

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	XIII
I Die Bruchrechnung – ein Auslaufmodell?	1
1 Einige Argumente gegen die Bruchrechnung mit gemeinen Brüchen ..	1
1.1 Irrelevanz für das tägliche Leben	1
1.2 Relikt aus längst vergangenen Zeiten	2
1.3 Bequeme Spielwiese für Lehrer	2
1.4 Mehr Zeit für Dezimalbrüche	2
1.5 Zwei Schreibweisen für Bruchzahlen?	2
1.6 Brüche – nur ein Selektionsinstrument?	3
2 Einige Argumente zur Notwendigkeit der Bruchrechnung mit gemei- nen Brüchen	3
2.1 Brüche und die anschauliche Fundierung der Dezimalbruch- rechnung	3
2.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung ohne Bruchrechnung?	5
2.3 Bruchrechnung und Gleichungslehre	7
2.4 Zahlbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}^+$	8
2.5 Bruchrechnung und Algebra	10
3 Resümee	10
II Konzepte zur Behandlung der Bruchrechnung	13
1 Das Größenkonzept	14
2 Das Operatorkonzept	15
3 Das Gleichungskonzept	19
4 Das Äquivalenzklassenkonzept	20
5 Resümee	22
III Bruchrechnung	23
1 Neue Trends in der Bruchrechnung	23
2 PALMA – ein überraschendes Ergebnis	25
3 Grundvorstellungsumbrüche in der Bruchrechnung	26
4 Zur Einführung der Bruchzahlen	27
4.1 Anschauliche Vorkenntnisse	27
4.2 Komplexität der Bruchzahlen	28
4.2.1 Bruchzahlaspekte	29
4.2.2 Schreibweisen	31
4.2.3 Repräsentationsarten	32
4.3 Teil vom Ganzen – zwei Grundvorstellungen	32
4.3.1 Teil eines Ganzen	33
4.3.2 Teil mehrerer Ganzer	36
4.3.3 Gleichwertigkeit beider Grundvorstellungen	38
4.3.4 Kenntnis beider Grundvorstellungen	39

4.4	Repräsentant und Bruch	40
4.5	Eine Größe – verschiedene konkrete Brüche	42
4.6	Einführung der Bruchzahlen	43
4.7	Einbettung der natürlichen Zahlen	44
4.8	Grundvorstellungsumbrüche gegenüber den natürlichen Zahlen	45
5	Erweitern/Kürzen	46
5.1	Anschauliche Vorkenntnisse	46
5.2	Gleichwertige Brüche – anschauliche Zugangswege	48
5.3	Erweitern – systematische Behandlung	52
5.4	Kürzen – systematische Behandlung	54
5.5	Mögliche Problembereiche	56
6	Größenvergleich	57
6.1	Anschauliche Vorkenntnisse	57
6.2	Anschauliche Wege zum Größenvergleich	59
6.3	Systematische Behandlung	63
6.4	Grundvorstellungsumbrüche beim Größenvergleich	65
6.5	Mögliche Problembereiche	66
6.6	Vertiefung	68
7	Addition	70
7.1	Anschauliche Vorkenntnisse	71
7.2	Anschauliche Wege zur Addition	72
7.3	Systematische Behandlung	75
7.4	Gemischte Zahlen	77
7.5	Schwierigkeitsfaktoren	78
7.6	Mögliche Problembereiche	79
7.6.1	Vorbemerkungen	79
7.6.2	Abfolge im Schwierigkeitsgrad – ein Überblick	80
7.6.3	Rechengraphen – ein effizientes Werkzeug	81
7.6.4	Bruch plus Bruch	82
7.6.5	Kombinierter Fall (Bruch und natürliche Zahl)	83
7.6.6	Ein Rechengraph zur Aufgabe $\frac{4}{7} + 2$	84
7.6.7	Anschauliche Vorstellungen – oft Fehlanzeige	86
7.6.8	Additionskalkül und Grundvorstellungen	87
7.7	Vorbeugung/Förderarbeit	87
7.8	Vertiefung	89
8	Subtraktion	91
8.1	Anschauliche Vorkenntnisse	91
8.2	Anschauliche Wege zur Subtraktion	93
8.3	Systematische Behandlung	93
8.4	Gemischte Zahlen	94
8.5	Schwierigkeitsfaktoren	95
8.6	Mögliche Problembereiche	95
8.6.1	Abfolge im Schwierigkeitsgrad – ein Überblick	95

