

HANSER



Leseprobe

zu

Das Spiegelei im Höhenrausch

von Norbert Kämmer

Print-ISBN: 978-3-446-48078-0

E-Book-ISBN: 978-3-446-48265-4

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446480780>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München



Vorwort

Dieses Buch ist eine Sammlung von Alltagsphänomenen, die mir bei verschiedenen Gelegenheiten begegnet sind und deren physikalischer Hintergrund sich mir nicht spontan erschlossen hat. Sie haben mein Interesse so sehr geweckt, dass ich mich eines Tages hinsetzte, um das Problem in angemessenen technischen Begriffen zu beschreiben und zu versuchen, eine analytische Lösung zu finden. Im Laufe der vielen Jahre meiner Arbeit als Maschinenbauingenieur ist mir bewusstgeworden, dass ich die Welt um mich herum wohl durch eine spezielle Brille betrachte, indem ich Dinge sehe, die uns sehr vertraut scheinen, mich aber dann trotzdem frage: „Warum ist das so?“

Ich finde, diese Sichtweise sollte man sich als angehender Ingenieur oder angehende Ingenieurin generell zu eigen machen. Schließlich ist es quasi unser „Tagesgeschäft“ Zustände und Veränderungen modellhaft zu beschreiben. Man ist auf analytisches Denken getrimmt, um den Untersuchungsgegenstand in seine Einzelwirkungen zerlegen und auf das Wesentliche reduzieren zu können. Und diese Art des Denkens muss sich nicht ausschließlich in abstrakten mathematischen Schwergewichtsübungen manifestieren, wie sie nur allzu oft mit dem Maschinenbaustudium verbunden werden. Nein, auch etwas gedankliche Gymnastik und Leichtathletik mit Problemen des Alltags sind durchaus erlaubt.

Das Spannende daran ist, dass sich gelegentlich hinter solchen Alltagsphänomenen durchaus komplexe Zusammenhänge verbergen. Es hat natürlich Freude gemacht, diese mit den Werkzeugen zu bearbeiten, die mir in meinem Maschinenbaustudium vermittelt worden sind. Allein die Erfahrung, dass mit diesen technischen Grundfähigkeiten Erscheinungen aus meiner unmittelbaren – manchmal auch etwas speziellen – Umgebung beschrieben und analysiert werden können und damit ein tieferer Einblick in diese gewonnen werden kann, hat die Mühe dieser Modellierungsanstrengungen gelohnt. Ich hoffe, dass meine Freude und Befriedigung darüber bei der Lektüre der einzelnen Kapitel erkennbar wird und sich auf Sie überträgt, egal ob Sie nun

Studierender oder Schüler:in im MINT-Bereich sind oder versuchen, anderen diese Themen in der Lehre nahezubringen. Ich meine, an erster Stelle steht Neugier und Begeisterung, der Rest ergibt sich von selbst.

Das Buch ist so aufgebaut, dass ich die Situation oder die Umstände beschreibe, in denen das Problem meine Aufmerksamkeit erregt hat. Dann folgt die genaue Definition des Problems und die Lösung, die ich erarbeiten konnte. Dazu gehört auch das Risiko, dass meine Analyse Fehler, Ungenauigkeiten und unzulässige Vereinfachungen enthält – damit kann ich leben.

In ihrer ursprünglichen und etwas kürzeren Version ist diese Sammlung von technischen Modellierungen entstanden als Abschiedsgeschenk an meine früheren Kollegen und Mitarbeiter in einem internationalen Industrieunternehmen aus Anlass meines Ausscheidens aus dem Berufsleben. Damit habe ich mich bedankt für viele spannende, engagierte und kontroverse Diskussionen, die wir zu technischen Problemstellungen geführt haben.

