

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
0 Vorbemerkungen	1
0.1 Womit befasst sich die Algebra?	1
0.2 Gruppen, Ringe, Körper	2
1 Halbgruppen	5
1.1 Definitionen	5
1.2 Unterhalbgruppen	8
1.3 Invertierbare Elemente	9
1.4 Allgemeines Assoziativ- und Kommutativgesetz	11
1.5 Potenzen und Vielfache	11
1.6 Homomorphismen, Isomorphismen	12
1.7 Direkte Produkte	14
2 Gruppen	17
2.1 Eigenschaften und Beispiele von Gruppen	17
2.2 Untergruppen	21
2.3 Homomorphismen	25
3 Untergruppen	29
3.1 Erzeugendensysteme. Elementordnungen	29
3.2 Nebenklassen	35
3.3 Der Satz von Lagrange	38
4 Normalteiler und Faktorgruppen	43
4.1 Normalteiler	43
4.2 Normalisatoren	46
4.3 Faktorgruppen	47
4.4 Der Homomorphiesatz	51
4.5 Innere Automorphismen und das Zentrum einer Gruppe *	53
4.6 Isomorphiesätze	53
5 Zyklische Gruppen	59
5.1 Der Untergruppenverband zyklischer Gruppen	59
5.2 Klassifikation der zyklischen Gruppen	61
5.3 Anwendungen in der Zahlentheorie	62
5.4 Die Automorphismengruppen zyklischer Gruppen *	68
6 Direkte Produkte	71
6.1 Äußere direkte Produkte	71
6.2 Innere direkte Produkte	72
6.3 Anwendung in der Zahlentheorie	75

7	Gruppenoperationen	83
7.1	Bahnen und Stabilisatoren von Gruppenoperationen	83
7.2	Der Fixpunktsatz	87
7.3	Die Klassengleichung	89
8	Die Sätze von Sylow	93
8.1	Der erste Satz von Sylow	93
8.2	Der zweite Satz von Sylow	97
8.3	Gruppen kleiner Ordnung	100
9	Symmetrische und alternierende Gruppen	103
9.1	Kanonische Zerlegung in Zyklen	103
9.2	Alternierende Gruppen	108
9.3	Einfache Gruppen	110
10	Der Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen	113
10.1	Der Hauptsatz	113
10.2	Klassifikation der endlichen abelschen Gruppen	115
10.3	Die zweite Version des Hauptsatzes *	117
11	Auflösbare Gruppen	119
11.1	Normalreihen und Kompositionsreihen	119
11.2	Kommutatorgruppen	123
11.3	Auflösbare Gruppen	126
11.4	Untergruppen, Faktorgruppen und Produkte auflösbarer Gruppen	127
11.5	Klassen auflösbarer Gruppen	129
12	Grundbegriffe der Ringtheorie	131
12.1	Definition und Beispiele	131
12.2	Teilringe	134
12.3	Die Einheitengruppe	135
12.4	Homomorphismen	136
12.5	Integritätsbereiche	137
12.6	Charakteristik eines Ringes mit 1	138
12.7	Körper und Schiefkörper	139
12.8	Quotientenkörper	140
13	Polynomringe	145
13.1	Motivation	145
13.2	Konstruktion des Ringes $R[N_0]$	146
13.3	Polynome in einer Unbestimmten	148
13.4	Prime Restklassengruppen *	156
13.5	Polynome in mehreren Unbestimmten	157
14	Ideale	161

14.1 Definitionen und Beispiele	161
14.2 Erzeugung von Idealen	163
14.3 Einfache Ringe	164
14.4 Idealoperationen	166
14.5 Faktorringe	167
14.6 Isomorphiesätze	168
14.7 Primideale	169
14.8 Maximale Ideale	171
15 Teilbarkeit in Integritätsbereichen	175
15.1 Teilbarkeit	175
15.2 Idealtheoretische Interpretation	179
16 Faktorielle Ringe	181
16.1 Kennzeichnungen faktorieller Ringe	181
16.2 Der nichtfaktorielle Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ *	184
17 Hauptidealringe. Euklidische Ringe	187
17.1 Hauptidealringe	187
17.2 Euklidische Ringe	189
17.3 Der euklidische Ring $\mathbb{Z}[i]$ *	192
18 Zerlegbarkeit in Polynomringen und noethersche Ringe	195
18.1 Der Satz von Gauß	195
18.2 Irreduzibilität	199
18.3 Noethersche Ringe *	203
19 Grundlagen der Körpertheorie	207
19.1 Körpererweiterungen	207
19.2 Ring- und Körperadjunktion	212
19.3 Algebraische Elemente. Minimalpolynome	213
20 Einfache und algebraische Körpererweiterungen	217
20.1 Einfache Körpererweiterungen	217
20.2 Fortsetzung von Isomorphismen auf einfache Erweiterungen	219
20.3 Algebraische Körpererweiterungen	221
21 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal *	225
21.1 Konstruierbarkeit	225
21.2 Die drei klassischen Probleme	231
22 Transzendente Körpererweiterungen *	233
22.1 Transzendenzbasen	233
22.2 Der Transzendenzgrad	237
23 Algebraischer Abschluss. Zerfällungskörper	239
23.1 Der algebraische Abschluss eines Körpers	239

23.2 Zerfällungskörper	244
23.3 Normale Körpererweiterungen	249
24 Separable Körpererweiterungen	253
24.1 Ableitung. Mehrfache Wurzeln	253
24.2 Separabilität	255
24.3 Vollkommene Körper	258
24.4 Der Satz vom primitiven Element	259
24.5 Der separable Abschluss	260
25 Endliche Körper	265
25.1 Existenz und Eindeutigkeit	265
25.2 Der Verband der Teilkörper	268
25.3 Automorphismen	269
26 Die Galois Korrespondenz	271
26.1 K -Automorphismen	271
26.2 Die allgemeine Galois Korrespondenz	274
26.3 Algebraische Galois Erweiterungen	278
26.4 Hauptsatz der endlichen Galois Theorie	281
26.5 Ergänzungen	284
27 Der Zwischenkörperverband einer Galois Erweiterung *	287
27.1 Norm und Spur	287
27.2 Hinweise zur Ermittlung des Fixkörpers $\mathcal{F}(\Delta)$	288
27.3 Hinweise zur Ermittlung von $\Gamma = \Gamma(L/K)$	290
27.4 Beispiele	291
27.5 Die Galois Gruppe eines Polynoms	292
28 Kreisteilungskörper	297
28.1 Einheitswurzeln. Kreisteilungskörper	297
28.2 Kreisteilungspolynome	299
28.3 Die Galois Gruppe von K_n/K	304
28.4 Konstruktion regulärer Vielecke *	306
29 Auflösung algebraischer Gleichungen durch Radikale	311
29.1 Zyklische Körpererweiterungen	311
29.2 Auflösbarkeit	316
29.3 Das Auflösbarkeitskriterium	316
30 Die allgemeine Gleichung	321
30.1 Symmetrische Funktionen	321
30.2 Das allgemeine Polynom	324
30.3 Die Diskriminante eines Polynoms *	326
30.4 Die allgemeine Gleichung vom Grad 3 *	328

30.5 Die allgemeine Gleichung vom Grad 4 *	331
A Hilfsmittel	333
A.1 Äquivalenzrelationen	333
A.2 Transfinite Beweismethoden	334
A.3 Kardinalzahlen	337
A.4 Zusammenfassung der Axiome	339
Literaturverzeichnis	341
Index	343