

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b> .....	v
----------------------	---

<b>I Beweise und Beweistechnik</b>	1
<b>1 Was ist Mathematik?</b> .....	3
<b>1.1 Ausgewählte Antworten</b> .....	4
<b>1.2 Zusammenfassung</b> .....	7
<b>1.3 Empfehlenswerte Bücher</b> .....	8
<b>2 Mathematisch für Anfänger</b> .....	11
<b>2.1 Lektion 1: Vom Wort zum Satz</b> .....	12
<b>2.2 Lektion 2: Universelles Vokabular</b> .....	16
<b>2.3 Lektion 3: Prädikate</b> .....	18
<b>2.4 Lektion 4: Konjunktionen (Überleitungen)</b> .....	19
<b>2.5 Lektion 5: Schlussworte, Schlusspunkte</b> .....	21
<b>3 Beweise, immer nur Beweise</b> .....	23
<b>3.1 Beweisen lernen</b> .....	23
<b>3.2 Der Zweck der Übungen</b> .....	24
<b>3.3 Unterscheide wahr und falsch</b> .....	24
<b>3.4 Einige Gebote und Verbote</b> .....	24
<b>3.5 Mathematik ist Struktur</b> .....	25
<b>3.6 Mathematik für und durch die Praxis</b> .....	26
<b>3.7 Und wie lernt man beweisen?</b> .....	26
<b>4 Die Beweisverfahren</b> .....	27
<b>4.1 Der direkte Beweis</b> .....	27
<b>4.1.1 Einfache Zahlentheorie</b> .....	27
<b>4.1.2 Aussagenlogik</b> .....	29
<b>4.1.3 Gesetze der Aussagenlogik</b> .....	31
<b>4.1.4 Mengenlehre</b> .....	32
<b>4.1.5 Fakultät und Binomialkoeffizient</b> .....	33
<b>4.2 Der indirekte Beweis</b> .....	35
<b>4.2.1 Wurzel aus 2 ist nicht rational</b> .....	35
<b>4.2.2 Es gibt unendlich viele Primzahlen</b> .....	36
<b>4.3 Der konstruktive Beweis</b> .....	37
<b>4.3.1 Nullstelle einer Funktion</b> .....	37
<b>5 Das Prinzip der vollständigen Induktion</b> .....	39
<b>5.1 Wer hat die vollständige Induktion erfunden?</b> .....	40
<b>5.2 Ist Induktion nur für Folgen und Reihen?</b> .....	41
<b>5.3 Wie funktioniert die vollständige Induktion?</b> .....	41
<b>5.4 Kann man sich auf die vollständige Induktion verlassen?</b> .....	43
<b>5.5 Kann man wirklich den Induktionsschluss unendlich oft anwenden?</b> .....	44

5.6	Kann man Induktion immer anwenden? .....	45
5.7	Induktion ist nicht geeignet, wenn .....	46
5.8	Was ist schwer an der vollständigen Induktion? .....	46
5.9	Anwendungen der vollständigen Induktion .....	47
5.9.1	Geometrie .....	47
5.9.2	Mengenlehre .....	49
5.9.3	Binomialkoeffizienten .....	50
5.9.4	Geometrisches und arithmetisches Mittel .....	51
5.9.5	Summenformeln .....	53
5.9.6	Abschätzungen .....	56
5.9.7	Teilbarkeit .....	57
5.9.8	Zahlentheorie .....	57
5.9.9	Rekursiv definierte Folgen .....	58
5.9.10	Eindeutigkeitsbeweis .....	59
5.10	Zum Schluss .....	60
<b>6</b>	<b>Der unendliche Abstieg</b> .....	61
6.1	Einführung .....	61
6.2	$\sqrt{2}$ ist irrational .....	62
6.2.1	Das übliche Verfahren .....	62
6.2.2	$\sqrt{2}$ ist irrational mit unendlichem Abstieg .....	62
6.2.3	Ist auch $\sqrt{9}$ irrational? .....	63
6.2.4	Ist die Wurzel aus 5 irrational? .....	64
6.2.5	Die Wurzel einer Nicht-Quadratzahl ist irrational .....	64
6.3	Inkommensurable Längen im Fünfeck .....	65
<b>7</b>	<b>Über das Auswahlaxiom</b> .....	67
7.1	Das Auswahlproblem .....	67
7.2	Das Auswahlaxiom .....	68
7.3	Wohlordnung .....	69
7.4	Lemma von Zorn .....	71
7.5	Äquivalenz der Aussagen .....	73
<b>II</b>	<b>Lineare Algebra</b>	77
<b>8</b>	<b>Lineare Algebra für absolute Anfänger</b> .....	79
8.1	Einführung .....	79
8.2	Vektorräume .....	80
8.3	Untervektorräume .....	85
8.4	Lineare Unabhängigkeit .....	89
8.5	Schluss .....	91
<b>9</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b> .....	93
9.1	Einführung .....	93
9.2	Lineare Gleichungssysteme: Was ist das? .....	93

