

Inhaltsverzeichnis

Teil I: Theorie

| | |
|---|-----|
| Vorwort | vii |
| | xvi |
| Abkürzungen | xix |
| Bezeichnungen | xxi |
| 1 Einführung | 1 |
| 2 Lineare Elastizitätstheorie | 15 |
| 2.1 Voraussetzungen | 15 |
| 2.2 Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie | 16 |
| 2.2.1 Differentialgleichungen des Gleichgewichtes | 16 |
| 2.2.1.1 Statische Beziehungen im Körperinneren (SS) | 16 |
| 2.2.1.1.1 Ebener Fall | 16 |
| 2.2.1.1.2 Erweiterung auf den Raum | 19 |
| 2.2.1.2 Statische Beziehungen an einem Schnitt bzw. am Rand (SSS) | 22 |
| 2.2.1.2.1 Ebener Fall (Dicke “1”) | 22 |
| 2.2.1.2.2 Erweiterung auf den Raum | 23 |
| 2.2.1.2.3 Randbedingung der Kräfte (KRB) | 25 |
| 2.2.1.3 Spannungsfelder, Airysche Spannungsfunktion, Spannungsansätze | 25 |
| 2.2.1.3.1 Spannungsfelder $\underline{\sigma}$ | 25 |
| 2.2.1.3.2 Airysche Spannungsfunktion Φ | 26 |
| 2.2.1.3.3 Pascalsches Dreieck als Hilfsmittel für Spannungs- bzw. Verschiebungsansätze in Polynomform | 27 |
| 2.2.2 Differentialgleichungen der Kinematik (KVV) | 27 |
| 2.2.2.1 Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen | 28 |
| 2.2.2.1.1 Ebener Fall | 28 |
| 2.2.2.1.2 Erweiterung auf den Raum | 30 |

| | | |
|-----------|--|----|
| 2.2.2.2 | Kompatibilitäts- bzw. Verträglichkeitsbeziehungen | 33 |
| 2.2.2.2.1 | Ebener Fall | 33 |
| 2.2.2.2.2 | Erweiterung auf den Raum | 34 |
| 2.2.2.3 | Randbedingungen für die Verschiebungen (GRB) | 34 |
| 2.2.3 | Stoffgesetze | 35 |
| 2.2.3.1 | Homogene, isotrope Stoffe im dreidimensionalen Raum | 35 |
| 2.2.3.2 | Ebene Zustände bei homogenem, isotropem Material | 38 |
| 2.2.3.2.1 | Ebener Dehnungszustand ($\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$) | 38 |
| 2.2.3.2.2 | Ebener Spannungszustand ($\sigma_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$) | 40 |
| 2.2.3.3 | Anisotrope Stoffe | 44 |
| 2.3 | Anwendung der Grundgleichungen auf die Scheibe | 46 |
| 2.3.1 | Lösungsschema, Schnittgrößen, Ausgangsgleichungen | 47 |
| 2.3.2 | Lösungsweg bei Anwendung der Gleichungen für den ebenen Spannungszustand ($\sigma_z = 0$, isotroper Werkstoff) | 51 |
| 2.3.2.1 | Kraftmethode: (gesucht sind die DGL'n der Spannungen) | 51 |
| 2.3.2.1.1 | Anwendung der Airyschen Spannungsfunktion | 52 |
| 2.3.2.2 | Deformationsmethode: (gesucht sind die DGL'n der Verschiebungen) | 53 |
| 2.3.3 | Lösungsweg bei Anwendung der Gleichungen für den ebenen Dehnungszustand ($\varepsilon_z = 0$, isotroper Werkstoff) | 54 |
| 2.3.3.1 | Deformationsmethode | 55 |
| 2.3.3.2 | Kraftmethode | 55 |
| 2.3.4 | Anmerkungen und Zusammenfassung | 56 |
| 2.4 | Anwendung der Grundgleichungen bei Torsion | 58 |
| 2.4.1 | St. Venantsche Torsionstheorie | 58 |
| 2.4.1.1 | Kinematische Zusammenhänge (KVV) | 59 |
| 2.4.1.2 | Stoffgesetz, Spannungs- Verschiebungsbeziehungen | 61 |
| 2.4.1.3 | Gleichgewichtsbeziehungen (SS) | 61 |
| 2.4.2 | Prandtlsche Torsionsfunktion | 63 |
| 2.4.2.1 | Ermittlung der Kompatibilitätsbedingungen | 63 |
| 2.4.2.2 | Gleichgewichtsbeziehungen (SS) | 64 |
| 2.4.2.2.1 | Randbedingungen auf der Zylinderoberfläche | 64 |
| 2.4.2.2.2 | Spannungen im Stabquerschnitt (yz-Ebene) | 66 |
| 2.4.2.2.3 | Schnittkräfte bzw. Randbedingungen an den Stabenden | 67 |
| 2.4.2.3 | Membranalogie | 70 |
| 2.4.2.4 | Ermittlung der Schubspannungsverteilung in einigen zylindrischen Vollquerschnitten | 70 |
| 2.5 | Anhang: Transformation von Koordinaten, Vektoren und Tensoren zweiter Stufe | 73 |
| 2.5.1 | Übergang von der Vektor- bzw. Matrixschreibweise zur Indexschreibweise | 73 |