8.6.2	Bruch minus Bruch	96
8.6.3	Kombinierter Fall (Natürliche Zahl minus Bruch)	96
8.7	Vorbeugung/Förderarbeit	98
8.8	Vertiefung	98
9	Multiplikation	99
9.1	Anschauliche Vorkenntnisse	99
9.2	Anschauliche Wege zur Multiplikation	102
9.3	Natürliche Zahl mal Bruch – systematische Behandlung	105
9.4	Bruch mal natürliche Zahl – systematische Behandlung	105
9.5	Bruch mal Bruch – systematische Behandlung	106
9.5.1	Von-Ansatz	106
9.5.2	Gleichungsketten	109
9.5.3	Flächeninhalt	109
9.5.4	Bewertung	110
9.6	Grundvorstellungsumbrüche beim Multiplizieren	113
9.7	Mögliche Problembereiche	114
9.7.1	Abfolge im Schwierigkeitsgrad – ein Überblick	114
9.7.2	Multiplikation gleichnamiger Brüche	115
9.7.3	Multiplikation ungleichnamiger Brüche	115
9.7.4	Natürliche Zahl mal Bruch/Bruch mal natürliche Zahl	116
9.7.5	Multiplikation gemischter Zahlen	117
9.7.6	Regelformulierung und Begründung	118
9.7.7	Über Probleme der rechnerischen Umsetzung bei Von-Situationen	119
9.8	Vorbeugung/Förderarbeit	119
9.9	Vertiefung	120
10	Division	121
10.1	Anschauliche Vorkenntnisse	122
10.2	Anschauliche Wege zur Division	124
10.3	Bruch durch natürliche Zahl – systematische Behandlung	129
10.4	Bruch durch Bruch/Natürliche Zahl durch Bruch – systematische Behandlung	130
10.4.1	Messen	131
10.4.2	Umkehroperation	132
10.4.3	Gleichungsketten	135
10.4.4	Doppelbrüche	136
10.4.5	Bewertung	137
10.5	Natürliche Zahl durch natürliche Zahl	139
10.6	Grundvorstellungsumbrüche bei der Division	140
10.7	Mögliche Problembereiche	142
10.7.1	Abfolge im Schwierigkeitsgrad – ein Überblick	142
10.7.2	Bruch durch Bruch	143
10.7.3	Bruch durch natürliche Zahl/ Natürliche Zahl durch Bruch . . .	144