9.2.1	Einführendes Beispiel . . . . .	93
9.2.2	Definitionen . . . . .	95
9.2.3	Darstellung mit Matrizen . . . . .	96
9.3	Lösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	97
9.3.1	Der Gaußsche Algorithmus . . . . .	97
9.3.2	Beispiel 1: Eindeutige Lösung . . . . .	101
9.3.3	Beispiel 2: Keine Lösung . . . . .	104
9.3.4	Beispiel 3: Unendlich viele Lösungen . . . . .	106
9.4	Rangbestimmung einer Matrix . . . . .	109
<b>10</b>	<b>Lineare Abbildungen und ihre darstellenden Matrizen</b> . . . . .	111
10.1	Einführung . . . . .	111
10.2	Lineare Abbildungen . . . . .	112
10.3	Bild und Kern einer linearen Abbildung . . . . .	113
10.4	Dimensionsformel und weitere Eigenschaften . . . . .	115
10.5	Lineare Abbildung am Beispiel . . . . .	116
10.6	Darstellungen linearer Abbildungen am Beispiel . . . . .	117
10.7	Darstellungsmatrizen linearer Abbildungen . . . . .	118
10.8	Berechnung einer Darstellungsmatrix am Beispiel . . . . .	120
10.9	Abilden mit einer darstellenden Matrix . . . . .	123
10.10	Beispiel zum Basiswechsel . . . . .	124
<b>11</b>	<b>Determinante: Was ist das?</b> . . . . .	127
11.1	Einführung . . . . .	127
11.2	Determinante: Was ist das? . . . . .	128
11.3	Spezialfälle . . . . .	129
11.3.1	Der Fall $n = 1$ . . . . .	129
11.3.2	Der Fall $n = 2$ . . . . .	130
11.3.3	Der Fall $n = 3$ . . . . .	133
11.4	Der allgemeine Fall . . . . .	136
11.5	Praktische Berechnung von Determinanten . . . . .	141
11.5.1	Der Gaußsche Algorithmus . . . . .	141
11.5.2	Die Laplacesche Entwicklungsformel . . . . .	143
<b>12</b>	<b>Diagonalisierbarkeit: Was ist das?</b> . . . . .	145
12.1	Einführung . . . . .	145
12.2	Diagonalisierbarkeit: Was ist das? . . . . .	145
12.3	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	146
12.4	Eigenwerte und Eigenvektoren am Beispiel . . . . .	151
12.5	Diagonalisierbarkeitskriterien . . . . .	152
12.6	Eine praktische Anwendung . . . . .	156
<b>III</b>	<b>Analysis</b>	<b>159</b>
<b>13</b>	<b>Die Standardlösungsverfahren für Polynomgleichungen</b> . . . . .	161