| | |
|---|-----------|
| 2.5.2 Koordinatentransformation, Transformation eines Ortsvektors, einer Strecke, eines Winkels | 77 |
| 2.5.3 Transformation der Spannungen | 80 |
| 2.5.4 Dyadisches Produkt und der Begriff des Tensors | 85 |
| 2.5.4.1 Transformation des dyadischen Produktes bzw. des Tensors 2. Stufe | 87 |
| 2.5.4.2 Eigenschaften eines Tensors 2. Stufe | 90 |
| 2.5.5 Transformation der Verzerrungen | 92 |
| 3 Stabförmige Tragwerke | 97 |
| 3.1 Definitionen und Grundlagen | 97 |
| 3.1.1 Begriffsbestimmung und Voraussetzungen für stabförmige Tragwerke | 98 |
| 3.1.2 Lösungsablauf beim Berechnen von stabförmigen Tragwerken . | 102 |
| 3.1.3 Spannungen in dünnwandigen, stabförmigen Tragwerken (SS) . | 106 |
| 3.1.3.1 Kraftflüsse | 106 |
| 3.1.3.2 Gleichgewicht an einem dünnwandigen Element (SS) | 108 |
| 3.1.4 Zusammenhang zwischen Spannungen und Schnittgrößen an den Schnittflächen eines stabförmigen Tragwerkes (SSS) | 112 |
| 3.1.4.1 Schnittgrößen am Vollquerschnitt (SSS) | 112 |
| 3.1.4.2 Schnittgrößen an offenen oder geschlossenen dünnwandigen Querschnitten (SSS) | 113 |
| 3.1.5 Gleichgewicht von äußeren Lasten und Schnittlasten an einem stabförmigen Element (SSL) | 122 |
| 3.1.6 Allgemeine Betrachtung der kinematischen Bedingungen an stabförmigen Tragwerken (KVV) | 132 |
| 3.1.6.1 Betrachtung des Querschnittes | 132 |
| 3.1.6.1.1 Wölbkoordinate ω bei offenen, dünnwandigen Querschnitten | 134 |
| 3.1.6.2 Betrachtung des kinematischen Verhaltens eines Querschnittes bei Drillung | 136 |
| 3.1.6.2.1 Definition des Schubmittelpunktes (Momentan(dreh)poles) | 137 |
| 3.1.6.2.2 Betrachtung eines Hautelementes | 140 |
| 3.1.6.2.3 Definition von v_t beim Vorliegen eines Allgemeinen Koordinatensystems | 142 |
| 3.1.7 Flächenintegrale (Aus der Geometrie der stabförmigen Tragwerke und der Wahl des Koordinatensystems resultierende Zusammenhänge) | 144 |
| 3.1.7.1 Flächenintegrale ohne Wölbanteil | 145 |
| 3.1.7.1.1 Allgemeines Koordinatensystem (AG-KOS: (x,y,z)) . | 145 |
| 3.1.7.1.2 Schwerpunkt-Koordinatensystem (SP-KOS: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$) | 146 |
| 3.1.7.1.3 Hauptachsen-Koordinatensystem (HA-KOS: $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$) bei Biegung ohne Wölbbeanspruchung | 149 |