10.7.4	Natürliche Zahl durch natürliche Zahl	145
10.7.5	Regelformulierung und Begründung	145
10.7.6	Division von Brüchen und praktische Anwendungen	146
10.8	Vorbeugung/Förderarbeit	146
10.9	Vertiefung	147
11	Brüche und natürliche Zahlen – viele Gemeinsamkeiten, aber auch starke Umbrüche in den Grundvorstellungen	150
12	Resümee/Konsequenzen	152
12.1	Grundvorstellungsumbrüche beim Übergang von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Q}^+$ – oft vernachlässigt	152
12.2	Überschätzung von Vorkenntnissen	152
12.3	Ungenügende Erarbeitung anschaulicher Grundvorstellungen	153
12.4	Gründliche Thematisierung der Einbettung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}^+$ erforderlichlich	153
12.5	Rechenregeln gründlicher und anschaulicher begründen	154
12.6	Mathematikdidaktische Kompetenz steigern	155
12.7	Dominanz der syntaktischen Ebene gezielt reduzieren	155
12.8	Konsequenzen	156
IV	Dezimalbruchrechnung	159
1	Neue Trends in der Dezimalbruchrechnung	159
2	Dezimalbrüche – überzeugende Vorteile	160
3	Unterrichtserfolge in der Dezimalbruchrechnung – krasse Unterschiede	161
4	Grundvorstellungsumbrüche in der Dezimalbruchrechnung	163
5	Einführung endlicher Dezimalbrüche	164
5.1	Sprechweise	164
5.2	Weitere Vorkenntnisse	166
5.3	Erweiterung des Stellenwertsystems	166
5.3.1	Genügend Zeit investieren	167
5.3.2	Vorsicht mit Analogien	167
5.3.3	Zehnerblöcke	167
5.3.4	Lineare Arithmetikblöcke	168
5.3.5	Zahlenstrahl/Stellenwerttafel	168
5.3.6	Stellenwerttafeln – sehr hilfreich	169
5.3.7	Charakteristika der Erweiterung	170
5.3.8	Vielseitige und variationsreiche Aufgaben	170
5.4	Lokale und globale Sichtweise von Dezimalbrüchen	171
5.5	Mögliche Problembereiche	172
5.5.1	Kommazahlen in der Grundschule	173
5.5.2	Anschauliche Vorstellungen	173
5.5.3	Zwei Sichtweisen bei Dezimalbrüchen	174
5.5.4	Stellenwertverständnis	175
5.6	Resümee	176

6	Erweitern, Kürzen und Einbetten	178
6.1	Wege zum Erweitern und Kürzen	178
6.2	Mögliche Problembereiche	179
7	Größenvergleich	180
7.1	Wege zum Größenvergleich	180
7.2	Mögliche Problembereiche	181
7.2.1	Aufgabentypen zur Analyse von Fehlerstrategien	181
7.2.2	Fehlerstrategien	182
7.2.3	Einige Konsequenzen	185
8	Zusammenhang von gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen	186
8.1	Endliche Dezimalbrüche	186
8.1.1	Umformung durch Erweitern/Kürzen	187
8.1.2	Umformung durch Division	187
8.2	Periodische Dezimalbrüche	188
8.3	Mögliche Problembereiche	192
8.4	Gemeine Brüche und Dezimalbrüche – zwei verschiedene Welten?	194
9	Runden und Überschlagen	195
10	Addition	197
10.1	Wege zur Addition	197
10.1.1	Größen	197
10.1.2	Stellenwerttafeln	198
10.1.3	Kommaverschiebungsregeln	199
10.1.4	Zehnerbrüche	199
10.2	Schwierigkeitsgrad/Vergleich mit den Brüchen	201
10.3	Mögliche Problembereiche	202
10.3.1	Addition von Dezimalbrüchen	202
10.3.2	Kombinierter Fall (Dezimalbrüche und natürliche Zahlen)	202
10.3.3	KT-Strategie	203
10.3.4	Regelkenntnis	203
10.4	Größen als Hilfe?	204
10.5	Abfolge Brüche/Dezimalbrüche	204
11	Subtraktion	204
11.1	Wege zur Subtraktion	204
11.2	Schwierigkeitsgrad/Vergleich mit den Brüchen	206
11.3	Mögliche Problembereiche	206
11.3.1	Subtraktion von Dezimalbrüchen	206
11.3.2	Kombinierter Fall (Dezimalbrüche und natürliche Zahlen)	207
11.3.3	KT-Strategie bei der Subtraktion	207
11.3.4	Regelkenntnis	208
11.4	Größen als Hilfe?	208
11.5	Abfolge Brüche/Dezimalbrüche	209
12	Multiplikation	209
12.1	Wege zur Multiplikation mit Zehnerpotenzen	209

