

# ***Inhaltsverzeichnis***

<b><i>Über den Autor</i></b>	<b>9</b>
<b><i>Einführung</i></b>	<b>19</b>
Über dieses Buch	19
Konventionen in diesem Buch	19
Wie Sie dieses Buch einsetzen	20
Törichte Annahmen über den Leser	20
Wie dieses Buch aufgebaut ist	20
Teil I: Analysis – ein Überblick	20
Teil II: Die Voraussetzungen für die Analysis	20
Teil III: Grenzwerte	21
Teil IV: Differentiation	21
Teil V: Integration	21
Teil VI: Der Top-Ten-Teil	21
Symbole, die in diesem Buch verwendet werden	21
Wie es weitergeht	22
<b><i>Teil I</i></b>	
<b><i>Analysis – ein Überblick</i></b>	<b>23</b>
<b><i>Kapitel 1</i></b>	
<b><i>Was ist Analysis?</i></b>	<b>25</b>
Was Analysis nicht ist	25
Was also ist Analysis?	26
Beispiele für die Analysis aus der Praxis	27
<b><i>Kapitel 2</i></b>	
<b><i>Die beiden wichtigen Konzepte der Analysis:</i></b>	
<b><i>Differentiation und Integration</i></b>	<b>29</b>
Differentiation – Definition	29
Die Ableitung ist eine Steigung	29
Die Ableitung ist eine Änderungsrate	30
Und jetzt zur Integration	31

### **Kapitel 3**

#### **Warum die Analysis funktioniert**

**35**

Das Grenzwertkonzept: Ein mathematisches Mikroskop	35
Was passiert beim Vergrößern?	36
Zwei Warnungen – nur zur Vorsicht	39
Ich könnte meine Lizenz verlieren, Mathematik zu betreiben	39
Und was um alles in der Welt bedeutet »unendlich« eigentlich?	39

### **Teil II**

#### **Die Voraussetzungen für die Analysis**

**41**

### **Kapitel 4**

#### **Überblick über Vor-Algebra und Algebra**

**43**

Was Sie über Brüche wissen sollten	43
Ein paar schnelle Regeln	43
Brüche multiplizieren	44
Brüche dividieren	44
Brüche addieren	45
Brüche subtrahieren	46
Brüche kürzen	46
Betrag (Absolutwert) – absolut einfach	48
Potenzen machen stark	48
Zu den Wurzeln der Wurzeln	49
Wurzeln, Wurzeln überall!	49
Logarithmen ... wirklich keine Hexerei	50
Faktorisieren – wer braucht das schon?	51
Den größten gemeinsamen Teiler herausziehen	51
Quadratische Gleichungen lösen	52
Methode 1: Faktorisieren	52
Methode 2: Die abc-Formel	53
Methode 3: Quadratische Ergänzung	54

### **Kapitel 5**

#### **Verrückte Funktionen und ihre wunderbaren Graphen**

**55**

Was ist eine Funktion?	55
Die definierende Eigenschaft einer Funktion	55
Unabhängige und abhängige Variablen	56
Funktionsnotation	57
Zusammengesetzte Funktionen	57
Wie sieht eine Funktion aus?	58
Allgemeine Funktionen und ihre Graphen	59
Geradeheraus – Geraden in der Ebene	59
Parabel- und Betragsfunktionen – gerade heraus	63

