

Inhaltsverzeichnis

Teil I: Theorie

Vorwort	vii
.	xvi
Abkürzungen	xix
Bezeichnungen	xxi
1 Einführung	1
2 Lineare Elastizitätstheorie	15
2.1 Voraussetzungen	15
2.2 Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie	16
2.2.1 Differentialgleichungen des Gleichgewichtes	16
2.2.1.1 Statische Beziehungen im Körperinneren (SS)	16
2.2.1.1.1 Ebener Fall	16
2.2.1.1.2 Erweiterung auf den Raum	19
2.2.1.2 Statische Beziehungen an einem Schnitt bzw. am Rand (SSS)	22
2.2.1.2.1 Ebener Fall (Dicke "1")	22
2.2.1.2.2 Erweiterung auf den Raum	23
2.2.1.2.3 Randbedingung der Kräfte (KRB)	25
2.2.1.3 Spannungsfelder, Airysche Spannungsfunktion, Spannungsansätze	25
2.2.1.3.1 Spannungsfelder $\underline{\sigma}$	25
2.2.1.3.2 Airysche Spannungsfunktion Φ	26
2.2.1.3.3 Pascalsches Dreieck als Hilfsmittel für Spannungs- bzw. Verschiebungsansätze in Polynomform	27
2.2.2 Differentialgleichungen der Kinematik (KVV)	27
2.2.2.1 Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen	28
2.2.2.1.1 Ebener Fall	28
2.2.2.1.2 Erweiterung auf den Raum	30

2.2.2.2	Kompatibilitäts- bzw. Verträglichkeitsbeziehungen . .	33
2.2.2.2.1	Ebener Fall	33
2.2.2.2.2	Erweiterung auf den Raum	34
2.2.2.3	Randbedingungen für die Verschiebungen (GRB) . . .	34
2.2.3	Stoffgesetze	35
2.2.3.1	Homogene, isotrope Stoffe im dreidimensionalen Raum	35
2.2.3.2	Ebene Zustände bei homogenem, isotropem Material .	38
2.2.3.2.1	Ebener Dehnungszustand ($\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$)	38
2.2.3.2.2	Ebener Spannungszustand ($\sigma_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$)	40
2.2.3.3	Anisotrope Stoffe	44
2.3	Anwendung der Grundgleichungen auf die Scheibe	46
2.3.1	Lösungsschema, Schnittgrößen, Ausgangsgleichungen	47
2.3.2	Lösungsweg bei Anwendung der Gleichungen für den ebenen Spannungszustand ($\sigma_z = 0$, isotroper Werkstoff)	51
2.3.2.1	Kraftmethode: (gesucht sind die DGL'n der Spannungen)	51
2.3.2.1.1	Anwendung der Airyschen Spannungsfunktion	52
2.3.2.2	Deformationsmethode: (gesucht sind die DGL'n der Verschiebungen)	53
2.3.3	Lösungsweg bei Anwendung der Gleichungen für den ebenen Dehnungszustand ($\varepsilon_z = 0$, isotroper Werkstoff)	54
2.3.3.1	Deformationsmethode	55
2.3.3.2	Kraftmethode	55
2.3.4	Anmerkungen und Zusammenfassung	56
2.4	Anwendung der Grundgleichungen bei Torsion	58
2.4.1	St. Venantsche Torsionstheorie	58
2.4.1.1	Kinematische Zusammenhänge (KVV)	59
2.4.1.2	Stoffgesetz, Spannungs- Verschiebungsbeziehungen . .	61
2.4.1.3	Gleichgewichtsbeziehungen (SS)	61
2.4.2	Prandtlsche Torsionsfunktion	63
2.4.2.1	Ermittlung der Kompatibilitätsbedingungen	63
2.4.2.2	Gleichgewichtsbeziehungen (SS)	64
2.4.2.2.1	Randbedingungen auf der Zylinderoberfläche	64
2.4.2.2.2	Spannungen im Stabquerschnitt (yz-Ebene)	66
2.4.2.2.3	Schnittkräfte bzw. Randbedingungen an den Stabenden	67
2.4.2.3	Membrananalogie	70
2.4.2.4	Ermittlung der Schubspannungsverteilung in einigen zylindrischen Vollquerschnitten	70
2.5	Anhang: Transformation von Koordinaten, Vektoren und Tensoren zweiter Stufe	73
2.5.1	Übergang von der Vektor- bzw. Matrixschreibweise zur Indexschreibweise	73