Norbert Kämmer

April 2024



Physiker:innen und Ingenieur:innen formen sich ihr Weltbild mithilfe der Mathematik. Sie entwickeln und verwenden Gleichungen, mit denen sich Zustände und Veränderungen modellhaft beschreiben lassen. Das erfordert analytisches Denken, denn der Untersuchungsgegenstand muss in seine Einzelwirkungen zerlegt und auf Wesentliches reduziert werden. Das vorliegende Buch ist eine unterhaltsame Lehrstunde, um sich diese Fähigkeit spielerisch anzueignen. Das Besondere daran sind die Beispiele aus dem Alltag, die eindrücklich zeigen, dass man im Grunde jedes physikalisch-technische Problem mathematisch modellieren kann.



Inhalt

Vorwort	V
1 Das Schwingvogelproblem	1
2 Xiaogengs Windturbinen-Problem	11
3 Das Pool-Springer-Problem	25
4 Das Winterreifenproblem	31
5 Das Regenproblem	39
6 Das Problem des Bier-Eingießens	45
7 Das Problem des Eierkochens	51
8 Das Problem des Bergsteigens	55
9 Das Loos-Gauge-Problem	61
10 Das Toilettenpapierproblem	71
11 Das Problem des geschichteten Balkens	77
12 Das Problem des Sonnenuntergangs	83
13 Das Problem des sprudelnden Wassers	91
14 Das Problem der Windturbine mit variabler Drehzahl	99

15	Das Problem der Mittagssonne in Bogota	111
16	Das Problem des zu großen Schraubenschlüssels.....	115
17	Das Seiltänzer-Problem	121

1

Das Schwingvogelproblem

Meine erste Erinnerung an den Schwingvogel (ein Name, den ich diesem spielzeugähnlichen Gerät gegeben habe) reicht viele Jahre zurück, als wir noch in Homburg/Saar lebten und wir einen unserer Söhne zum Kinderarzt bringen mussten. Im Wartezimmer des Arztes hing ein Schwingvogel von der Decke und ich habe vielleicht sogar damit gespielt, als mir die Frage in den Sinn kam, was die Eigenfrequenz des Vogels sei. Die Frage war aber nicht stark genug, um mich wirklich dazu zu bringen, mich damit zu befassen.



Viele Jahre später besuchten wir das Haus meines Schwagers, als wir einige Zeit in Bogota, Kolumbien, verbrachten. Dort hing wieder ein solcher Gegenstand zur Dekoration an der Decke, und die frühere Begegnung mit diesem Spielzeug kam mir wieder in den Sinn. Angesichts der zusätzlichen Zeit, die ich während unseres Urlaubs in Kolumbien hatte, begann ich, dieses Gerät zu analysieren und versuchte, die Eigenfrequenz zu berechnen. Ich unternahm mehrere Versuche, die nicht wirklich erfolgreich waren, und legte es mehrmals beiseite. Aber ich sah diese Schwingvögel nun an mehreren Orten, in Spielzeuggläden und dergleichen, und jedes Mal, wenn ich sie sah, erinnerten sie mich an dieses ungelöste Problem. Schließlich war dieses Gefühl einer unvollendeten Aufgabe zu stark und ich setzte mich ernsthaft hin und erstellte die Analyse, die auf den folgenden Seiten wiedergegeben wird.

Problemstellung

Bestimmen Sie die Eigenfrequenz des schwingenden Vogels.

Analyse

F_s – Kraft in der Tragschnur

F_j – Kraft im Gelenk zwischen Vogel und Flügel

g – Schwerkraftkonstante

G_b – Gewicht des Vogels

G_w – Gewicht des Flügels

H_s – Länge der Tragschnur

H_{eqv} – Länge des äquivalenten Pendels

J_w – Trägheitsmoment des Flügels

L_s – Abstand der Tragschnur vom Gelenk

L_w – Abstand der Flügelmasse vom Gelenk

L_B – Länge des Trennstegs

m_b – Masse des Vogels

m_w – Masse des Flügels

T – Periodendauer der Vogelbewegung

T_{eqv} – Periodendauer des äquivalenten Pendels

α – Neigungswinkel des Flügels gegen die Horizontale

γ – Winkel der Tragschnur gegen die Senkrechte

λ – Längenverhältnis

μ – Massenverhältnis

Indizes:

