

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
I Beweise und Beweistechnik	1
1 Was ist Mathematik?	3
1.1 Ausgewählte Antworten	4
1.2 Zusammenfassung	7
1.3 Empfehlenswerte Bücher	8
2 Mathematisch für Anfänger	11
2.1 Lektion 1: Vom Wort zum Satz	12
2.2 Lektion 2: Universelles Vokabular	16
2.3 Lektion 3: Prädikate	18
2.4 Lektion 4: Konjunktionen (Überleitungen)	19
2.5 Lektion 5: Schlussworte, Schlusspunkte	21
3 Beweise, immer nur Beweise	23
3.1 Beweisen lernen	23
3.2 Der Zweck der Übungen	24
3.3 Unterscheide wahr und falsch	24
3.4 Einige Gebote und Verbote	24
3.5 Mathematik ist Struktur	25
3.6 Mathematik für und durch die Praxis	26
3.7 Und wie lernt man beweisen?	26
4 Die Beweisverfahren	27
4.1 Der direkte Beweis	27
4.1.1 Einfache Zahlentheorie	27
4.1.2 Aussagenlogik	29
4.1.3 Gesetze der Aussagenlogik	31
4.1.4 Mengenlehre	32
4.1.5 Fakultät und Binomialkoeffizient	33
4.2 Der indirekte Beweis	35
4.2.1 Wurzel aus 2 ist nicht rational.	35
4.2.2 Es gibt unendlich viele Primzahlen	36
4.3 Der konstruktive Beweis	37
4.3.1 Nullstelle einer Funktion	37
5 Das Prinzip der vollständigen Induktion	39
5.1 Wer hat die vollständige Induktion erfunden?	40
5.2 Ist Induktion nur für Folgen und Reihen?	41
5.3 Wie funktioniert die vollständige Induktion?	41
5.4 Kann man sich auf die vollständige Induktion verlassen?	43
5.5 Kann man wirklich den Induktionsschluss unendlich oft anwenden?	44

5.6	Kann man Induktion immer anwenden?	45
5.7	Induktion ist nicht geeignet, wenn	46
5.8	Was ist schwer an der vollständigen Induktion?	46
5.9	Anwendungen der vollständigen Induktion	47
5.9.1	Geometrie	47
5.9.2	Mengenlehre	49
5.9.3	Binomialkoeffizienten	50
5.9.4	Geometrisches und arithmetisches Mittel	51
5.9.5	Summenformeln	53
5.9.6	Abschätzungen	56
5.9.7	Teilbarkeit	57
5.9.8	Zahlentheorie	57
5.9.9	Rekursiv definierte Folgen	58
5.9.10	Eindeutigkeitsbeweis	59
5.10	Zum Schluss	60
6	Der unendliche Abstieg	61
6.1	Einführung	61
6.2	$\sqrt{2}$ ist irrational	62
6.2.1	Das übliche Verfahren	62
6.2.2	$\sqrt{2}$ ist irrational mit unendlichem Abstieg	62
6.2.3	Ist auch $\sqrt{9}$ irrational?	63
6.2.4	Ist die Wurzel aus 5 irrational?	64
6.2.5	Die Wurzel einer Nicht-Quadratzahl ist irrational	64
6.3	Inkommensurable Längen im Fünfeck	65
7	Über das Auswahlaxiom	67
7.1	Das Auswahlproblem	67
7.2	Das Auswahlaxiom	68
7.3	Wohlordnung	69
7.4	Lemma von Zorn	71
7.5	Äquivalenz der Aussagen	73
II	Lineare Algebra	77
8	Lineare Algebra für absolute Anfänger	79
8.1	Einführung	79
8.2	Vektorräume	80
8.3	Untervektorräume	85
8.4	Lineare Unabhängigkeit	89
8.5	Schluss	91
9	Lineare Gleichungssysteme	93
9.1	Einführung	93
9.2	Lineare Gleichungssysteme: Was ist das?	93

9.2.1	Einführendes Beispiel	93
9.2.2	Definitionen	95
9.2.3	Darstellung mit Matrizen	96
9.3	Lösung linearer Gleichungssysteme	97
9.3.1	Der Gaußsche Algorithmus	97
9.3.2	Beispiel 1: Eindeutige Lösung	101
9.3.3	Beispiel 2: Keine Lösung	104
9.3.4	Beispiel 3: Unendlich viele Lösungen	106
9.4	Rangbestimmung einer Matrix	109
10	Lineare Abbildungen und ihre darstellenden Matrizen	111
10.1	Einführung	111
10.2	Lineare Abbildungen	112
10.3	Bild und Kern einer linearen Abbildung	113
10.4	Dimensionsformel und weitere Eigenschaften	115
10.5	Lineare Abbildung am Beispiel	116
10.6	Darstellungen linearer Abbildungen am Beispiel	117
10.7	Darstellungsmatrizen linearer Abbildungen	118
10.8	Berechnung einer Darstellungsmatrix am Beispiel	120
10.9	Abbilden mit einer darstellenden Matrix	123
10.10	Beispiel zum Basiswechsel	124
11	Determinante: Was ist das?	127
11.1	Einführung	127
11.2	Determinante: Was ist das?	128
11.3	Spezialfälle	129
11.3.1	Der Fall $n = 1$	129
11.3.2	Der Fall $n = 2$	130
11.3.3	Der Fall $n = 3$	133
11.4	Der allgemeine Fall	136
11.5	Praktische Berechnung von Determinanten	141
11.5.1	Der Gaußsche Algorithmus	141
11.5.2	Die Laplacesche Entwicklungsformel	143
12	Diagonalisierbarkeit: Was ist das?	145
12.1	Einführung	145
12.2	Diagonalisierbarkeit: Was ist das?	145
12.3	Eigenwerte und Eigenvektoren	146
12.4	Eigenwerte und Eigenvektoren am Beispiel	151
12.5	Diagonalisierbarkeitskriterien	152
12.6	Eine praktische Anwendung	156