2.5.2 Koordinatentransformation, Transformation eines Ortsvektors, einer Strecke, eines Winkels	77
2.5.3 Transformation der Spannungen	80
2.5.4 Dyadisches Produkt und der Begriff des Tensors	85
2.5.4.1 Transformation des dyadischen Produktes bzw. des Tensors 2. Stufe	87
2.5.4.2 Eigenschaften eines Tensors 2. Stufe	90
2.5.5 Transformation der Verzerrungen	92
3 Stabförmige Tragwerke	97
3.1 Definitionen und Grundlagen	97
3.1.1 Begriffsbestimmung und Voraussetzungen für stabförmige Tragwerke	98
3.1.2 Lösungsablauf beim Berechnen von stabförmigen Tragwerken	102
3.1.3 Spannungen in dünnwandigen, stabförmigen Tragwerken (SS)	106
3.1.3.1 Kraftflüsse	106
3.1.3.2 Gleichgewicht an einem dünnwandigen Element (SS)	108
3.1.4 Zusammenhang zwischen Spannungen und Schnittgrößen an den Schnittflächen eines stabförmigen Tragwerkes (SSS)	112
3.1.4.1 Schnittgrößen am Vollquerschnitt (SSS)	112
3.1.4.2 Schnittgrößen an offenen oder geschlossenen dünnwandigen Querschnitten (SSS)	113
3.1.5 Gleichgewicht von äußeren Lasten und Schnittlasten an einem stabförmigen Element (SSL)	122
3.1.6 Allgemeine Betrachtung der kinematischen Bedingungen an stabförmigen Tragwerken (KVV)	132
3.1.6.1 Betrachtung des Querschnittes	132
3.1.6.1.1 Wölbkoordinate ω bei offenen, dünnwandigen Querschnitten	134
3.1.6.2 Betrachtung des kinematischen Verhaltens eines Querschnittes bei Drillung	136
3.1.6.2.1 Definition des Schubmittelpunktes (Momentan(dreh)poles)	137
3.1.6.2.2 Betrachtung eines Hautelementes	140
3.1.6.2.3 Definition von v_t beim Vorliegen eines Allgemeinen Koordinatensystems	142
3.1.7 Flächenintegrale (Aus der Geometrie der stabförmigen Tragwerke und der Wahl des Koordinatensystems resultierende Zusammenhänge)	144
3.1.7.1 Flächenintegrale ohne Wölbanteil	145
3.1.7.1.1 Allgemeines Koordinatensystem (AG-KOS: (x,y,z))	145
3.1.7.1.2 Schwerpunkt-Koordinatensystem (SP-KOS: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$)	146
3.1.7.1.3 Hauptachsen-Koordinatensystem (HA-KOS: $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$) bei Biegung ohne Wölbbeanspruchung	149