| | | |
|-----------|--|-----|
| 3.1.7.1.4 | Hierarchie der Flächenintegrale der yz -Koordinaten ohne Wölbanteil | 156 |
| 3.1.7.2 | Hierarchie und Systematik der Flächenintegrale | 157 |
| 3.1.7.3 | Flächenintegrale mit Wölbanteil | 160 |
| 3.1.7.3.1 | Ermittlung der Verwölbung | 160 |
| 3.1.7.3.2 | Normierte Wöblkoordinate (Einheitsverwölbung), Ermittlung von ω_0 | 163 |
| 3.1.7.3.3 | Transformation der Verwölbung bei Änderung des Poles | 169 |
| 3.1.7.3.4 | Normierte Flächenintegrale zweiter Ordnung | 172 |
| 3.1.7.3.5 | Hauptkoordinaten | 173 |
| 3.1.7.3.6 | Ermittlung des Schubmittelpunktes für offene Profile (SM) | 174 |
| 3.1.7.3.7 | Ermittlung des kleinsten Wölbwiderstandes | 175 |
| 3.1.7.4 | Abschließende Bemerkungen | 176 |
| 3.2 | Elementare Torsionstheorie (ETT) nach B. de St. Venant für dünnwandige stabförmige Tragwerke | 178 |
| 3.2.1 | Torsion einer Welle mit Kreisquerschnitt | 180 |
| 3.2.2 | Lösung des Spannungsproblems für eine einzellige dünnwandige Röhre (SS und SSS) | 183 |
| 3.2.3 | Kinematische Zusammenhänge bei geschlossenen und offenen (Hohl-) Querschnitten (KVV) und ihre Verknüpfung mit der Schnittkraft | 185 |
| 3.2.3.1 | Ermittlung der Wölfunktion für geschlossene und offene Querschnitte | 187 |
| 3.2.3.1.1 | Wölfunktion für geschlossene Querschnitte Zwangsfreie Drillung um den SMg ($W = u(s) - u_0$) . | 189 |
| 3.2.3.1.2 | Wölfunktion für offene Querschnitte Zwangsfreie Drillung um den SM ($W = u(s) - u_0$) . | 190 |
| 3.2.3.2 | Ermittlung des spezifischen Drillwinkels ϑ für einzellige geschlossene Querschnitte bei zwangsfreier Drillung . | 195 |
| 3.2.3.3 | Verwölbungsfreie, sogenannte Neubersche (Zylinder-) Schalen | 198 |
| 3.2.3.4 | Abschätzung der Verwölbung eines Rechteckquerschnittes ohne Wölbbehinderung | 202 |
| 3.2.3.5 | Betrachtungen zur Torsion eines dünnwandigen Querschnittes mit Wölbbehinderung (Feste Einspannung) | 208 |
| 3.2.4 | Torsion einer mehrzelligen Röhre | 210 |
| 3.2.5 | Zwangsfreie Drillung nicht kreisförmiger Vollquerschnitte (Näherung für $b \gg t$) | 213 |
| 3.3 | Elementare Biegetheorie, "EBT" (Navier-Biegetheorie) | 219 |
| 3.3.1 | Voraussetzungen, Abgrenzungen, Gültigkeit | 219 |