12.2	Wege zur Multiplikation mit natürlichen Zahlen	211
12.2.1	Stellenwerttafeln/quasikardinaler Aspekt	211
12.2.2	Größen	212
12.2.3	Wiederholte Addition	212
12.3	Wege zur Multiplikation mit Dezimalbrüchen	212
12.3.1	Zehnerbrüche	212
12.3.2	Kommaverschiebungsregel	214
12.3.3	Größen	214
12.4	Grundvorstellungsumbrüche beim Multiplizieren	215
12.5	Schwierigkeitsgrad/Vergleich mit den Brüchen	216
12.6	Mögliche Problembereiche	217
12.6.1	Multiplikation von Dezimalbrüchen mit natürlichen Zahlen . . .	217
12.6.2	Multiplikation von Dezimalbrüchen mit Dezimalbrüchen	218
12.6.3	KT-Fehler bei der Multiplikation	219
12.6.4	Regelkenntnis	219
12.7	Überschlagsrechnungen	220
12.8	Abfolge Brüche/Dezimalbrüche	220
13	Division	220
13.1	Wege zur Division durch Zehnerpotenzen	220
13.2	Wege zur Division durch natürliche Zahlen	221
13.2.1	Zehnerbrüche	221
13.2.2	Erweiterung des Divisionskalküls mithilfe von Stellenwerttafeln	222
13.3	Wege zur Division durch Dezimalbrüche	224
13.3.1	Zehnerbrüche	224
13.3.2	Kommaverschiebungsregel	225
13.4	Grundvorstellungsumbrüche beim Dividieren	227
13.5	Schwierigkeitsgrad/Vergleich mit den Brüchen	227
13.6	Mögliche Problembereiche	229
13.6.1	Division von natürlichen Zahlen durch Zehnerpotenzen	229
13.6.2	Division von Dezimalbrüchen durch natürliche Zahlen	229
13.6.3	Division von natürlichen Zahlen durch Dezimalbrüche	230
13.6.4	Division von Dezimalbrüchen durch Dezimalbrüche	231
13.6.5	KT-Fehler bei der Division	232
13.6.6	Regelkenntnis und -begründung	232
13.7	Kontexte/Größen als Lösungshilfe?	233
13.8	Überschlagsrechnungen	233
13.9	Abfolge Brüche/Dezimalbrüche	234
14	Konzepte zur Behandlung der Dezimalbruchrechnung – ein Rückblick	235
14.1	Größenkonzept	235
14.2	Zehnerbrüchekonzept	235
14.3	Stellenwertkonzept	236
14.4	Kommaverschiebungskonzept	237
14.5	Dezimalbruchlehrgänge als Mischkonzepte	238

15	Resümee und Konsequenzen	238
15.1	Grundvorstellungsumbrüche – sorgfältig thematisieren	238
15.2	Vorkenntnisse realistisch einschätzen	239
15.3	Vorarbeiten mit Größen in Klasse 5 deutlich intensivieren	239
15.4	Anschauliche Grundvorstellungen des Dezimalbruchbegriffs gründlich erarbeiten	240
15.5	Dominanz der KT-Strategie erfolgreich bekämpfen	240
15.6	Rechenregeln sorgfältig anschaulich begründen	241
15.7	Überschlagsrechnungen stärker betonen und gezielt erarbeiten ..	242
15.8	Mathematischdidaktische Kompetenz weiter steigern	242
V	Ausblick	245
1	Neue Trends	245
2	Curriculare Konsequenzen	247
2.1	Anschauliche Grundvorstellungen zu Brüchen und Dezimal- brüchen in Klasse 5 legen	247
2.2	Anschauliche Grundvorstellungen für einfache Rechenoperationen in Klasse 5 erarbeiten	248
2.3	Der systematische Bruchrechenlehrgang	249
3	Mathematikdidaktische Kompetenz deutlich steigern	252
	Diagnostische Tests	255
	Literaturverzeichnis	257