BERNARD BOLZANO-GESAMTAUSGABE

BEGRÜNDET VON JAN BERG, FRIEDRICH KAMBARTEL,
JAROMÍR LOUŽIL, BOB VAN ROOTSELAAR UND EDUARD WINTER

FORTGEFÜHRT VON EDGAR MORSCHER

HERAUSGEGEBEN VON OTTO NEUMAIER UND CHRISTIAN TAPP

REIHE II

NACHLASS

B. WISSENSCHAFTLICHE TAGEBÜCHER

BAND 12

ZWEITER TEIL

MISCELLANEA MATHEMATICA

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

BERNARD BOLZANO

MISCELLANEA MATHEMATICA 22

HERAUSGEGEBEN
VON
JAN BERG

BESORGT
VON
EDGAR MORSCHER UND OTTO NEUMAIER

FROMMANN-HOLZBOOG VERLAG · ECKHART HOLZBOOG
STUTTGART-BAD CANNSTATT 2024

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation
in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind
im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.
ISBN: 978-3-7728-2572-9
eISBN: 978-3-7728-3537-7

© frommann-holzboog Verlag e. K. · Eckhart Holzboog
Stuttgart-Bad Cannstatt 2024
www.frommann-holzboog.de
Satzgestaltung: satz&sonders, Dülmen
Druck und Einband: Memminger MedienCentrum
Gedruckt auf säurefreiem und alterungsbeständigem Papier

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung,
vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder
ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder
unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

INHALTSVERZEICHNIS

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

ZUR EDITION VON BERNARD BOLZANOS *MISCELLANEA MATHEMATICA*

Ein »Vor-Vorwort« zum vorliegenden Band

Bekanntlich haben auch Bücher ihre Schicksale. Dem vorliegenden Band 2B 12/2 der Bernard-Bolzano-Gesamtausgabe (BGA) war ein ganz besonderes – tragisches – Schicksal beschieden. Die Hefte 1–20 der *Miscellanea Mathematica* waren bereits in der Edition von Bob van Rootselaar und Anna van der Lugt erschienen (BGA 2B 2–11), als Bob van Rootselaar schwer erkrankte. Er bat Jan Berg um die Edition der noch ausständigen vier Hefte 21–24 und übergab ihm zu diesem Zweck sukzessive seine Unterlagen für die dafür vorgesehenen Teilbände BGA 2B 12/1, 12/2, 13/1 und 13/2 (inklusive seiner zum Teil schon ziemlich weit fortgeschrittenen Transkriptionen). Für die Bearbeitung dieser Materialien verfaßte Bob van Rootselaar präzise Instruktionen, die er in maschinenschriftlichen Briefen bis kurz vor seinem Tod an Jan Berg sandte, der sie bei seinen eigenen Unterlagen aufbewahrte (der letzte dieser Briefe van Rootselaars ist auf den 3.10.2006 datiert, er starb eine Woche später am 10.10.2006). Das Erscheinen von Heft 21 der *Miscellanea Mathematica* in Bd. 2B 12/1 der BGA, das bereits Jan Berg besorgt hat, erlebte er nicht mehr.

Jan Berg war damals mit der Edition mehrerer Bände der BGA beschäftigt: Zwischen 2006 und 2012 erschienen die von ihm edierten Briefbände BGA 3 5/1, 3 4/2 und 3 2/1 sowie die Bände BGA 2B 14 und 2B 15 mit philosophischen Tagebüchern. Daher konnte er sich erst ab 2012 mit Heft 22 der *Miscellanea Mathematica* befassen und van Rootselaars Transkription überarbeiten sowie ergänzen und mit den verschiedenen Editionsapparaten versehen. Das Manuskript des vorliegenden Bandes BGA 2B 12/2 übergab er dann Anfang 2013 dem Verlag. Aufgrund von technischen Problemen stand die Satzarbeit an diesem Band jedoch noch im Anfangsstadium, als Jan Berg am 22. Oktober 2015 starb.

Neben dem Manuskript des vorliegenden Bandes, das bei Jan Bergs Tod bereits beim Verlag frommann-holzboog in Bearbeitung war, hinterließ Jan Berg auch noch die schon weit vorangeschrittenen Editionsunterlagen von vier Einzelbänden der BGA, um deren Fertigstellung ich mich gekümmert habe

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

VORWORT

Der vorliegende Band 2B 12/2 der *Bernard Bolzano-Gesamtausgabe* enthält die Transkription der Seiten 1913–2002 des Heftes 22 der Handschrift *Miscellanea Mathematica*. Das Originalmanuskript Bolzanos wird in der Handschriftensammlung der Österreichischen Nationalbibliothek unter der Signatur »Series Nova 3454« aufbewahrt. Diese mathematischen Tagebücher werden hier mit amtlicher Genehmigung vom 2. Januar 1967 veröffentlicht.

Jan Berg

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

EDITIONSBERICHT

Das Manuskript von Heft 22 der *Miscellana Mathematica* (MM) wurde entsprechend den Editionsprinzipien der Bolzano-Gesamtausgabe (siehe Band E 2/1, S. 8–15) bearbeitet, wie dies auch schon bei den vorausgehenden Heften der Fall war. Noch bevor Bob van Rootselaar diese Arbeit abgeschlossen hatte, erkrankte er und übergab im Oktober 2006 seine Editionsunterlagen Jan Berg mit der Bitte, sie fertigzustellen und zu edieren. Jan Berg konnte sich wegen vieler anderer Publikationsverpflichtungen erst ab 2012 dieser Aufgabe widmen. Er übergab die maschinenschriftliche Vorlage mit zahlreichen handschriftlichen Ergänzungen und Korrekturen dem Verlag Anfang 2013. Edgar Morscher hat vom Verlag im August 2021 die Druckfahne des Haupttextes erhalten und anhand von Jan Bergs Vorlage sowie anhand von Bolzanos Handschrift kontrolliert und korrigiert; diese Korrekturen wurden dem Verlag im Februar 2022 übergeben. Frau Ute Mühlbach vom Verlag frommann-holzboog ist es zu danken, daß die Zündschnur zur Edition des Bandes über all die Jahre weiterbrannte und das Feuer der Edition nie erloschen ist.

Dies ist nun der letzte von fünf Bänden der Bernard-Bolzano-Gesamtausgabe (BGA), deren Edition Jan Berg noch weitgehend vorbereitet hatte, deren Erscheinen er aber nicht mehr erlebt hat. Die Arbeit an der Endredaktion dieser Bände habe ich nicht als Pflichtaufgabe empfunden, sondern als Werk der Verehrung und liebevollen Freundschaft für Jan Berg.