| | |
|---|-----|
| 3.3.2 Grundgleichungen der EBT | 222 |
| 3.3.2.1 Betrachtungen zur Kinematik der Biegetheorie (KVV) | 222 |
| 3.3.2.1.1 Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (KVV) | 223 |
| 3.3.2.2 Betrachtungen zum Gleichgewicht | 230 |
| 3.3.3 Ermittlung der Spannungen in einem Schnitt | 232 |
| 3.3.3.1 Ermittlung der Normalspannungen in einem Schnitt | 232 |
| 3.3.3.1.1 Allgemeines Koordinatensystem (AG-KOS) | 233 |
| 3.3.3.1.2 Schwerpunkt-Koordinatensystem (SP-KOS) | 236 |
| 3.3.3.1.3 Hauptachsen-Koordinatensystem (HA-KOS) | 239 |
| 3.3.3.2 Ermittlung der Schub-Spannungen bzw. des Schubflusses in dünnwandigen zylindrischen Querschnitten | 244 |
| 3.3.4 Ermittlung der Biegelinie (Elastizitätsgesetze der EBT) | 252 |
| 3.3.4.1 Die durch Dehnung entstehende Biegelinie | 252 |
| 3.3.4.2 Abschätzung des Einflusses der Schubdeformation | 257 |
| 3.3.5 Schubflußverteilung in offenen Querschnitten | 265 |
| 3.3.5.1 Hydrodynamische Analoga | 271 |
| 3.3.6 Momentenäquivalenz und ihre Anwendung zur Bestimmung von Schubmittelpunkten | 276 |
| 3.3.6.1 Ermittlung des Schubmittelpunktes offener Querschnitte (SM) | 277 |
| 3.3.6.2 Ermittlung des Schubmittelpunktes geschlossener Querschnitte (SMg) | 282 |
| 3.3.7 Schubflußverteilung in geschlossenen Hohlquerschnitten | 287 |
| 3.3.7.1 Einzellige geschlossene Querschnitte | 291 |
| 3.3.7.2 Mehrzellige geschlossene Querschnitte | 298 |
| 3.3.8 Schubfeldträger | 306 |
| 3.3.8.1 Rechteckfeld | 309 |
| 3.3.8.2 Parallelogrammfeld | 311 |
| 3.3.8.3 Trapezfeld | 313 |
| 3.3.8.4 Allgemeines Viereckfeld | 318 |
| 3.3.8.5 Offene Schubfeldträger | 320 |
| 3.3.8.6 Geschlossene Schubfeldträger | 328 |
| 3.3.8.7 Bemerkungen zur Zugfeldtheorie | 333 |
| 3.4 Dünnwandige Querschnitte unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion (EWT) | 335 |
| 3.4.1 Voraussetzungen, physikalisches Verhalten | 335 |
| 3.4.2 Kinematische Beziehungen (KVV) | 337 |
| 3.4.3 Gleichgewichtsbedingungen | 338 |
| 3.4.4 Stoffgesetz | 340 |
| 3.4.5 Ermittlung der Spannung in einem Schnitt | 340 |
| 3.4.5.1 Normalspannungen | 340 |
| 3.4.5.2 Schubspannungen | 342 |