x – in x-Richtung

y – in y-Richtung

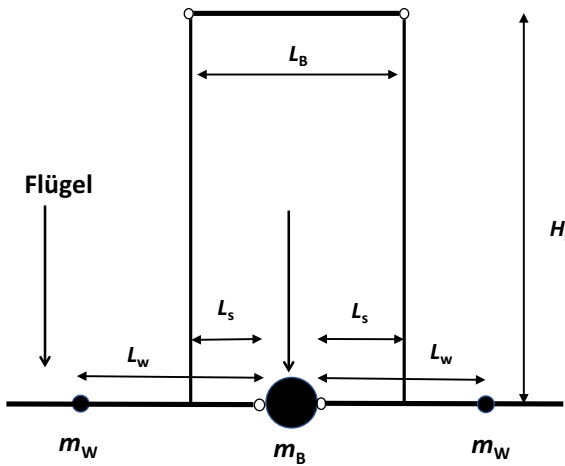


Bild 1.1 Geometrie des schwingenden Vogels

Die Geometrie des Schwingvogels ist in Bild 1.1 dargestellt, wobei die folgenden Annahmen getroffen wurden: Die Masse des Flügels m_w ist in seinem Schwerpunkt konzentriert, was nicht nur bedeutet, dass die Schwerkraft in diesem Zentrum wirkt, sondern auch das Trägheitsmoment des Flügels wird mit dieser konzentrierten Masse berechnet. Außerdem sind die Tragschnüre so angebracht, dass beide Flügel in der Ruhelage des Schaukels entlang einer horizontalen Achse ausgerichtet sind. Wären die Tragschnüre an einer anderen Stelle an den Flügeln befestigt, wäre die Gleichgewichtslage eine andere, was sich auf das Schwingungsverhalten auswirken kann. Dies wird in dieser Analyse nicht berücksichtigt.

Zunächst wird die Kraft in einer Tragschnur F_s und der Abstand der Schnur von der Verbindung zwischen Flügel und Körper L_s für die Gleichgewichtslage, d. h. die horizontale Position, aus Bild 1.2 berechnet.

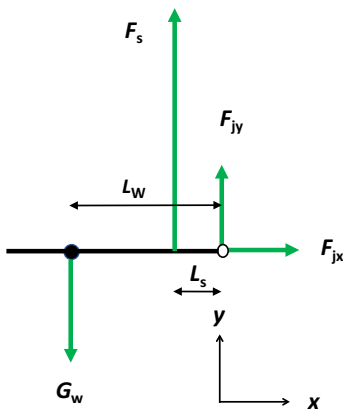


Bild 1.2 Kräfte am Flügel

Aus der Summierung der Kräfte in y-Richtung ergibt sich

$$F_S = G_W + \frac{1}{2} \cdot G_B = g \cdot \left(m_W + \frac{1}{2} \cdot m_B \right) \quad (1.1)$$

und aus der Summierung der Drehmomente der Abstand L_S

$$L_S = \frac{G_W \cdot L_W}{G_W + \frac{1}{2} \cdot G_B} \quad (1.2)$$

mit

$$F_{jy} = -\frac{1}{2} \cdot G_B \quad (1.3)$$

Als Nächstes soll mithilfe von Bild 1.3 die Beziehung zwischen dem Neigungswinkel des Flügels α und dem Winkel γ einer Tragschnur gegen die Vertikale ermittelt werden.