Wegen der besonderen Eigenschaften der Handschrift von Heft 22 der MM erforderte dieser Band eine Reihe von speziellen editionstechnischen Maßnahmen. Dabei kommt es zu gewissen Abweichungen nicht nur gegenüber den Bänden der anderen Reihen der BGA, sondern selbst gegenüber den Bänden der Reihe 2B und sogar gegenüber den Vorgänger-Bänden der MM, wofür um Verständnis gebeten wird. Auf ein Spezifikum der Handschrift von Heft 22 der MM und auch schon vorausgehender Hefte sei gleich an erster Stelle verwiesen, weil es für die Lektüre des Textes von besonderer Bedeutung ist.

1. Um seine eigenen Kommentare zu einem zitierten oder exzerpierten Text zu markieren, setzt Bolzano sie zwischen *hochgestellte kleine Kreise* (°…°). Es

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

handelt sich dabei also nicht um Eingriffe der Herausgeber, sondern diese Zeichen stehen so schon in Bolzanos Handschrift.

2. *Fehlende Satzzeichen* (insbesondere Punkte und Beistriche) werden in der Regel in eckigen Klammern ergänzt, da es sonst an etlichen Stellen zu Mißverständnissen kommen könnte. Dies gilt auch für den Punkt am Ende einer Zeile, den Bolzano oft wegläßt, ebenso oft aber setzt; um die Einheitlichkeit zu wahren, wird er ergänzt, auch wenn das Satzende ohnehin ersichtlich wäre.

3. Nach den allgemeinen Editionsrichtlinien der BGA sind diejenigen Stellen der Handschrift, die in *lateinischer Schrift* geschrieben sind, nicht in der Grundschrift (Walbaum), sondern in Bodoni wiederzugeben. Wie schon in den vorausgehenden Bänden der MM wird jedoch auch im vorliegenden Band in solchen Fällen von einem Wechsel von der Grundschrift zu Bodoni abgesehen, da fast ausnahmslos alle lateinischen und französischen Wörter bzw. Namen und Texte (aber auch nur sie) in lateinischer Schrift geschrieben sind. Längere lateinische oder französische Zitate, die in der Handschrift mit lateinischen Buchstaben geschrieben sind, fallen im Druck außerdem durch das wesentlich ruhigere Schriftbild auf, das dadurch entsteht, daß darin – im eklatanten Unterschied zur textlichen Umgebung – (fast) keine Abkürzungen vorkommen, die in eckigen Klammern aufgelöst werden.

4. Vollständig *durchgestrichene Zeilen* werden in den Bänden der MM ebenso wie in den anderen Bänden der BGA im Zeilenzähler mitgezählt, jedoch auf andere Weise registriert als in anderen Reihen der BGA, nämlich folgendermaßen: Die letzte Zeile *vor* einer (oder mehreren) durchgestrichenen Zeile(n) sowie die erste Zeile *nach* einer (oder mehreren) durchgestrichenen Zeile(n) scheinen ausdrücklich im Zeilenzähler auf (auch wenn es sich dabei nicht um eine 5er- oder 10er-Zeile handelt), und der Strich für den Zeilenübergang wird bei diesen beiden Zeilen (ebenso wie bei den 5er und 10er-Übergängen) jeweils verdoppelt.

5. Die Handhabung der *Zeilenzählung* ist wegen der vielen Figuren und Tabellen auch in diesem Band der MM (wie schon in den bisherigen Bänden) besonders kompliziert. Längere Tabellen werden wie Figuren behandelt und bleiben ebenso wie diese bei der Zeilenzählung unberücksichtigt.

6. Wörter und Wortfolgen, die in der Handschrift *versehentlich nicht getilgt* wurden, werden zwischen geschwungene Klammern gesetzt – z. B.: und {er} so behauptete er.

7. Um anzudeuten, daß eine Reihe von Formeln, Ziffern oder Buchstaben (oder auch von ganzen Wörtern oder Sätzen) beliebig weit fortzusetzen ist, verwendet man üblicherweise *drei Punkte* (z. B.: a, b, c, …; 1, 2, 3, …; etc.). In der Handschrift der MM stehen statt dessen meistens nur zwei Punkte. Für die Edition der MM-Bände wurde festgelegt, dieser Praxis zu folgen, weshalb auch

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

im vorliegenden Band für diesen Zweck nur zwei Punkte verwendet werden (z. B.: a, b, c, ..; 1, 2, 3, ..; etc.).

8. Innerhalb von *mathematischen Formeln* werden die generellen Editionsrichtlinien der BGA aus naheliegenden Gründen nicht umgesetzt. (Die Ergänzung fehlender Ziffern oder Symbole zwischen eckigen Klammern und die Einschließung überflüssiger Ziffern und Symbole in geschwungenen Klammern würde nämlich innerhalb von mathematischen Formeln zwangsläufig Verwirrung stiften.) Wie schon in den bisherigen Bänden der MM werden die Symbole für mathematische Funktionen im allgemeinen durch die heute üblichen ersetzt; die Differentiale werden, wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, mit »d« bezeichnet. Das Wort »Cosinus« wird in der Handschrift des vorliegenden Bandes zwar meistens mit »Cos.« abgekürzt, aber oft läßt Bolzano auch das »o« weg und schreibt einfach »Cs.« bzw. »Cs«, was nach den Editionsrichtlinien mit »C[o]s.« bzw. »C{o}s« wiederzugeben wäre. Da jedoch kein Mißverständnis zu befürchten ist, wird auf eine Vereinheitlichung verzichtet, und »Cs.« bzw. »Cs« bleibt ohne editorischen Eingriff.

9. Bei den *mathematischen Formeln* ist außerdem zu berücksichtigen, daß Bolzano den gesamten Text der MM sehr flüchtig hingeschrieben hat, da es sich dabei ja nur um Notizen für seinen eigenen Gebrauch handelt. Darunter leiden auch die mathematischen Formeln, die zu einem großen Teil sehr schlampig geschrieben sind und in vielen Fällen unklar bleiben. Wenn es sich um Exzerpte aus anderen Werken handelt, wird die Unklarheit durch Heranziehung der jeweiligen Originaltexte beseitigt, und im Falle von offenkundigen Fehlern erfolgt die Korrektur im allgemeinen stillschweigend. Dennoch bleiben noch viele Unklarheiten (speziell bei der Klammernsetzung), wie die korrekte Form der jeweiligen Formel lautet. Die Herausgeber müssen sich dabei aber jeweils für eine bestimmte Lesart entscheiden und können dies wegen der großen Anzahl solcher Fälle nicht in eigenen Fußnoten kommentieren, ohne die Lesbarkeit des Textes empfindlich zu stören. Wenn sich keine klare Lösung abzeichnet, wird die jeweilige Formel einfach in der fehlerhaften Form wiedergegeben, in welcher sie in der Handschrift auftritt, damit sichtbar wird, daß Bolzanos Handschrift an dieser Stelle fehlerhaft bzw. ungenau ist.