Einige ungerade Funktionen	63
Exponentialfunktionen	63
Logarithmische Funktionen	64
Inverse Funktionen	65
Schieben, spiegeln, dehnen, stauchen	66
Horizontale Transformationen	66
Vertikale Transformationen	67
<b>Kapitel 6</b>	
<b>Trigonometrie ist Trumpf!</b>	<b>69</b>
Trigonometrie im Crashkurs	69
Sinus, Kosinus und Tangens zeichnen	70
Inverse trigonometrische Funktionen	71
<b>Teil III</b>	
<b>Grenzwerte</b>	<b>73</b>
<b>Kapitel 7</b>	
<b>Grenzwerte und Stetigkeit</b>	<b>75</b>
Bis an die Grenzen – NEIN	75
Drei Funktionen erklären den Grenzwert	75
Weiter zu den einseitigen Grenzwerten	77
Die formale Definition eines Grenzwerts – wie erwartet!	78
Unendliche Grenzwerte und vertikale Asymptoten	78
Grenzwerte an der Unendlichkeit – haben Sie gute Schuhe an?	79
Grenzwerte und Stetigkeit verknüpfen	80
Stetigkeit und Grenzwerte gehen normalerweise Hand in Hand	81
Die Ausnahme für ein Loch bringt die Wahrheit ans Licht	81
Die überflüssige Mathematik der Stetigkeit aussortieren	82
<b>Kapitel 8</b>	
<b>Grenzwerte auswerten</b>	<b>83</b>
Einfache Grenzwerte	83
Grenzwerte, die Sie sich merken sollten	83
Einsetzen und Einkochen	84
Die »echten« Aufgabenstellungen mit Grenzwert	84
Einen Grenzwert mit dem Taschenrechner bestimmen	84
Aufgabenstellungen mit Grenzwert algebraisch lösen	86
Grenzwerte bei unendlich auswerten	88
Grenzwerte bei unendlich und horizontale Asymptoten	88
Algebra für Grenzwerte bei unendlich verwenden	89

**Teil IV**

**Differentiation**

**91**

**Kapitel 9**

**Differentiation – Orientierung**

**93**

Differentiation: Sucht die Steigung!	93
Die Steigung einer Geraden	95
Die Ableitung einer Geraden	96
Die Ableitung: Einfach eine Änderungsrate	97
Geschwindigkeit – die uns vertrauteste Änderungsrate	97
Die Beziehung zwischen Änderungsrate und Steigung	98
Die Ableitung einer Kurve	98
Der Differenzquotient	100
Durchschnittliche Änderungsrate und momentane Änderungsrate	106
Sein oder nicht sein? Drei Fälle, in denen die Ableitung nicht existiert	107

**Kapitel 10**

**Regeln für die Differentiation – was sein muss, muss sein!**

**109**

Grundlegende Regeln der Differentiation	109
Die Konstantenregel	109
Die Potenzregel	109
Die Regeln zu dem Vielfachen von Konstanten	111
Die Summenregel – und die kennen Sie schon	111
Die Differenzregel – macht kaum einen Unterschied	111
Trigonometrische Funktionen differenzieren	111
Exponentielle und logarithmische Funktionen differenzieren	112
Differentiationsregeln für Profis – Wir sind die Champs!	113
Die Produktregel	113
Die Quotientenregel	114
Die Kettenregel	114

**Kapitel 11**

**Differentiation und die Form von Kurven**

**117**

Ein Ausflug mit der Analysisgruppe	117
Über die Berge und durch die Täler: Positive und negative Steigungen	118
Krümmung und Wendepunkte	118
Das Tal der Tränen: Ein lokales Minimum	119
Ein atemberaubender Ausblick: Das absolute Maximum	119
Autopanne: Auf dem Scheitelpunkt hängen geblieben	119
Von nun an ging's bergab!	119
Ihr Reisetagebuch	119
Lokale Extremwerte finden	120
Die kritischen Werte herausleiern	120

Der Test der ersten Ableitung	121
Der Test der zweiten Ableitung – Tests, Tests, Tests!	123
Absolute Extremwerte für ein geschlossenes Intervall finden	124
Die absoluten Extremwerte über den gesamten Definitionsbereich einer Funktion finden	126
Krümmung und Wendepunkte bestimmen	127
Die Graphen von Ableitungen – Bis zum Abwinken	129

## **Kapitel 12**

### **Problemlos glücklich: Der Differentiation sei Dank!** 133

Wie Sie das meiste aus Ihrem Leben machen: Optimierungsprobleme	133
Das maximale Volumen einer Schachtel	133
Husch, husch: Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung	135
Maximale und minimale Höhe	138
Geschwindigkeit und Abstand	138
Gesamte zurückgelegte Distanz	139
Gummigeruch und Bremsstreifen: Beschleunigung und Abbremsen	140
Und jetzt alles zusammen	140
(Relativ) verkettete Änderungsraten	140
Einen Trog auffüllen	141
Tangenten und Normalen: Auf die Spitze getrieben	143
Die Aufgabenstellung mit der Tangente	143
Das Normallinienproblem	145