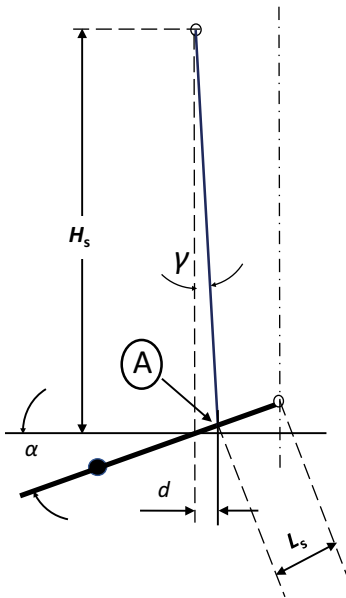


Bild 1.3 Beziehung zwischen dem Neigungswinkel α und dem Winkel γ der Tragschnur

Für die Länge d kann man schreiben

$$d = H_S \cdot \sin(\gamma) = L_S \cdot (1 - \cos(\alpha)) \quad (1.4)$$

Damit ist γ als Funktion von α

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{L_S}{H_S} \cdot (1 - \cos(\alpha))\right) \quad (1.5)$$

Die Bewegungsgleichung lässt sich aus der Summierung der Kräfte und des Drehmoments eines Flügels ableiten, wie im Freikörperdiagramm (Bild 1.4) in der gekippten Stellung dargestellt ist.

Die Summierung der Drehmomente um Punkt A ergibt

$$m_W \cdot g \cdot (L_W - L_S) \cdot \cos(\alpha) + F_{jy} \cdot L_S \cdot \cos(\alpha) - F_{jx} \cdot L_S \cdot \sin(\alpha) = J_W \cdot \ddot{\alpha} \quad (1.6)$$

Das Trägheitsmoment des Flügels um die Position A beträgt dabei

$$J_W = m_W \cdot (L_W - L_S)^2 \quad (1.7)$$

Summierung der Kräfte in x-Richtung:

$$-F_S \cdot \sin(\gamma) + F_{jx} = 0 \quad (1.8)$$

Summierung der Kräfte in y-Richtung:

$$F_S \cdot \cos(\gamma) - g \cdot m_W + F_{jy} = 0 \quad (1.9)$$

Mit diesen Formeln wird nur die Massenträgheit des Flügels in Bezug auf seine Rotationsbewegung berücksichtigt, während die Flügelbewegung in x- und in y-Richtung vernachlässigt wird, da diese beiden Bewegungen als vernachlässigbar angesehen werden. Daher werden in Formel 1.8 und Formel 1.9 keine Massenträgheitsterme eingeführt.

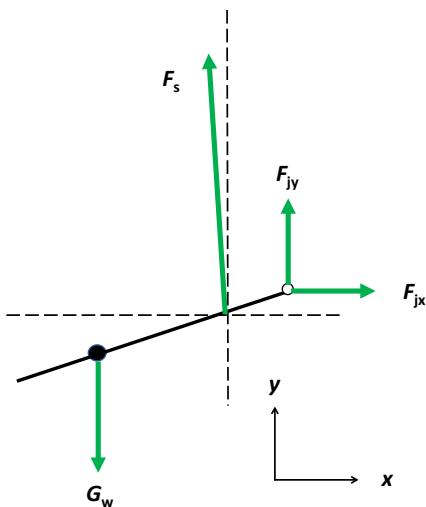


Bild 1.4 Freikörper-Diagramm des Flügels

Die Gelenkkraft F_{jy} wird aus der Bewegungsgleichung des Vogels mithilfe von Bild 1.4 ermittelt.

Für die Bewegung in y-Richtung kann man schreiben:

$$-2 \cdot F_{jy} - m_B \cdot g = m_B \cdot \ddot{y} \quad (1.10)$$

Und so ergibt sich

$$F_{jy} = -\frac{1}{2} \cdot m_B \cdot (g + \ddot{y}) \quad (1.11)$$

Für die Position des Gelenks kann man schreiben

$$y = L_S \cdot \sin(\alpha) \approx L_S \cdot \alpha \quad (1.12)$$

Und deshalb gilt

$$\ddot{y} = L_S \cdot \ddot{\alpha} \quad (1.13)$$

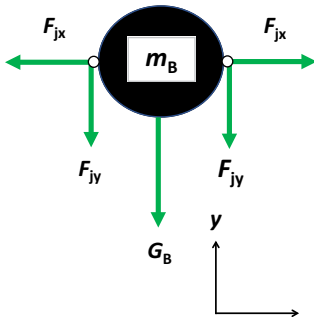


Bild 1.5 Freikörper-Diagramm des Vogels

Nun werden die Kräfte im Gelenk wie folgt ermittelt

$$F_{jy} = -\frac{1}{2} \cdot m_B \cdot (g + L_S \cdot \ddot{\alpha}) \quad (1.14)$$