10. Die Bibliographien und Personenregister erhielten in den von Bob van Rootselaar und Anna van der Lugt edierten MM-Bänden BGA 2B 2–11 eine besondere Form, die Jan Berg auch in dem bereits von ihm besorgten Teilband 2B 12/1 noch beibehalten hat. Für den von ihm selbst edierten vorliegenden Teilband 2B 12/2 hat Jan Berg jedoch Bibliographie und Personenregister auf die auch in den anderen Bänden der BGA übliche Gestaltung umgestellt.

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

EINLEITUNG

Professor Bob van Rootselaar ist am 10. Oktober 2006 verstorben. Kurz vor seinem Tod hat er mir sein Material zu den *Miscellanea Mathematica 21–24* vermacht mit der Bitte um Weiterführung der Herausgabe. Das Heft 21 wurde bereits im Band 2B12/1 der *Bernard Bolzano-Gesamtausgabe* im Jahr 2007 veröffentlicht.

Im vorliegenden Heft 22 findet man folgende Datierungen: 14.7.1830 (MM 1917), 22.7.1830 (MM 1918), 7.9.1830 (MM 1918), 8.9.1830 (MM 1918) und 1.8.1832 (MM 1988). Der Inhalt des Heftes 22 ist also zwischen 1830 und 1832 entstanden.

Ich habe die Transkriptionen anhand einer Kopie von Bolzanos manchmal äußerst schwer leserlichem Original geprüft, gewisse grammatische Korrekturen durchgeführt und in der Transkription einige Fehler korrigiert sowie Lücken ergänzt. Ferner bin ich den Hinweisen zur einschlägigen Literatur nachgegangen und habe die Bibliographie zusammengestellt.

*

Bolzanos späte Naturphilosophie basiert auf der Annahme, daß das ganze Weltall eine atomare Teilchenstruktur hat. Im Unterschied zu den klassischen Atomisten meinte er, daß es in jedem Punkt des Raumes ein Atom gebe. Es existiere daher kein Vakuum. Dies beinhaltet für Bolzano, daß keine Substanz S als isoliert gekennzeichnet werden kann in dem Sinne, daß es zu jeder klein genug genommenen Entfernung von S eine Entfernung von S gibt derart, daß kein Atom in einer kleineren Entfernung von S existiert. Dies veranlaßt ihn dazu, seine frühere, in der *Athanasia* (Bolzano(9), S. 155) vertretene, entgegengesetzte Auffassung zu kritisieren (MM 1969). Sein Gegenargument in der zweiten Auflage der *Athanasia* (Bolzano(9a), S. 309f.) wird hier in den MM ausführlich dargestellt.

Am Anfang der Notizen in den *Miscellanea Mathematica 22* beschäftigt sich Bolzano mit Fragen zur Bestimmung der Begriffe des Raumes und der Zeit (MM 1918/19). Laut Bolzano sind die Erklärungen der Begriffe Linie, Fläche und Kör-

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

MISCELLANEA MATHEMATICA

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Miscellanea mathematica. 22. |

Fortsetz[un]*g*.

(*Trigonom*.[etr*i*e], *Z*[e]*rleg*[un]*g des Sin*[*u*s] *u*[nd] *Cos*.[*i*n*u*s] *in Factor*[en].) | Ohne Zw[ei]f[e]l war *Eulers* Mei[nun]g, d[a]ß das Int[e]gral so g[e]nom̅[men] w[er]d[en] solle, d[a]ß es f[*ü*r] | z = 0 v[e]rschwindet. F.[*ü*r] *dies*[en] Zw[e]ck ab[e]r s[in]d noch v[e]rschied[en]e Const[a]nt[en] abz[u]zieh[en]. Die ‖ log[a]r[*i*]thm[*i*schen] Glied[e]r fall[en] f[*ü*r] z = 0 alle v.[on] selbst weg; allein d[ie] Bög[en] bleib[en] steh[en]; wir [mū]ss[en] | also v.[on] jedem Bog[en] noch denj.[en*i*gen] abzieh[en], d[e]r f.[*ü*r] z = 0 her[au]sk[o]m̅[m]t. Also sieht j[e]tzt d[ie] For[me]l so | aus |

$$\frac{\int z^{n-m-1} - z^{m-z}}{z^n - 1}\partial z = \frac{(\frac{2}{n}\,\mathrm{Cos}\,\frac{2(n-m)}{n}\pi.\,\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi}{n} - \frac{2}{n}.\,\mathrm{Cos}\,\frac{2(n-m-1)}{n}\pi)}{\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi}{n}}.$$

$$(\mathrm{Arctg}\,\frac{z^n - \mathrm{Cos}\,\frac{2\pi}{n}}{\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi}{n}} - \mathrm{Arctg}\,(\frac{-\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi}{n}}{\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi}{n}})) + \frac{1}{n}\,\mathrm{Cos}\,\frac{2(n-m)}{n}\pi.\,\lg(z^2 - 2z\,\mathrm{Cs}\,\frac{2\pi}{n} + 1) \quad |$$

$$+\frac{(\frac{2}{n}\,\mathrm{Cos}\,\frac{4(n-m)}{n}\pi.\,\mathrm{Cos}\,\frac{4\pi}{n} - \frac{2}{n}.\,\mathrm{Cos}\,\frac{4(n-m-1)}{n}\pi)}{\mathrm{Sin}\,\frac{4\pi}{n}}.(\mathrm{Arctg}\,\frac{z - \mathrm{Cos}\,\frac{4\pi}{n}}{\mathrm{Sin}\,\frac{4\pi}{n}} - \mathrm{Arctg}\,(\frac{-\mathrm{Cs}\,\frac{4\pi}{n}}{\mathrm{Sin}\,\frac{4\pi}{n}}))+$$

$$\frac{1}{n}\,\mathrm{Cos}\,\frac{4(n-m)}{n}\pi.\,\lg(z^2 - 2z\,\mathrm{Cs}\,\frac{4\pi}{n} + 1) \quad \|$$