3.1.7.1.4	Hierarchie der Flächenintegrale der yz-Koordinaten ohne Wölbanteil	156
3.1.7.2	Hierarchie und Systematik der Flächenintegrale . . .	157
3.1.7.3	Flächenintegrale mit Wölbanteil	160
3.1.7.3.1	Ermittlung der Verwölbung	160
3.1.7.3.2	Normierte Wöblkoordinate (Einheitsverwölbung), Ermittlung von ω_0	163
3.1.7.3.3	Transformation der Verwölbung bei Änderung des Poles	169
3.1.7.3.4	Normierte Flächenintegrale zweiter Ordnung	172
3.1.7.3.5	Hauptkoordinaten	173
3.1.7.3.6	Ermittlung des Schubmittelpunktes für offene Profile (SM)	174
3.1.7.3.7	Ermittlung des kleinsten Wölbwiderstandes	175
3.1.7.4	Abschließende Bemerkungen	176
3.2	Elementare Torsionstheorie (ETT) nach B. de St. Venant für dünnwandige stabförmige Tragwerke	178
3.2.1	Torsion einer Welle mit Kreisquerschnitt	180
3.2.2	Lösung des Spannungsproblems für eine einzellige dünnwandige Röhre (SS und SSS)	183
3.2.3	Kinematische Zusammenhänge bei geschlossenen und offenen (Hohl-) Querschnitten (KVV) und ihre Verknüpfung mit der Schnittkraft	185
3.2.3.1	Ermittlung der Wölbfunktion für geschlossene und offene Querschnitte	187
3.2.3.1.1	Wölbfunktion für geschlossene Querschnitte Zwangsfreie Drillung um den SMg ($W = u(s) - u_0$)	189
3.2.3.1.2	Wölbfunktion für offene Querschnitte Zwangsfreie Drillung um den SM ($W = u(s) - u_0$)	190
3.2.3.2	Ermittlung des spezifischen Drillwinkels ϑ für einzellige geschlossene Querschnitte bei zwangsfreier Drillung	195
3.2.3.3	Verwölbungsfreie, sogenannte Neubersche (Zylinder-) Schalen	198
3.2.3.4	Abschätzung der Verwölbung eines Rechteckquerschnittes ohne Wölbbehinderung	202
3.2.3.5	Betrachtungen zur Torsion eines dünnwandigen Querschnittes mit Wölbbehinderung (Feste Einspannung)	208
3.2.4	Torsion einer mehrzelligen Röhre	210
3.2.5	Zwangsfreie Drillung nicht kreisförmiger Vollquerschnitte (Näherung für $b \gg t$)	213
3.3	Elementare Biegetheorie, "EBT" (Navier-Biegetheorie)	219
3.3.1	Voraussetzungen, Abgrenzungen, Gültigkeit	219

3.3.2 Grundgleichungen der EBT	222
3.3.2.1 Betrachtungen zur Kinematik der Biegetheorie (KVV)	222
3.3.2.1.1 Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (KVV)	223
3.3.2.2 Betrachtungen zum Gleichgewicht	230
3.3.3 Ermittlung der Spannungen in einem Schnitt	232
3.3.3.1 Ermittlung der Normalspannungen in einem Schnitt	232
3.3.3.1.1 Allgemeines Koordinatensystem (AG-KOS)	233
3.3.3.1.2 Schwerpunkt-Koordinatensystem (SP-KOS)	236
3.3.3.1.3 Hauptachsen-Koordinatensystem (HA-KOS)	239
3.3.3.2 Ermittlung der Schub-Spannungen bzw. des Schubflusses in dünnwandigen zylindrischen Querschnitten	244
3.3.4 Ermittlung der Biegelinie (Elastizitätsgesetze der EBT)	252
3.3.4.1 Die durch Dehnung entstehende Biegelinie	252
3.3.4.2 Abschätzung des Einflusses der Schubdeformation	257
3.3.5 Schubflußverteilung in offenen Querschnitten	265
3.3.5.1 Hydrodynamische Analoga	271
3.3.6 Momentenäquivalenz und ihre Anwendung zur Bestimmung von Schubmittelpunkten	276
3.3.6.1 Ermittlung des Schubmittelpunktes offener Querschnitte (SM)	277
3.3.6.2 Ermittlung des Schubmittelpunktes geschlossener Querschnitte (SMg)	282
3.3.7 Schubflußverteilung in geschlossenen Hohlquerschnitten	287
3.3.7.1 Einzellige geschlossene Querschnitte	291
3.3.7.2 Mehrzellige geschlossene Querschnitte	298
3.3.8 Schubfeldträger	306
3.3.8.1 Rechteckfeld	309
3.3.8.2 Parallelogrammfield	311
3.3.8.3 Trapezfeld	313
3.3.8.4 Allgemeines Viereckfeld	318
3.3.8.5 Offene Schubfeldträger	320
3.3.8.6 Geschlossene Schubfeldträger	328
3.3.8.7 Bemerkungen zur Zugfeldtheorie	333
3.4 Dünnwandige Querschnitte unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion (EWT)	335
3.4.1 Voraussetzungen, physikalisches Verhalten	335
3.4.2 Kinematische Beziehungen (KVV)	337
3.4.3 Gleichgewichtsbedingungen	338
3.4.4 Stoffgesetz	340
3.4.5 Ermittlung der Spannung in einem Schnitt	340
3.4.5.1 Normalspannungen	340
3.4.5.2 Schubspannungen	342