und aus Formel 1.8 erhält man

$$F_{jx} = F_S \cdot \sin(\gamma) \quad (1.15)$$

Kombiniert man die obigen Formeln und löst Formel 1.7 für die zweite Ableitung des Neigungswinkels α , so erhält man

$$\ddot{\alpha} = -\frac{F_S \cdot L_S \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha)}{J_W + 0,5 \cdot m_B \cdot L_S^2} \quad (1.16)$$

Mit Einführung des Massenverhältnisses μ und des Längenverhältnisses λ

$$\mu = m_W / m_B \quad (1.17)$$

$$\lambda = L_W / L_S \quad (1.18)$$

sowie unter Anwendung von Formel 1.1 kann dies weiter verdichtet werden zu

$$\ddot{\alpha} = -g/L_S \cdot \frac{(\mu + 0,5)}{\mu \cdot (\lambda - 1)^2 + 0,5} \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \quad (1.19)$$

Mit einer Linearisierung von α für kleine Winkel ($\sin(\alpha) \approx \alpha$) sieht diese Form ähnlich aus wie die bekannte Bewegungsgleichung eines Pendels. Aber da der Tragschnurwinkel γ eine Funktion von α ist, ist diese Formel insofern anders, als der Koeffizient von α eine Funktion von α selbst ist. Daher kann Formel 1.16 nur numerisch gelöst werden. Bild 1.6 zeigt eine solche Lösung für einen willkürlich gewählten Satz von Parametern.

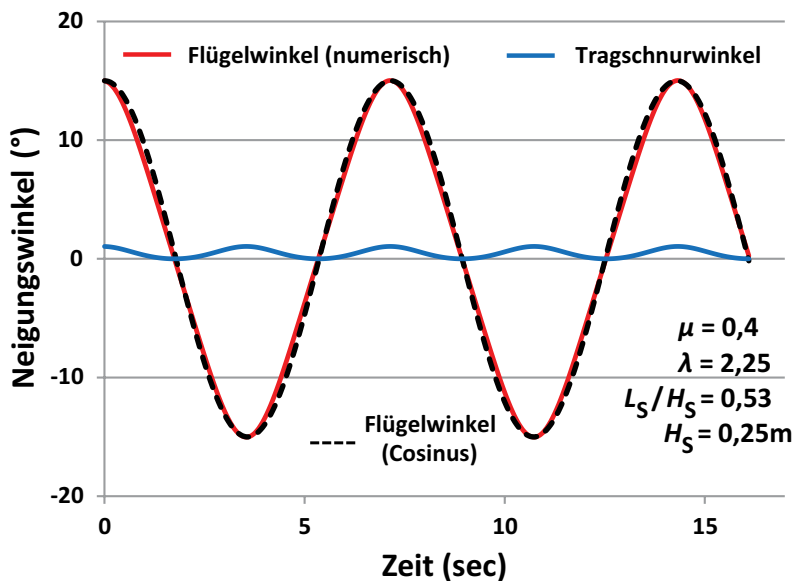


Bild 1.6 Zeitlicher Verlauf des Flügelwinkels α und des Tragschnurwinkels γ

Die Bewegung des schwingenden Vogels (gekennzeichnet durch den Flügelwinkel, siehe durchgezogene rote Linie) ist eine harmonische Bewegung, die einer reinen Sinuskurve sehr nahekommt. Die gestrichelte schwarze Linie ist die Kosinus-Funktion mit der gleichen Amplitude und Frequenz wie das Ergebnis der numerischen Integration von Formel 1.19.

Die Auslenkung der Tragschnur aus der Senkrechten – der Winkel γ ist sehr klein – und natürlich immer positiv und schwingt mit einer Frequenz, die doppelt so hoch ist wie die der Flügelneigung.