$$+ - - - - - - - - - - + - - - - - - - \quad |$$

$$+\frac{(\frac{2}{n}\,\mathrm{Cs}\,\frac{(n-2)(n-m)}{n}\pi.\,\mathrm{Cos}\,\frac{n-2}{n}\pi - \frac{2}{n}\,\mathrm{Cos}\,\frac{(n-2)}{n}(n-m-1)\pi)}{\mathrm{Sin}\,\frac{n-2}{n}\pi}.$$

$$(\mathrm{Arctg}\,\frac{z - \mathrm{Cs}\,\frac{n-2}{n}\pi}{\mathrm{Sin}\,\frac{n-2}{n}\pi} - \mathrm{Arctg}\,(\frac{-\mathrm{Cs}\,\frac{n-2}{n}\pi}{\mathrm{Sin}\,\frac{n-2}{n}\pi})) + \frac{1}{n}\,\mathrm{Cs}\,\frac{(n-2)(n-m)}{n}\pi.\,\lg(z^2 - 2z\,\mathrm{Cs}\,\frac{n-2}{n}\pi + 1) \quad |$$

$$-\frac{(\frac{2}{n}\,\mathrm{Cs}\,\frac{2m}{n}\pi.\,\mathrm{Cs}\,\frac{2\pi}{n} - \frac{2}{n}\,\mathrm{Cos}\,\frac{2m-1}{n}\pi)}{\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi}{n}}.$$

$$(\mathrm{Arctg}\,\frac{z - \mathrm{Cos}\,\frac{2\pi}{n}}{\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi}{n}} - \mathrm{Arctg}\,\frac{-\mathrm{Cs}\,\frac{2\pi}{n}}{\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi}{n}}) - \frac{1}{n}\,\mathrm{Cos}\,\frac{2m}{n}\pi\,\lg(z^2 - 2z\,\mathrm{Cs}\,\frac{2\pi}{n} + 1) \quad |$$

$$-\frac{(\frac{2}{n}\,\mathrm{Cs}\,4\frac{m}{n}\pi.\,\mathrm{Cs}\,\frac{4\pi}{n} - \frac{2}{n}\,\mathrm{Cos}\,4\frac{m-1}{n}\pi)}{\mathrm{Sin}\,\frac{4\pi}{n}}.$$

$$(\mathrm{Arctg}\,\frac{z - \mathrm{Cos}\,\frac{4\pi}{n}}{\mathrm{Sin}\,\frac{4\pi}{n}} - \mathrm{Arctg}\,\frac{-\mathrm{Cs}\,4\pi}{\mathrm{Sin}\,4\pi}) - \frac{1}{n}\,\mathrm{Cos}\,\frac{4m}{n}.\pi.\,\log(z^2 - 2z\,\mathrm{Cs}\,\frac{4\pi}{n} + 1) \quad |$$

$$- \quad \|$$

$$-\frac{(\frac{2}{n}\,\mathrm{Cos}\,\frac{(n-2)}{n}m\pi\,\mathrm{Cos}\,\frac{(n-2)}{2}\pi - \frac{2}{n}\,\mathrm{Cos}\,\frac{n-2}{n}(m-1)\pi)}{\mathrm{Sin}\,\frac{(n-2)}{n}\pi}.$$

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

$$(\mathrm{Arctg}\,\frac{z-\mathrm{Cs}\,\frac{n-2}{n}\pi}{\mathrm{Sin}\,\frac{n-2}{2}\pi}-\mathrm{Arctg}\,\frac{-\mathrm{Cs}\,\frac{n-2}{n}\pi}{\mathrm{Sin}\,\frac{n-2}{n}\pi})-\frac{1}{n}\,\mathrm{Cs}\,\frac{n-2}{n}n\pi.\,\mathrm{lg}(z^2-2z\,\mathrm{Cs}\,\frac{n-2}{n}\pi+1).\ \|$$

Dies[e]r Ausd[ruc]k soll sich f[*ü*r] $z=1$ auf $\frac{\pi}{n\,\mathrm{tg}\,\frac{m\pi}{n}}$ reducir[en]. | Um erstlich d[ie] Bög[en] abz[u]kürz[en], setze ich

$$\mathrm{Arctg}\,(\frac{z-\mathrm{Cs}\,\phi}{\mathrm{Sin}\,\phi})=\mathrm{Arctg}\,\frac{1-\mathrm{Cs}\,\phi}{\mathrm{Sin}\,\phi}=\lambda\ \text{u[nd]}\ \mathrm{Arctg}\,(\frac{-\mathrm{Cs}\,\phi}{\mathrm{Sin}\,\phi})\ \|$$

(w[e]lch[e]s d[e]r Bogen $(\frac{\pi}{2}-\phi)$ ist:) $=\mu$; so [mu]ß

$$\mathrm{tg}\,(\lambda-\mu)=\frac{\mathrm{tg}\,\lambda-\mathrm{tg}\,\mu}{1+\mathrm{tg}\,\lambda.\,\mathrm{tg}\,\mu}=-\frac{\frac{1-\mathrm{Cs}\,\phi}{\mathrm{Sin}\,\phi}+\frac{\mathrm{Cs}\,\phi}{\mathrm{Sin}\,\phi}}{1-\frac{1-\mathrm{Cs}\,\phi}{\mathrm{Sin}\,\phi}.\frac{\mathrm{Cs}\,\phi}{\mathrm{Sin}\,\phi}}$$

$$=\frac{\mathrm{Sin}\,\phi}{\mathrm{Sin}^2\,\phi-\mathrm{Cs}\,\phi+\mathrm{Cs}^2\,\phi}=\frac{\mathrm{Sin}\,\phi}{1-\mathrm{Cs}\,\phi}\ |$$

$$=\frac{2\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}\phi.\,\mathrm{Cs}\,\frac{1}{2}\phi}{1-\mathrm{Cs}^2\,\frac{1}{2}\phi+\mathrm{Sin}^2\,\frac{1}{2}\phi}=\mathrm{Cot}\,\frac{1}{2}\phi=\mathrm{tg}\,\frac{\pi-\phi}{2}$$