| | |
|---|------------|
| 3.4.6 Grundgleichungen der Wölbkrafttorsion | 343 |
| 3.4.6.1 Bestimmung von $M_{x\omega}$ und σ_x aus Torsionsbeanspruchung | 345 |
| 3.4.7 Abschätzung der Spannungen in einem Schnitt für geschlossene, dünnwandige, einzellige Querschnitte | 350 |
| 3.4.8 Anhang | 353 |
| 4 Energietheoreme der Elastomechanik | 357 |
| 4.1 Voraussetzungen | 357 |
| 4.2 Begriff der Arbeit und der virtuellen Arbeit | 358 |
| 4.3 Arbeit und Ergänzungsarbeit (komplementäre oder konjugierte Arbeit) | 361 |
| 4.3.1 Arbeit W und virtuelle Arbeit δW | 361 |
| 4.3.1.1 Verallgemeinerung | 363 |
| 4.3.2 Ergänzungsarbeit W^* (nach Engesser) und virtuelle Ergänzungsarbeit δW^* | 364 |
| 4.3.2.1 Verallgemeinerung | 365 |
| 4.3.3 Satz von Betti | 366 |
| 4.3.4 Satz von Maxwell (Betti–Maxwellsches Reziprozitäts-Theorem) | 367 |
| 4.4 Formänderungsenergie und Ergänzungs–Formänderungsenergie (komplementäre Formänderungsenergie) | 372 |
| 4.4.1 Formänderungsenergie U_ϵ und virtuelle Formänderungsenergie δU_ϵ | 372 |
| 4.4.2 Komplementäre Formänderungsenergie U_ϵ^* und virtuelle komplementäre Formänderungsenergie δU_ϵ^* | 375 |
| 4.5 Folgerungen | 376 |
| 4.5.1 Folgerungen aus den Ableitungen über Arbeit und Formänderungsenergie | 376 |
| 4.5.2 Folgerungen aus den Ableitungen über komplementäre Arbeit und komplementäre Formänderungsenergie | 377 |
| 4.6 Prinzipien der Virtuellen Verrückungen (PVV) und der Virtuellen Kräfte (PVK) | 378 |
| 4.6.1 Prinzip der Virtuellen Verrückungen (PVV) bzw. Prinzip der Virtuellen Arbeit | 378 |
| 4.6.2 Prinzip der Virtuellen Kräfte (PVK) bzw. Prinzip der Virtuellen Komplementären Arbeit | 384 |
| 4.7 Ableitung weiterer Energie – Theoreme aus dem PVV und PVK . . | 388 |
| 4.7.1 Theoreme der Einheitsverschiebung (EVT) und der Einheitslast (ELT) | 388 |
| 4.7.1.1 Anwendungsbeispiele für das Einheitslasttheorem (ELT) | 391 |
| 4.7.1.1.1 Statisch bestimmte Systeme | 391 |
| 4.7.1.1.2 Statisch überbestimmte Systeme | 399 |
| 4.7.2 Theoreme bzw. Sätze von Castigliano (Engesser) | 403 |

| | |
|---|------------|
| 4.7.3 Theoreme vom Stationären Wert der Potentiellen Gesamtenergie | 405 |
| 4.7.3.1 Prinzip vom Stationären Wert der Gesamten Potentiellen Energie (Satz vom Minimum des Elastischen Gesamtpotentialaes) | 408 |
| 4.7.3.2 Prinzip vom Stationären Wert der Gesamten Komplementären Potentiellen Energie (Satz vom Minimum des Komplementären Elastischen Gesamtpotentialaes) | 408 |
| 4.7.3.3 Satz vom Minimum des (Linear-) Elastischen Gesamtpotentialaes | 409 |
| 4.7.3.4 Satz vom Minimum des Komplementären (Linear-) Elastischen Gesamtpotentialaes | 409 |
| 4.7.4 Theoreme vom Minimum der Formänderungsenergie und der komplementären Formänderungsenergie der Gesamtverformung | 413 |
| 4.7.4.1 Theorem vom Minimum der Formänderungsenergie der Gesamtverformung | 413 |
| 4.7.4.2 Theorem vom Minimum der komplementären Formänderungsenergie der Gesamtverformung | 413 |
| 4.7.5 Abschließende Bemerkungen | 415 |
| 4.7.6 Anhang | 418 |

