

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|----|
| Vorwort | v |
| 0 Vorbemerkungen | 1 |
| 0.1 Womit befasst sich die Algebra ? | 1 |
| 0.2 Gruppen, Ringe, Körper | 2 |
| 1 Halbgruppen | 5 |
| 1.1 Definitionen | 5 |
| 1.2 Unterhalbgruppen | 8 |
| 1.3 Invertierbare Elemente | 9 |
| 1.4 Allgemeines Assoziativ- und Kommutativgesetz | 11 |
| 1.5 Potenzen und Vielfache | 11 |
| 1.6 Homomorphismen, Isomorphismen | 12 |
| 1.7 Direkte Produkte | 14 |
| 2 Gruppen | 17 |
| 2.1 Eigenschaften und Beispiele von Gruppen | 17 |
| 2.2 Untergruppen | 21 |
| 2.3 Homomorphismen | 25 |
| 3 Untergruppen | 29 |
| 3.1 Erzeugendensysteme. Elementordnungen | 29 |
| 3.2 Nebenklassen | 35 |
| 3.3 Der Satz von Lagrange | 38 |
| 4 Normalteiler und Faktorgruppen | 43 |
| 4.1 Normalteiler | 43 |
| 4.2 Normalisatoren | 46 |
| 4.3 Faktorgruppen | 47 |
| 4.4 Der Homomorphiesatz | 51 |
| 4.5 Innere Automorphismen und das Zentrum einer Gruppe * | 53 |
| 4.6 Isomorphiesätze | 53 |
| 5 Zyklische Gruppen | 59 |
| 5.1 Der Untergruppenverband zyklischer Gruppen | 59 |
| 5.2 Klassifikation der zyklischen Gruppen | 61 |
| 5.3 Anwendungen in der Zahlentheorie | 62 |
| 5.4 Die Automorphismengruppen zyklischer Gruppen * | 68 |
| 6 Direkte Produkte | 71 |
| 6.1 Äußere direkte Produkte | 71 |
| 6.2 Innere direkte Produkte | 72 |
| 6.3 Anwendung in der Zahlentheorie | 75 |

| | |
|---|-----|
| 7 Gruppenoperationen | 83 |
| 7.1 Bahnen und Stabilisatoren von Gruppenoperationen | 83 |
| 7.2 Der Fixpunktsatz | 87 |
| 7.3 Die Klassengleichung | 89 |
| 8 Die Sätze von Sylow | 93 |
| 8.1 Der erste Satz von Sylow | 93 |
| 8.2 Der zweite Satz von Sylow | 97 |
| 8.3 Gruppen kleiner Ordnung | 100 |
| 9 Symmetrische und alternierende Gruppen | 103 |
| 9.1 Kanonische Zerlegung in Zyklen | 103 |
| 9.2 Alternierende Gruppen | 108 |
| 9.3 Einfache Gruppen | 110 |
| 10 Der Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen | 113 |
| 10.1 Der Hauptsatz | 113 |
| 10.2 Klassifikation der endlichen abelschen Gruppen | 115 |
| 10.3 Die zweite Version des Hauptsatzes * | 117 |
| 11 Auflösbare Gruppen | 119 |
| 11.1 Normalreihen und Kompositionsschichten | 119 |
| 11.2 Kommutatorgruppen | 123 |
| 11.3 Auflösbare Gruppen | 126 |
| 11.4 Untergruppen, Faktorgruppen und Produkte auflösbarer Gruppen | 127 |
| 11.5 Klassen auflösbarer Gruppen | 129 |
| 12 Grundbegriffe der Ringtheorie | 131 |
| 12.1 Definition und Beispiele | 131 |
| 12.2 Teilringe | 134 |
| 12.3 Die Einheitengruppe | 135 |
| 12.4 Homomorphismen | 136 |
| 12.5 Integritätsbereiche | 137 |
| 12.6 Charakteristik eines Rings mit 1 | 138 |
| 12.7 Körper und Schiefkörper | 139 |
| 12.8 Quotientenkörper | 140 |
| 13 Polynomringe | 145 |
| 13.1 Motivation | 145 |
| 13.2 Konstruktion des Ringes $R[\mathbb{N}_0]$ | 146 |
| 13.3 Polynome in einer Unbestimmten | 148 |
| 13.4 Prime Restklassengruppen * | 156 |
| 13.5 Polynome in mehreren Unbestimmten | 157 |
| 14 Ideale | 161 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 14.1 | Definitionen und Beispiele | 161 |
| 14.2 | Erzeugung von Idealen | 163 |
| 14.3 | Einfache Ringe | 164 |
| 14.4 | Idealoperationen | 166 |
| 14.5 | Faktorringe | 167 |
| 14.6 | Isomorphiesätze | 168 |
| 14.7 | Primideale | 169 |
| 14.8 | Maximale Ideale | 171 |
| 15 | Teilbarkeit in Integritätsbereichen | 175 |
| 15.1 | Teilbarkeit | 175 |
| 15.2 | Idealtheoretische Interpretation | 179 |
| 16 | Faktorielle Ringe | 181 |
| 16.1 | Kennzeichnungen faktorieller Ringe | 181 |
| 16.2 | Der nichtfaktorielle Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ * | 184 |
| 17 | Hauptidealringe. Euklidische Ringe | 187 |
| 17.1 | Hauptidealringe | 187 |
| 17.2 | Euklidische Ringe | 189 |
| 17.3 | Der euklidische Ring $\mathbb{Z}[i]$ * | 192 |
| 18 | Zerlegbarkeit in Polynomringen und noethersche Ringe | 195 |
| 18.1 | Der Satz von Gauß | 195 |
| 18.2 | Irreduzibilität | 199 |
| 18.3 | Noethersche Ringe * | 203 |
| 19 | Grundlagen der Körpertheorie | 207 |
| 19.1 | Körpererweiterungen | 207 |
| 19.2 | Ring- und Körperadjunktion | 212 |
| 19.3 | Algebraische Elemente. Minimalpolynome | 213 |
| 20 | Einfache und algebraische Körpererweiterungen | 217 |
| 20.1 | Einfache Körpererweiterungen | 217 |
| 20.2 | Fortsetzung von Isomorphismen auf einfache Erweiterungen | 219 |
| 20.3 | Algebraische Körpererweiterungen | 221 |
| 21 | Konstruktionen mit Zirkel und Lineal * | 225 |
| 21.1 | Konstruierbarkeit | 225 |
| 21.2 | Die drei klassischen Probleme | 231 |
| 22 | Transzendente Körpererweiterungen * | 233 |
| 22.1 | Transzendenzbasen | 233 |
| 22.2 | Der Transzendenzgrad | 237 |
| 23 | Algebraischer Abschluss. Zerfällungskörper | 239 |
| 23.1 | Der algebraische Abschluss eines Körpers | 239 |