Also kann $\overline{\mathrm{m}}$[an] statt $(\mathrm{Arctg}\,\frac{1-\mathrm{Cs}\,\phi}{\mathrm{Sin}\,\phi}-\mathrm{Arctg}\,\frac{-\mathrm{Cs}\,\phi}{\mathrm{Sin}\,\phi})$ üb[e]rall | schreib[en] $\frac{\pi-\phi}{2}$. N[e]hm[en] wir f[e]r[ne]r j[en]e 2 Bög[en]ausd[r*ü*c]ke d[ie] sich [nu]r d[urc]h d[en] Coeff:[*izi*enten] [un]t[e]rscheid[en], | u.[nd] eb[en] so j[en]e 2 log[a]r[*i*]th.[m*i*sche] F[un]ction[en] z[u]s[a]$\overline{\mathrm{m}}$[men]: so erhalt[en] wir |

$$\frac{\int z^{n-m-1}+z^{n-1}}{z^n-1}z\ (\text{f.[}\textit{ü}\text{r]}\ z=0\ \text{bis}\ z=1)=$$

$$\frac{[\frac{2}{n}\,\mathrm{Cs}\,\frac{2(n-m)}{n}\pi.\,\mathrm{Cs}\,\frac{2\pi}{n}-\frac{2}{n}\,\mathrm{Cs}\,\frac{2m}{n}\pi.\,\mathrm{Cs}\,\frac{2\pi}{n}+\frac{2}{n}\,\mathrm{Cos}\,\frac{2(m-1)}{n}\pi-\frac{2}{n}\,\mathrm{Cos}\,\frac{2(n-m-1)}{n}\pi].\frac{n-2}{2n}\pi}{\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi}{n}}\ \|$$

$$+\frac{[\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Cos}\,\frac{4(n-m)}{n}\pi.\,\mathrm{Cos}\,\frac{4\pi}{n}-\frac{2}{n}\,\mathrm{Cs}\,\frac{4m}{n}\pi.\,\mathrm{Cs}\,\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{n}\,\mathrm{Cos}\,\frac{4(m-1)}{n}\pi-\frac{2}{n}\,\mathrm{Cos}\,\frac{4(n-m-1)}{n}\pi].\frac{n-4}{2n}\pi}{\mathrm{Sin}\,\frac{4\pi}{n}}\ |$$

$$+---\ |$$

$$+\frac{[\frac{2}{n}\,\mathrm{Cos}\,\frac{(n-2)}{n}(n-m).\pi.\,\mathrm{Cos}\,\frac{(n-2)}{n}\pi-\frac{2}{n}\,\mathrm{Cos}\,\frac{n-2}{n}m\pi.\,\mathrm{Cos}\,\frac{n-2}{n}\pi+\frac{2}{n}\,\mathrm{Cos}\,\frac{n-2}{n}(m-1)\pi-\frac{2}{n}\,\mathrm{Cos}\,\frac{(n-2)}{n}(n-m-1)\pi].\frac{\pi}{n}}{\mathrm{Sin}\,\frac{n-2}{n}\pi}\ |$$

$$+\frac{1}{n}(\mathrm{Cos}\,\frac{2n-m}{n}\pi-\mathrm{Cos}\,\frac{2m}{n}\pi)\log(2-2\,\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi}{n})$$

$$+\frac{1}{n}(\mathrm{Cos}\,\frac{4(n-m)}{n}\pi-\mathrm{Cos}\,\frac{4m}{n}\pi)$$

$$\log(2-2\,\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi}{n}+\cdots+\frac{1}{n}(\mathrm{Cos}\,\frac{n-2}{n}(n-m)\pi-\mathrm{Cos}\,\frac{n-2}{n}m\pi)$$

$$\times\log(2-2\,\mathrm{Cos}\,\frac{n-2}{2}\pi)\ |$$

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

N[un] ist Cos $\frac{2(n-m)}{n}\pi - \text{Cos}\,\frac{2m}{n}\pi = 0$ u.[nd] üb[er]h[au]pt Cos $\frac{2k(n-m)\pi}{n} - \text{Cos}\,2k\frac{m}{n}\pi = 0.$ ‖ Eb[en] so ist Cos $\frac{2(n-m-1)}{n}\pi = \text{Cos}\,\frac{2(m+1)}{n}\pi$, also

$$\text{Cos}\,\frac{2(m-1)\pi}{n} - \text{Cos}\,\frac{2(n-m-1)}{n}\pi = \text{Cos}\,\frac{2(m-1)}{n}\pi - \text{Cos}\,\frac{2(m+1)}{n}\pi$$
$$= 2\,\text{Sin}\,\frac{2m}{n}\pi.\,\text{Sin}\,\frac{2\pi}{n}.$$

Und allg[e]mein $\text{Cos}\,\frac{2k(m-1)}{n}\pi - \text{Cos}\,\frac{2k(n-m-1)}{n}\pi = 2\,\text{Sin}\,\frac{2km\pi}{n}.\,\text{Sin}\,\frac{2k\pi}{n}.$ Also ist |

$$\frac{\int z^{n-m-1} - z^{n-1}}{z^n - 1}\partial z \text{ (f.[\textit{ü}r] z = 0 bis z = 1)}$$
$$= \frac{4}{n}\,\text{Sin}\,\frac{2m}{n}\pi.\frac{n-2}{n}\pi + \frac{4}{n}\,\text{Sin}\,\frac{4m}{n}\pi.n - 4\pi + ..\ \ |$$
$$+\frac{4}{n}\,\text{Sin}\,\frac{n-2}{n}\pi.\frac{2\pi}{2n} = \ \ \|$$
$$= \frac{4}{n}[(\text{Sin}\,\frac{2m}{n}\pi)\frac{n-2}{2n}\pi + (\text{Sin}\,\frac{4m\pi}{n}) \times \frac{n-4}{2n}\pi + (\text{Sin}\,\frac{6m}{n}\pi).\frac{n-6}{2n}\pi + ..$$
$$+(\text{Sin}\,\frac{n-2}{n}\pi) \times \frac{2\pi}{2n}]\ \ |$$

Die hier zu sum̄[mieren]d[en] Si[nu]sse g[e]hör[en] zu W[*in*]k[e]ln[,] d[ie] in ar[*i*]thm.[et*i*scher] Pr[o]g[re]ss.[*i*on] w[a]chs[e]n[,] u.[nd] d[ie] Coeff.[*izi*enten,] | [mi]t den[en] sie [mu]lt[*i*]pl.[*izi*ert] s[in]d, w[a]chs[en] eb[en]f[a]lls in ar[*i*]thm.[et*i*scher] Prog[re]ss.[*i*on]. E[in]e solche R[e*i*]he w[e*i*]ß m̄[an] zu sum̄[m]ir[en]. | Es ist n[*ä*]h[m]l[*i*]ch a Sin α+(a+b) Sin(α+β)+(a+2b) Sin(α+ 2β) + .. + (a + $\overline{n-1}$b) Sin(α + $\overline{n-1}\beta$) = |

$$\frac{(a-b)\,\text{Sin}\,\alpha - a\,\text{Sin}\,(\alpha-\beta) + (a+nb)\,\text{Sin}\,(\alpha+\overline{n-1}\beta) - (a+\overline{n-1}b)\,\text{Sin}\,(\alpha-n\beta)}{2-2\,\text{Cos}\,\beta}$$