3.4.6	Grundgleichungen der Wölbkrafttorsion	343
3.4.6.1	Bestimmung von $M_{x\hat{\omega}}$ und $\sigma_{\hat{x}}$ aus Torsionsbeanspruchung	345
3.4.7	Abschätzung der Spannungen in einem Schnitt für geschlossene, dünnwandige, einzellige Querschnitte	350
3.4.8	Anhang	353
4	Energiethoreme der Elastomechanik	357
4.1	Voraussetzungen	357
4.2	Begriff der Arbeit und der virtuellen Arbeit	358
4.3	Arbeit und Ergänzungsarbeit (komplementäre oder konjugierte Arbeit)	361
4.3.1	Arbeit W und virtuelle Arbeit δW	361
4.3.1.1	Verallgemeinerung	363
4.3.2	Ergänzungsarbeit W^* (nach Engesser) und virtuelle Ergänzungsarbeit δW^*	364
4.3.2.1	Verallgemeinerung	365
4.3.3	Satz von Betti	366
4.3.4	Satz von Maxwell (Betti–Maxwellsches Reziprozitäts-Theorem)	367
4.4	Formänderungsenergie und Ergänzungs–Formänderungsenergie (komplementäre Formänderungsenergie)	372
4.4.1	Formänderungsenergie U_{ϵ} und virtuelle Formänderungsenergie δU_{ϵ}	372
4.4.2	Komplementäre Formänderungsenergie U_{ϵ}^* und virtuelle komplementäre Formänderungsenergie δU_{ϵ}^*	375
4.5	Folgerungen	376
4.5.1	Folgerungen aus den Ableitungen über Arbeit und Formänderungsenergie	376
4.5.2	Folgerungen aus den Ableitungen über komplementäre Arbeit und komplementäre Formänderungsenergie	377
4.6	Prinzip der Virtuellen Verrückungen (PVV) und der Virtuellen Kräfte (PVK)	378
4.6.1	Prinzip der Virtuellen Verrückungen (PVV) bzw. Prinzip der Virtuellen Arbeit	378
4.6.2	Prinzip der Virtuellen Kräfte (PVK) bzw. Prinzip der Virtuellen Komplementären Arbeit	384
4.7	Ableitung weiterer Energie – Theoreme aus dem PVV und PVK	388
4.7.1	Theoreme der Einheitsverschiebung (EVT) und der Einheitslast (ELT)	388
4.7.1.1	Anwendungsbeispiele für das Einheitslasttheorem (ELT)	391
4.7.1.1.1	Statisch bestimmte Systeme	391
4.7.1.1.2	Statisch überbestimmte Systeme	399
4.7.2	Theoreme bzw. Sätze von Castigliano (Engesser)	403

4.7.3 Theoreme vom Stationären Wert der Potentiellen Gesamtenergie	405
4.7.3.1 Prinzip vom Stationären Wert der Gesamten Potentiellen Energie (Satz vom Minimum des Elastischen Gesamtpotentiales)	408
4.7.3.2 Prinzip vom Stationären Wert der Gesamten Komplementären Potentiellen Energie (Satz vom Minimum des Komplementären Elastischen Gesamtpotentiales)	408
4.7.3.3 Satz vom Minimum des (Linear-) Elastischen Gesamtpotentiales	409
4.7.3.4 Satz vom Minimum des Komplementären (Linear-) Elastischen Gesamtpotentiales	409
4.7.4 Theoreme vom Minimum der Formänderungsenergie und der komplementären Formänderungsenergie der Gesamtverformung	413
4.7.4.1 Theorem vom Minimum der Formänderungsenergie der Gesamtverformung	413
4.7.4.2 Theorem vom Minimum der komplementären Formänderungsenergie der Gesamtverformung	413
4.7.5 Abschließende Bemerkungen	415
4.7.6 Anhang	418