Teil II: Beispiele zur Theorie und Anwendungen

| | |
|---|------------|
| 1 Einführung | 423 |
| 1-1 Vorgehen bei der Idealisierung | 423 |
| 1-2 Anwendungsbeispiele | 425 |
| 1-2-1 Ermittlung von Luftkräften | 425 |
| 1-2-2 Ermittlung äußerer Lasten | 429 |
| 2.3 Anwendung der linearen Elastizitätstheorie auf die Scheibe | 435 |
| 2.3-1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen | 435 |
| 2.3-2 Aufgaben | 441 |
| 2.3-2.1 Spannungsproblem | 441 |
| 2.3-2.2 Verschiebungs-Verzerrungsproblem | 444 |
| 2.3-2.3 Spannungs-Verzerrungsproblem | 446 |
| 2.3-2.4 Vergleich: Scheibe-Kragbalken | 448 |
| 2.3-2.5 Vergleich: Scheibe-Beidseitig gelenkig gelagerter Biegebalken | 453 |
| 3.1 Definitionen und Grundlagen der geometrischen Beschreibung von Querschnitten | 458 |
| 3.1-1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen | 458 |
| 3.1-2 Aufgaben | 463 |
| 3.1-3 Fragen zum Verständnis | 488 |

| | |
|--|-----|
| 3.2 Elementare Torsionstheorie (ETT) nach B. de St. Venant für dünnwandige, stabförmige Tragwerke | 493 |
| 3.2-1 Dünnwandige, geschlossene Querschnitte | 493 |
| 3.2-1.1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen | 493 |
| 3.2-1.2 Aufgaben | 498 |
| 3.2-2 Dünnwandige, offene Querschnitte | 514 |
| 3.2-2.1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen | 514 |
| 3.2-2.2 Aufgaben | 515 |
| 3.3 Elementare Biegetheorie (EBT) | 516 |
| 3.3-1 Biegelinie und Normalspannungen | 516 |
| 3.3-1.1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen | 516 |
| 3.3-1.2 Aufgaben | 520 |
| 3.3-2 Schubflußberechnung für offene Querschnitte | 538 |
| 3.3-2.1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen | 538 |
| 3.3-2.2 Aufgaben | 539 |
| 3.3-3 Schubflußberechnung für geschlossene einzellige Querschnitte | 553 |
| 3.3-3.1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen | 553 |
| 3.3-3.2 Aufgaben | 554 |
| 3.3-4 Schubflußberechnung für geschlossene mehrzellige Querschnitte | 567 |
| 3.3-4.1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen | 567 |
| 3.3-4.2 Aufgaben | 568 |
| 3.3-5 Allgemeiner Vierecks-Schubfeldträger (SFT) | 585 |
| 3.3-5.1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen | 585 |
| 3.3-5.2 Aufgabe | 586 |
| 3.3-6 Anwendungsbeispiele | 590 |
| 3.3-6.1 Abschätzung der Beanspruchung des Querschnittes eines Flugzeuggrumpfes | 590 |
| 3.3-6.2 Schnittkräfte am Rumpf eines Flugzeuges infolge der Lasten aus gepfeilten Tragflächen | 602 |
| 3.4 Wölbkrafttorsion | 608 |
| 3.4-1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen | 608 |
| 3.4-1.1 Annahmen und Voraussetzungen | 608 |
| 3.4-1.2 Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion | 611 |
| 3.4-2 Aufgaben | 614 |
| 4 Energiethoreme | 633 |
| 4-1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen | 633 |
| 4-1.1 Einheitsverschiebungstheorem und Einheitslasttheorem | 634 |
| 4-1.2 Theoreme von Castigliano I und II | 636 |
| 4-1.3 Anwendung der Integraltafel | 638 |
| 4-2 Statisch bestimmte Systeme | 639 |
| 4-2.1 Aufgabe | 639 |
| 4-2.1.1 Lösung mit Hilfe des ELT | 640 |
| 4-2.1.2 Lösung mit Hilfe von Castigliano II | 643 |

| | | |
|----------------------------|--|-----|
| 4-3 | Äußerlich statisch überbestimmte Systeme | 647 |
| 4-3.1 | Aufgabe | 647 |
| 4-4 | Innerlich statisch überbestimmte Systeme | 654 |
| 4-4.1 | Aufgabe | 654 |
| 4-5 | Anwendungsbeispiele | 661 |
| 4-5.1 | Regal | 661 |
| 4-5.2 | Doppeldecker | 665 |
| 4-5.3 | Schubfeldträger | 668 |
| Literatur | | 675 |
| Sachwortverzeichnis | | 677 |