Hier ist a = $\frac{n-2}{2n}\pi$; b = $-\frac{\pi}{n}$; ‖ 1914
$\alpha = \frac{2m\pi}{n}, \beta = \frac{2m\pi}{n}$; u.[nd] n od[e]r d[ie] Anz[a]hl d[e]r Glied[e]r ist = $\frac{n}{2}$ (f[ür] ein g[e]rad[e]s n, b[e*i*] ei.[nem] | u[n]g[e]r[a]d[en] hätte m̄[an] $\frac{n+1}{2}$:) Also ist d[e]r W[er]th des g[an]z[en] Ausd[ruc]ks |

$$\frac{\frac{4}{n}.(\frac{n-2}{2n}\pi + \frac{\pi}{n})\,\text{Sin}\,\frac{2m\pi}{n} - \frac{n-2}{2\pi}\pi\,\text{Sin}\,0 + (\frac{n-2}{2n}\pi + \frac{n}{2}\pi)\,\text{Sin}\,\frac{n.2m\pi}{n} - (\frac{n-2}{2n}\pi + (\frac{n-1}{2})\frac{\pi}{n})\,\text{Sin}(\frac{n-1}{2})\frac{2m\pi}{n}}{2(1-\text{Cos}\,\frac{2m\pi}{n})}\ \ |$$
$$= \frac{4}{n}\,\frac{\frac{\pi}{n}\,\text{Sin}\,\frac{2m\pi}{n} + \frac{\pi}{2}\,\text{Sin}\,\frac{2m\pi}{n}}{2(1-\text{Cos}\,\frac{2m\pi}{n})}$$
$$= \frac{2\pi.\,\text{Sin}\,\frac{2m\pi}{n}}{n(1-\text{Cs}\,\frac{2m\pi}{n})} = \frac{\pi}{n\,\text{tg}\,\frac{m\pi}{n}}.\ \ |$$

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

(so w[en*i*]gst[en]s sollte es h[e]r[au]sk[o]m̄[men]. Ab[e]r es steckt noch irg[en]d wo e[in] F[e]hl[e]r in d.[en] Coeff[*izi*enten] des l[e]tzt[en] Glied[e]s.) ‖

Auf ähnl.[*i*che] Art w[ir]d [nun] w[o]hl auch das I[n]t[e]gr[a]l $\int \frac{z^{m-1}+z^{n-m-1}}{1+z^n}$ sich f[in]d[en]. |

U.[nd] dann hat m̄[an] d[ie] Sum̄[m]e d[e]r Pot[en]z[en] d[e]r reciprok[en] Zahl[en] wie in d[en] | Anal. Math. p. 1396.[1] ang[e]m[e]rkt ist. H[i]er[au]s ergibt sich da[nn] s[e]hr leicht | d[a]ß d[ie] F[un]ction $(1-\frac{x^2}{a^2})(1-\frac{x^2}{9a^2})$.. b.[e*i*] ei.[nem] g[e]wiss[en] W[er]the v[on] a id[en]t[*i*]sch sey [mi]t d.[em] *Cosi*[nu]*s*, ‖ w[a]s z[u] b[e]weis[en] war. |

Für dies[en] Zw[e]ck br[au]cht m̄[an] d[ie] ob[*i*]g[en] Zw[e]y I[n]t[e]gr[a]le [nic]ht so allg[e]m[e*i*n,] s[on]d.[ern] m ka[nn] = 1 | seyn, wod[urc]h d[ie] R[e]ch[nun]g doch etw[a]s e[in]f[a]ch[e]r w[ir]d. |

Was ich hier mühsam suche, hat *Bartels* in s.[e*i*nen,] Disquis.[itiones] quatuor ad theor.[iam] | funct.[ionum] analyt.[icarum] pertinent.[es] (Dorpati 1822)[2] vortr[e]ffl[*i*]ch ausg[e]führt. Auch in d[e]r ‖ $1^{\text{t[en]}}$ Abh[an]dl[un]g hat er ohne B[e]t[ra]cht[un]g des un[en]dl[*i*]ch Kle[inen], ja auch [nu]r ohne un[en]dl:[*i*chen] Reih[en] anz[u]n[e]hm[en], | endl[*i*]ch auch ohne B[e]tr[ac]ht[un]g imaginär[e]r Größ[en], d[ie] Id[e]ntität d[e]r For[me]ln | $x(1-\frac{x^2}{4\pi^2})(1-\frac{x^2}{9\pi^2})$.. u.[nd] $x-\frac{x^3}{2.3}+..$ erwies[en]. Er b[e]di[en]t sich d[e]r M[e]th[o]de d[e]r Gr[e]nz[en], u.[nd] | gibt z.B. d[ie] Erkl[*ä*]r[un]g, d[a]ß $\lim(1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+..)$ d[ie] Basis d[e]r nat.[*ü*rl*i*chen] L[o]g[a]r[*i*]th[men] e heiß[en] soll, | u[nd] d[er]gl.[*ei*chen] ‖

So löbl[*i*]ch d[ie]s[e]s Str[e]b[en] nach str[e]ng[e]r Wiss[en]sch[a]ftl[*i*]chk[*ei*]t ist; so gl[au]be ich doch[:] vor un[en]dl[*i*]ch[en] Reih[en,] | w[enn] sie [nu]r ei[ne]m g[e]w[*i*]ss[en] endl.[*i*chen] W[er]the sich näh[e]rn, so s[e]hr m̄[an] will, so b[a]ld m̄[an] sie w[ei]t g[enu]g f[o]rts[e]tzt, | fürchte m̄[an] sich [mi]t Unr[e]cht. Unendl[*i*]che M[e]ng[en] gibt es e[inma]hl doch unwid[e]rspr[e]chl[*i*]ch; so enth[*ä*]lt | d[ie] L[in*i*]e ∞ v[*ie*]le P[un]cte; so enthält d[e]r Bruch $\frac{1}{3}$[,] w[enn] er in e[inen] Dec[im]alb[ruc]h v[e]rw[an]d[e]lt w[er]d[en] soll, | e[in]e u[n]endl[*i*]che M[e]nge v[on] Th[*ei*]l[en] $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+..$ un[d] m̄[an] kann im̄[me]rhin sag[en], d[a]ß d[ie] ∞ M[e]ng[e] ‖ all[e]r d[ie]s[e]r Th[*ei*]le, d.h. all[e]r Größ[en], d[ie] d[urc]h das G[e]s[e]tz 0,3333.. in inf.

