionentheorie	353
Eine Idee von historischer Dimension	353
Komplexe PFAFFsche Differentialformen	355
Der Integralsatz von CAUCHY	360
Integrale über homotope Kurven	362
Die Integralformel von CAUCHY	368
Folgerungen aus der CAUCHYSchen Integralformel	374
19 Die Transzendenz von e und π	381
Interpolation von Funktionen nach NEWTON	382
Die Ideen von HERMITE und LINDEMANN	383
Ein neuer Beweis der Irrationalität von e und π	385
Nachbetrachtung zum Beweis	391
Die Transzendenz von e und π	394

Nachbetrachtung zum Beweis	404
20 Weitere Ergebnisse zu transzendenten Zahlen	405
Der Satz von LINDEMANN-WEIERSTRASS	405
Das siebte HILBERTSche Problem	408
Die Arbeiten von BAKER zu Linearformen in Logarithmen	415
Der Satz von THUE-SIEGEL-ROTH	417
Weitere Resultate und offene Fragen	421
1974, das Jahr einer „sensationellen Entdeckung“	423
Literaturhinweise	427
Index	429