## **Teil V**

### **Integration** 149

## **Kapitel 13**

### **Integration und Flächenannäherung – Ein Einstieg** 151

Die Fläche unter einer Kurve bestimmen	151
Der Umgang mit negativen Flächen	152
Flächen annähern	153
Flächen mit Hilfe linker Summen annähern	153
Flächen mit Hilfe rechter Summen annähern	155
Die Summennotation	157
Die Grundlagen summieren	157
Riemann-Summen in Sigma-Notation	158
Exakte Flächen mit Hilfe des bestimmten Integrals ermitteln	160

## **Kapitel 14**

### **Integration: Die Rückwärts-Differentiation** 163

Stammfunktionen suchen – die umgekehrte Differentiation	163
Das Vokabular: Welchen Unterschied macht es?	164
Die müßige Flächenfunktion	164

## ***Analysis kompakt für Dummies***

Ruhm und Ehre mit dem Hauptsatz der Analysis	167
Der Hauptsatz der Analysis: Teil 2	170
Warum der Hauptsatz funktioniert: Die Verbindung zwischen Integration und Differentiation	172
Stammfunktionen finden: Drei grundlegende Techniken	174
Umkehrregeln für Stammfunktionen	174
Raten und Prüfen	176
Die Substitutionsmethode	178
Flächen mit Hilfe von Substitutionsaufgaben bestimmen	179

## ***Kapitel 15***

### ***Integrationstechniken für Profis*** **183**

Teilweise (partielle) Integration: Teilen und Herrschen!	183
Das $u$ auswählen	185
Teilweise Integration: Beim zweiten wie beim ersten Mal	187
A, B und C in Teilbrüchen (Partialbrüchen)	188
1. Fall: Der Nenner enthält nur lineare Faktoren	188
2. Fall: Der Nenner enthält nicht zu kürzende quadratische Faktoren	189
Bonusrunde: Koeffizienten ähnlicher Terme gleichsetzen	191

## ***Kapitel 16***

### ***Grau ist alle Theorie: Mit Integralen echte Probleme lösen*** **193**

Der Mittelwertsatz für Integrale und der Durchschnittswert	193
Die Fläche zwischen zwei Kurven – Der doppelte Spaß	197
Die Volumen unregelmäßiger Körper ermitteln	200
Die Pfannkuchenstapelmethode	200
Die Stapel-Donuts-auf-den-sich-jemand-gesetzt-hat-Methode	201
Bogenlängen analysieren	203
Die Regel von L'Hôpital: Analysis für die Kranken	205
Uneigentliche Integrale: Am Verlauf zu erkennen	206
Uneigentliche Integrale mit vertikalen Asymptoten	206
Uneigentliche Integrale mit einer oder zwei unendlichen Integrationsgrenzen	208

## ***Teil VI***

### ***Der Top-Ten-Teil*** **211**

## ***Kapitel 17***

### ***Zehn Dinge, die Sie sich merken sollten*** **213**

Den Platz, wo Ihre Sonnenbrille liegt	213
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	213
$\frac{0}{5} = 0$ , aber $\frac{5}{0}$ ist undefiniert	213

Irgendetwas <sup>0</sup> = 1	213
SghKahTga	214
Trigonometrische Werte für 30-, 45- und 60-Grad-Winkel	214
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	214
Die Produktregel	214
Die Quotientenregel	214
Wo Sie Ihre Schlüssel hingelegt haben	214

## **Kapitel 18**

### **Zehn Dinge, die Sie vergessen können 215**

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$ – Falsch!	215
$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ – Falsch!	215
Steigung = $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ – Falsch!	215
$\frac{3a + b}{3a + c} = \frac{b}{c}$ – Falsch!	215
$\frac{d}{dx} \pi^3 = 3\pi^2$ – Falsch!	216
Wenn $k$ eine Konstante ist, dann ist $\frac{d}{dx} kx = k'x + kx'$ – Falsch!	216
Die Quotientenregel ist $\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v'u - vu'}{v^2}$ – Falsch!	216
$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$ – Falsch!	216
$\int (\sin x) dx = \cos x + C$ – Falsch!	216
Den Satz von Green	216

### **Stichwortverzeichnis 217**