[1] ***Miscellanea mathematica*, S. 1396. Vgl. Bolzano (2B9/2), S. 73.**

[2] **Bartels (1).**

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

darg[e]st[e]llt w[er]d[en], d[e]r Gr[ö]ße = $\frac{1}{3}$ | *gl*[e*i*]*ch* sey. Jede endl.[*i*che] M[e]nge d[ie]s[e]r Br[ü]che *näh*[e]*rt* sich [nu]r d.[em] W[er]the $\frac{1}{3}$, ab[e]r d[ie] ∞ M[en]ge d[e]rs.[elben] ist ihm | ar[*i*]th.[met*i*sch] gl[e*i*]ch. – U.[nd] diese ∞ M[en]ge ist [nic]ht eine bl[o]ße Fiction; es gibt e[in]e solche u[nen]dl[*i*]che | M[e]nge; so g[u]t es i[r]g[en]d e[in]e ∞ M[e]nge gibt. So sollte m̅[an] also z.B. a[uc]h [nic]ht sag[en,] e sey [d*ie*] Gr[*ö*]ße[,] | d[e]r d[ie] R[e*i*]he $1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3}$ sich ins Un[en]dl[*i*]che näh[e]rt; s[o]nd.[ern] e ist d[e]r u[n]endl.[*i*chen] M[e]nge v[on] ‖ Gr[ö]ß[en], w[e]lche d[ie] R[e*i*]he $1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + ..$ enthält, vollk.[ommen] gleich. U.s.w. |

Was ab[e]r d[ie] imag:[*i*n*ä*ren] Größ[en] b[e]langt; so ist es all[e]rd[in]gs b[e]ss[e]r, w[enn] m̅[an] sie g[an]z umgehet. | D[enn] d[ie] B[e]w[ei]se [mi]tt[e]lst d[e]rs[e]lb[en] s[in]d doch p.[er] aliena et remota. |

Mich hat bish[e]r [nu]r d[e]r Umst[an]d b[e]st[i]m̅[m]t, bey d[e]r H[e]rl[ei]t[un]g d[e]r Kr[ei]sf[un]cti- | on[en] Z[u]fl[u]cht z[u] ihn[en] z[u] n[e]hm[en], w[ei]l es mir schien, d[a]ß sich auf d[ie]se Art d[e]r *B*[e]*g*[r*i*]*ff d*[ie]*s*[e]*r F*[*u*n]*ct*[*i*onen] ‖ am Natürl[i]chst[en] construire. *Bartels* leistet in d[ie]s[e]r H[in]s.[*i*cht] [nic]hts; denn er setzt d[ie] | B[e]g[r*i*]ffe Sin, Cos, tg. als geo[me]tr[*i*]sche Erg[e]b[n*i*]sse v[o]r[au]s u[nd] f[*ä*n]gt [mi]t d.[er] F[o]r[me]l an: |

$$\frac{\text{Sin m Arctg}\,\frac{\alpha}{m}}{(\text{Cos Arctg}\,\frac{\alpha}{m})^m} = x - \frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{3}{m}\right)\frac{x^5}{1..5} \quad |$$

$\pm \frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)..\left(1-\frac{\mu}{m}\right).\frac{x^\mu}{1..\mu}$ wo $\mu = m - 1$ o[der] $m - 2$ j[e]n[a]chd[e]m m [un]g[era]de o[der] g[e]r[a]d[e] ist. – ‖ Das kann [nun] fr[e]yl[*i*]ch [nic]ht als Def[*i*ni]tion ang[e]nom̅[men] w[er]d[en]. ‖

Viell[e*i*]cht ist ab[e]r d[ie] schon m[e]hr[ma]hls v[e]rsuchte H[e]rl[e*i*]t[un]g dies[e]r F[un]ction[en], u.[nd] zw[a]r des Si[nu]s | auf f[o]lg[en]de Art [nic]ht eb[en] g[e]zw[un]g[en]. |

N[a]chd[e]m m̅[an] *Pot*[en]*z*[en] d.h. Prod.[*u*k]te aus gl[e*i*]ch[en] F[a]ctor[en] b[e]t[ra]chtet hat, führt d[ie] nat.[*ü*rl*i*che] Ord[nun]g z[ur] B[e]tr[ac]ht[un]g | d[e]r *Facultät*[en], d.h. d[e]r P[ro]d[*u*k]te a.[*us*] u[n]gl[e*i*]ch[en] ab[e]r in ar[*i*]thm.[et*i*scher] P[ro]g[re]ssion w[a]chs[en]d[en] F[a]ctor[en]. ‖

Dieß leitet auf d[en] G[e]d[an]k[en] e[ine]r v[e]r[*ä*]nd[er]l[*i*chen] G[rö]ße x, d[e]r[en] W[ur]z[e]l e[in]e u[ne]ndl[*i*che] M[e]nge v[on] W[er]th[en] hätte, w[e]lche | in e[ine]r ar[*i*]th.[met*i*scher] R[e*i*]he st[e]h[en], n[*ä*]h[m]l[*i*]ch, $-3a, -2a, -a, 0, +a, +2a, +3a, +..$ |

B[e]g[rei]fl[*i*]ch w[ir]d d[urc]h d[ie]se B[e]d[in]g[un]g all[ei]n d[ie] N[a]tur d[ie]s[e]r Gr[*ö*]ß[en] | noch [nic]ht b[e]st[imm]t. W[enn] ab[e]r f[e]r[ne]r v[e]rlangt w[ir]d, d[a]ß d[ie]se F[*u*n]ct.[*i*on] d[ie] e[in]f[a]chste s.[e*i*n] soll, d[ie] zu Null | w[ir]d, w[enn] m̅[an] f.[*ü*r] x e[inen] d[ie]s[e]r W[er]the setzt,