III Analysis 159

13	Die Standardlösungsverfahren für Polynomgleichungen	161
-----------	---	------------

13.1	Lineare Gleichungen	161
13.2	Quadratische Gleichungen	162
13.3	Gleichungen dritten und vierten Grades	164
13.4	Weitere Lösungsverfahren für Spezialfälle	164
13.4.1	n -te Wurzeln	164
13.4.2	Biquadratische Gleichung	165
13.4.3	Andere durch Substitution lösbare Gleichungen	166
13.4.4	Ein Spezialfall des Wurzelziehens	166
13.4.5	Binom-Gleichungen	167
13.4.6	Gradreduzierung durch Ausklammern	168
13.4.7	Gradreduzierung durch Polynomdivision	168
13.5	Seltene Lösungsmethoden und Approximationen	170
13.5.1	Methode des Quadrat-Extrems	170
13.5.2	Die Newton-Iteration	170
13.5.3	Regula falsi	172
13.5.4	Das allseits beliebte Raten	173
13.5.5	Das „höhere Raten“	175
13.5.6	Symmetrische Koeffizienten	176
13.6	Abschluss	177
14	Die Beziehungen von Sinus und Cosinus	179
14.1	Additionstheoreme	179
14.2	Multiplikationstheoreme	183
14.3	Theoreme zu doppelten und halben Winkeln	185
14.4	Theoreme mit Arcus-Funktionen	187
14.5	Alternative Herleitungen mit komplexen Zahlen	188
14.5.1	Additionstheoreme	188
14.5.2	Weitere Beziehungen	189
15	Doppelintegrale	191
15.1	Einführung	191
15.2	Doppelintegral über einem Rechteck	192
15.3	Doppelintegral über einem allgemeineren Bereich	196
15.4	Eigenschaften und Mittelwertsätze	200
15.5	Koordinatentransformation	202
15.6	Polarkoordinaten	205
16	Kurvenintegrale	209
16.1	Begriffe und Definitionen	209
16.2	Kurvenlänge	210
16.3	Kurvenintegral bezüglich der Bogenlänge	212
16.4	Kurvenintegral über ein Vektorfeld	213
16.5	Eigenschaften der Kurvenintegrale	216
16.6	Kurvenintegrale über Gradientenfeldern	217

17	Oberflächenintegrale	219
17.1	Einführung	219
17.2	Oberflächeninhalt	221
17.3	Oberflächenintegrale einer skalaren Funktion	224
17.4	Flussintegrale	226
18	Differentialgleichungen	231
18.1	Einführung	231
18.2	Klassifikation vor der Lösung	232
18.3	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	233
18.3.1	Homogene Gleichung	234
18.3.2	Inhomogene Gleichung	234
18.4	Die Probe machen	236
18.5	Nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung	237
18.5.1	Trennung der Veränderlichen	237
18.5.2	Substitution	238
18.5.3	Bernoulli-Differentialgleichung	241
18.5.4	Riccati-Differentialgleichung	242
18.5.5	Exakte Differentialgleichung	244
18.5.6	Integrierender Faktor (Eulerscher Multiplikator)	246
18.5.7	Parametrisierung	249
18.5.8	Clairaut-Differentialgleichung	251
18.5.9	d'Alembert-Differentialgleichung	252
18.6	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung	253
18.6.1	Konstante Koeffizienten	253
18.6.2	Eulersche Differentialgleichung	258
19	Die Sätze von Heine-Borel, Bolzano-Weierstraß und Montel	261
19.1	Vorbereitungen	261
19.2	Kompaktheit in normierten Räumen	263
19.3	Der Satz von Montel	264
19.4	Abschluss	269
IV	Ausblick auf Weiteres	271
20	Eulers Berechnungen der Zetafunktion	273
21	Die Riemannsche Vermutung	277
21.1	Die Riemannsche Zetafunktion	278
21.1.1	Meromorphe Fortsetzung	279
21.1.2	Die Nullstellen	280
21.1.3	Die Vermutung	282
21.2	Die Primzahlfunktion	283
21.2.1	Die Eulersche Produktentwicklung	283
21.2.2	Die Primzahlfunktion	284

21.2.3 Die Jagd auf die Schwelle	287
21.2.4 Die Beweisideen	287
22 Das Kugelwunder	291
22.1 Einleitung	291
22.2 Die freie Gruppe mit zwei Erzeugern	292
22.3 Paradoxe Zerlegung einer löchrigen Sphäre	297
22.4 Von der löchrigen Sphäre zur Vollkugel	301
22.5 Abschluss	304
23 Geometrie in der Teetasse	307
Literaturverzeichnis	313