Teil II: Beispiele zur Theorie und Anwendungen

1 Einführung	423
1-1 Vorgehen bei der Idealisierung	423
1-2 Anwendungsbeispiele	425
1-2.1 Ermittlung von Luftkräften	425
1-2.2 Ermittlung äußerer Lasten	429
2.3 Anwendung der linearen Elastizitätstheorie auf die Scheibe	435
2.3-1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen	435
2.3-2 Aufgaben	441
2.3-2.1 Spannungsproblem	441
2.3-2.2 Verschiebungs-Verzerrungsproblem	444
2.3-2.3 Spannungs-Verzerrungsproblem	446
2.3-2.4 Vergleich: Scheibe-Kragbalken	448
2.3-2.5 Vergleich: Scheibe-Beidseitig gelenkig gelagerter Biegebalken	453
3.1 Definitionen und Grundlagen der geometrischen Beschreibung von Querschnitten	458
3.1-1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen	458
3.1-2 Aufgaben	463
3.1-3 Fragen zum Verständnis	488

3.2 Elementare Torsionstheorie (ETT) nach B. de St. Venant für dünnwandige, stabförmige Tragwerke	493
3.2-1 Dünnwandige, geschlossene Querschnitte	493
3.2-1.1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen	493
3.2-1.2 Aufgaben	498
3.2-2 Dünnwandige, offene Querschnitte	514
3.2-2.1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen	514
3.2-2.2 Aufgaben	515
3.3 Elementare Biegetheorie (EBT)	516
3.3-1 Biegelinie und Normalspannungen	516
3.3-1.1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen	516
3.3-1.2 Aufgaben	520
3.3-2 Schubflußberechnung für offene Querschnitte	538
3.3-2.1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen	538
3.3-2.2 Aufgaben	539
3.3-3 Schubflußberechnung für geschlossene einzellige Querschnitte	553
3.3-3.1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen	553
3.3-3.2 Aufgaben	554
3.3-4 Schubflußberechnung für geschlossene mehrzellige Querschnitte	567
3.3-4.1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen	567
3.3-4.2 Aufgaben	568
3.3-5 Allgemeiner Vierecks-Schubfeldträger (SFT)	585
3.3-5.1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen	585
3.3-5.2 Aufgabe	586
3.3-6 Anwendungsbeispiele	590
3.3-6.1 Abschätzung der Beanspruchung des Querschnittes eines Flugzeugrumpfes	590
3.3-6.2 Schnittkräfte am Rumpf eines Flugzeuges infolge der Lasten aus gepfeilten Tragflächen	602
3.4 Wölbkrafttorsion	608
3.4-1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen	608
3.4-1.1 Annahmen und Voraussetzungen	608
3.4-1.2 Differentialgleichung der Wölbkrafttorsion	611
3.4-2 Aufgaben	614
4 Energiethoreme	633
4-1 Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen	633
4-1.1 Einheitsverschiebungstheorem und Einheitslasttheorem	634
4-1.2 Theoreme von Castigliano I und II	636
4-1.3 Anwendung der Integraltabelle	638
4-2 Statisch bestimmte Systeme	639
4-2.1 Aufgabe	639
4-2.1.1 Lösung mit Hilfe des ELT	640
4-2.1.2 Lösung mit Hilfe von Castigliano II	643

4-3	Äußerlich statisch überbestimmte Systeme	647
4-3.1	Aufgabe	647
4-4	Innerlich statisch überbestimmte Systeme	654
4-4.1	Aufgabe	654
4-5	Anwendungsbeispiele	661
4-5.1	Regal	661
4-5.2	Doppeldecker	665
4-5.3	Schubfeldträger	668
Literatur	675
Sachwortverzeichnis	677