13.1	Lineare Gleichungen .....	161
13.2	Quadratische Gleichungen .....	162
13.3	Gleichungen dritten und vierten Grades .....	164
13.4	Weitere Lösungsverfahren für Spezialfälle .....	164
13.4.1	$n$ -te Wurzeln .....	164
13.4.2	Biquadratische Gleichung .....	165
13.4.3	Andere durch Substitution lösbarer Gleichungen .....	166
13.4.4	Ein Spezialfall des Wurzelziehens .....	166
13.4.5	Binom-Gleichungen .....	167
13.4.6	Gradreduzierung durch Ausklammern .....	168
13.4.7	Gradreduzierung durch Polynomdivision .....	168
13.5	Seltene Lösungsmethoden und Approximationen .....	170
13.5.1	Methode des Quadrat-Extrems .....	170
13.5.2	Die Newton-Iteration .....	170
13.5.3	Regula falsi .....	172
13.5.4	Das allseits beliebte Raten .....	173
13.5.5	Das „höhere Raten“ .....	175
13.5.6	Symmetrische Koeffizienten .....	176
13.6	Abschluss .....	177
<b>14</b>	<b>Die Beziehungen von Sinus und Cosinus .....</b>	<b>179</b>
14.1	Additionstheoreme .....	179
14.2	Multiplikationstheoreme .....	183
14.3	Theoreme zu doppelten und halben Winkeln .....	185
14.4	Theoreme mit Arcus-Funktionen .....	187
14.5	Alternative Herleitungen mit komplexen Zahlen .....	188
14.5.1	Additionstheoreme .....	188
14.5.2	Weitere Beziehungen .....	189
<b>15</b>	<b>Doppelintegrale .....</b>	<b>191</b>
15.1	Einführung .....	191
15.2	Doppelintegral über einem Rechteck .....	192
15.3	Doppelintegral über einem allgemeineren Bereich .....	196
15.4	Eigenschaften und Mittelwertsätze .....	200
15.5	Koordinatentransformation .....	202
15.6	Polarkoordinaten .....	205
<b>16</b>	<b>Kurvenintegrale .....</b>	<b>209</b>
16.1	Begriffe und Definitionen .....	209
16.2	Kurvenlänge .....	210
16.3	Kurvenintegral bezüglich der Bogenlänge .....	212
16.4	Kurvenintegral über ein Vektorfeld .....	213
16.5	Eigenschaften der Kurvenintegrale .....	216
16.6	Kurvenintegrale über Gradientenfeldern .....	217

<b>17 Oberflächenintegrale</b> .....	219
17.1 Einführung .....	219
17.2 Oberflächeninhalt .....	221
17.3 Oberflächenintegrale einer skalaren Funktion .....	224
17.4 Flussintegrale .....	226
<b>18 Differentialgleichungen</b> .....	231
18.1 Einführung .....	231
18.2 Klassifikation vor der Lösung .....	232
18.3 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung .....	233
18.3.1 Homogene Gleichung .....	234
18.3.2 Inhomogene Gleichung .....	234
18.4 Die Probe machen .....	236
18.5 Nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung .....	237
18.5.1 Trennung der Veränderlichen .....	237
18.5.2 Substitution .....	238
18.5.3 Bernoulli-Differentialgleichung .....	241
18.5.4 Riccati-Differentialgleichung .....	242
18.5.5 Exakte Differentialgleichung .....	244
18.5.6 Integrierender Faktor (Eulerscher Multiplikator) .....	246
18.5.7 Parametrisierung .....	249
18.5.8 Clairaut-Differentialgleichung .....	251
18.5.9 d'Alembert-Differentialgleichung .....	252
18.6 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung .....	253
18.6.1 Konstante Koeffizienten .....	253
18.6.2 Eulersche Differentialgleichung .....	258
<b>19 Die Sätze von Heine-Borel, Bolzano-Weierstraß und Montel</b> .....	261
19.1 Vorbereitungen .....	261
19.2 Kompaktheit in normierten Räumen .....	263
19.3 Der Satz von Montel .....	264
19.4 Abschluss .....	269
<b>IV Ausblick auf Weiteres</b> .....	271
<b>20 Eulers Berechnungen der Zetafunktion</b> .....	273
<b>21 Die Riemannsche Vermutung</b> .....	277
21.1 Die Riemannsche Zetafunktion .....	278
21.1.1 Meromorphe Fortsetzung .....	279
21.1.2 Die Nullstellen .....	280
21.1.3 Die Vermutung .....	282
21.2 Die Primzahlfunktion .....	283
21.2.1 Die Eulersche Produktentwicklung .....	283
21.2.2 Die Primzahlfunktion .....	284

21.2.3 Die Jagd auf die Schwelle .....	287
21.2.4 Die Beweisideen .....	287
<b>22 Das Kugelwunder .....</b>	<b>291</b>
22.1 Einleitung .....	291
22.2 Die freie Gruppe mit zwei Erzeugern .....	292
22.3 Paradoxe Zerlegung einer löchrigen Sphäre .....	297
22.4 Von der löchrigen Sphäre zur Vollkugel .....	301
22.5 Abschluss .....	304
<b>23 Geometrie in der Teetasse .....</b>	<b>307</b>
<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>313</b>