| | |
|---|------------|
| 23.2 Zerfällungskörper | 244 |
| 23.3 Normale Körpererweiterungen | 249 |
| 24 Separable Körpererweiterungen | 253 |
| 24.1 Ableitung. Mehrfache Wurzeln | 253 |
| 24.2 Separabilität | 255 |
| 24.3 Vollkommene Körper | 258 |
| 24.4 Der Satz vom primitiven Element | 259 |
| 24.5 Der separable Abschluss | 260 |
| 25 Endliche Körper | 265 |
| 25.1 Existenz und Eindeutigkeit | 265 |
| 25.2 Der Verband der Teilkörper | 268 |
| 25.3 Automorphismen | 269 |
| 26 Die Galoiskorrespondenz | 271 |
| 26.1 K -Automorphismen | 271 |
| 26.2 Die allgemeine Galoiskorrespondenz | 274 |
| 26.3 Algebraische Körpererweiterungen | 278 |
| 26.4 Hauptsatz der endlichen Galoistheorie | 281 |
| 26.5 Ergänzungen | 284 |
| 27 Der Zwischenkörperverband einer Galoiserweiterung * | 287 |
| 27.1 Norm und Spur | 287 |
| 27.2 Hinweise zur Ermittlung des Fixkörpers $\mathcal{F}(\Delta)$ | 288 |
| 27.3 Hinweise zur Ermittlung von $\Gamma = \Gamma(L/K)$ | 290 |
| 27.4 Beispiele | 291 |
| 27.5 Die Galoisgruppe eines Polynoms | 292 |
| 28 Kreisteilungskörper | 297 |
| 28.1 Einheitswurzeln. Kreisteilungskörper | 297 |
| 28.2 Kreisteilungspolynome | 299 |
| 28.3 Die Galoisgruppe von K_n/K | 304 |
| 28.4 Konstruktion regulärer Vielecke * | 306 |
| 29 Auflösung algebraischer Gleichungen durch Radikale | 311 |
| 29.1 Zyklische Körpererweiterungen | 311 |
| 29.2 Auflösbarkeit | 316 |
| 29.3 Das Auflösbarkeitskriterium | 316 |
| 30 Die allgemeine Gleichung | 321 |
| 30.1 Symmetrische Funktionen | 321 |
| 30.2 Das allgemeine Polynom | 324 |
| 30.3 Die Diskriminante eines Polynoms * | 326 |
| 30.4 Die allgemeine Gleichung vom Grad 3 * | 328 |

| | |
|--|-----|
| 30.5 Die allgemeine Gleichung vom Grad 4 * | 331 |
| A Hilfsmittel | 333 |
| A.1 Äquivalenzrelationen | 333 |
| A.2 Transfinite Beweismethoden | 334 |
| A.3 Kardinalzahlen | 337 |
| A.4 Zusammenfassung der Axiome | 339 |
| Literaturverzeichnis | 341 |
| Index | 343 |