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

so ist sie, däucht mir, d[urc]h d[ie]se e[in]z[i]g[e] B[e]st[*i*mm*u*n]g sch[o]n v[o]llk[ommen] ‖ b[e]st[*i*mm]t. D[ann] [mu]ß sie als das Pr[o]d[uk]t a.[*u*s] g[e]w[*i*]ss[en] F[a]ctor[en] ang[e]s[e]h[en] w[er]d[en] kö[nnen], d[ie] v.[on] d[e]r F[o]r[m] | s[in]d $cx - ac, cx + bc, cx - 2ac, cx - 3ax$ u.s.w.[,] u.[nd] darf
1915 k[ein]e and:[eren] F[a]ctor[en] {ent-} ‖ enthalt[en]. Sie [mu]ß also v.[on] d.[er] For[m] $x(c^2x^2 - c^2a^2)(c^2x^2 - 4c^2a^2)(c^2x^2 - 9c^2a^2)..$ | s[e*i*n]. Um e[in]e endl.[*i*che] Gr[ö]ße z[u] s.[e*i*n], [mu]ß $c^2a^2 = +1$ seyn. (Wie sich l[e*i*]cht darth[un] l[*ä*]ßt. | E[ine]s v[on] b[e]yd[en] c^2a^2 o[der] c^2x^2 [m]üßte $= +1$ s.[e*i*n], d[i]es[e]s ka[nn] es [nic]ht s.[e*i*n], also j[e]n[e]s). M[an] [mu]ß also h[a]b[en] | $x(1 - \frac{x^2}{a^2})(1 - \frac{x^2}{4a^2})(1 - \frac{x^2}{9a^2})..$ in inf. Wie e[n]dl[*i*]ch d[ie] Gr[*ö*]ße a z[u] b[e]st[immen] sey, er-‖gibt sich spät[e]r.

Die H[e]rleit[un]g *Schweins*,[3] ausgeh[en]d v.[on] d.[er] Gl[e*i*]ch[un]g | $(a + ib)^2 = \phi n + i.\psi n$, wor[in] n[a]chh[e]r $i = \sqrt{-1}$ g[e]s[e]tzt w[ir]d, hat n[e]bstd[e]m, d[a]ß hier | imag.[*inä*re] Gr[*ö*]ß[en] g[e]b[rauc]ht w[er]d[en], et[w]as U[nna]türl[*i*]ch[e]s. War[um] z[e]rlegt m̄[an] [nu]r das Bino-|mium in $a + ib$? ‖

Ich will v[e]rsuch[en], wie w[ei]t m̄[an] ohne das i g[e]lang[en] kann. | Nicht[s] Unnatürl[*i*]ch[e]s liegt in d.[em] G[e]dank[en,] j[e]d[e] Reihe des Bino[m]s | $(a + b)^x = a^x + \frac{x}{1}a^{x-1}.b + \frac{x.x-1}{1.2}a^{x-2}.b^2 + \frac{x.x-1.x-2}{1.2.3}.a^{x-3}.b^3 + ..$ in 2 Th[e*i*]le z[u] z[e]rl[e]g[en], d[e]r[en] | d[e]r E[in]e d[ie] g[e]r[a]d[en], d[e]r a[n]dre d[ie] [un]g[e]r[a]d[en] Pot[en]z[en] v.[on] b od[e]r $(\frac{b}{a})$ enthält; u[nd] so[m]it | $(a + b)^x = \phi x + \psi x$ z[u]setz[en], wob[e*i*] m̄[an] [un]t[e]r $\phi x = a^x + \frac{x.x-1}{1.2}.a^{x-2}.b^2 + ..$ u[nd] [un]t[e]r $\psi x = x.a^{x-1} + ..$ ‖ v[e]rst[e]ht. |

B.[e*i*] d[ie]s[e]r Ann[a]h[m]e gelt[en] f[o]lg[en]de S[*ä*]tze:

1^a. B.[e*i*] g[e]g[e]b[ene]n a u[nd] b ist d[ie] N[a]tur d[e]r ϕ u[nd] ψ g[an]z b[e]st[im̄m]t. |

1^b. $\phi\, 0 = 1, \psi\, 0 = 0$ |

2. $\phi\, 1 = a, \psi\, 1 = b$ |

3. $\phi x + \psi x = [\phi\,(1) + \psi\,(1)]^x$ ‖

4. $\phi\,(xy) + \psi\,(xy) = [\phi\,(1) + \psi\,(1)]^{xy} = \{[\phi\,(1) + \psi\,(1)]^x\}^y = [\phi x + \psi y]^y = [\phi y + \psi y]^x$ |

5^a. $\phi\,(x + y) = \phi x.\phi y + \psi x.\psi y$; u[nd] $\psi\,(x + y) = \psi x.\phi y + \phi x.\psi y$ |

B[e]*w*[e*i*]*s*. Denn $[a + b]^{x+y} = (a + b)^x.(a + b)^y = \phi\,(x + y) + \psi\,(x + y) = (\phi x + \psi x)(\phi y + \psi y) =$ | $(\phi x.\phi y + \psi x.\psi y) + [\phi x.\psi y + \psi x.\phi y]$. Da d[ie]se Gl[e*i*]ch[un]g[en] f.[*ü*r] alle W[er]the a u[nd] $(\frac{b}{a})$ b[e]st[e]h[en] [mü]ss[en] |

3 **Schweins (1).**

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

BIBLIOGRAPHIE

Abkürzungen

Crelles Journal: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*
Gergonnes Annalen: *Annales de mathématiques pures et appliquées*

AMPÈRE, André-Marie, POINSOT, Louis

(1) Rapport sur la note de M. Duhamel relative à la Méthode des tangentes de Roberval. *Procès-verbaux des séances de l'Académie des Sciences* 9 (1921), S. 566–569.

ANONYMA

(1829/1) [Referat von Bobillier (1) und Gergonne (2).] *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques*, Bd. XIII (1829), S. 321–324.

(1830/1) Examen des objections que l'on a élevées contre la représentation géométrique des racines carrées des quantités négatives; par M. Warren. *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques*, Bd. XIV (1830), S. 255–259.

(1830/2) Démonstration d'un théorème d'analyse indéterminée [...]. *Gergonnes Annalen*, Bd. 20 (1829/30), S. 304–305.

(1830/3) Aufgabe. *Crelles Journal*, Bd. 5 (1830), S. 222.

(1830/4) Description d'un nouveau pantographe; par M. Parrot. *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques*, Bd. XIV (1830), S. 99.

(1830/5) [Besprechung von Ranson (1).] *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques*, Bd. XIV (1830), S.169–170.

(1831/1) [Referat von Crelles Journal, Bd. 5 (1829/30).] *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques*, Bd. XV (1831), S. 9–15.

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

PERSONENREGISTER

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

SACHREGISTER

© 2024 frommann-holzboog e.K. – LESEPROBE
Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie Übersetzung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (durch Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung des Verlages reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.