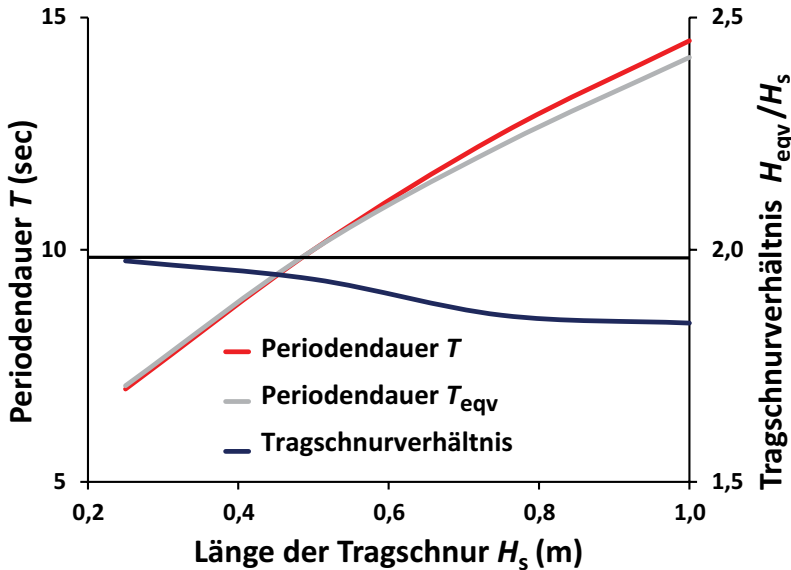


Bild 1.7 Schwingungsdauer T in Abhängigkeit von der Länge der Tragschnur H_s

Bild 1.7 zeigt, wie sich die Schwingungsdauer T (oder die Schwingungsfrequenz) mit der Länge des Tragseils ändert, wobei die anderen Parameter mit denen in Bild 1.6 identisch sind. Wie zu vermuten ist, schwingt der Vogel langsamer, wenn die Länge der Schnur H_{st} größer wird, weil der Winkel γ bei gleicher Flügelneigung kleiner wird und somit das von der Horizontalkraft F_{jx} erzeugte Rückstellmoment kleiner wird. In Bild 1.7 ist auch die Schwingungsdauer T_{eqv} eines äquivalenten Pendels dargestellt. Es wird angenommen, dass dieses äquivalente Pendel mit der gleichen Frequenz schwingen würde wie der Schwingvogel bei $H_{st} = 0,5$ m. Die Änderung der Schwingungsperiode T_{eqv} ist so dargestellt, wie sie sich mit der Länge der Schnur ändern würde. Es gibt einen kleinen, aber erkennbaren Unterschied in der Schwingung zwischen dem Schwingvogel und dem Pendel: Der Vogel schwingt mit einer niedrigeren Frequenz (größeres T) als das Pendel, wenn die Tragseile um den gleichen Betrag erhöht würden.

Der letzte Vergleich zwischen einem Schwingvogel und einem Pendel kann durch die Berechnung der Länge H_{eqv} der Schnur eines äquivalenten Pendels erfolgen. Dieses ist ein Pendel, das mit der gleichen Frequenz (oder der gleichen Schwingungsdauer T) schwingt wie der Vogel. Dieses in Bild 1.7 gezeigte Verhältnis liegt nahe, aber nicht exakt bei zwei, und es variiert auch mit der Länge der Stützschnur. Aber im Wesentlichen besagt Bild 1.7, dass der Schwingvogel ungefähr mit der Frequenz eines normalen Pendels schwingt, dessen Länge etwa doppelt so groß ist wie die Tragschnüre des eigentlichen Schwingvogels.

Ergebnisdiskussion

Die Analyse zeigt, dass die Bewegung des Schwingvogels sehr ähnlich ist der eines einfachen Pendels, bei dem eine Pendelmasse an einer masselosen Schnur hängt. Allerdings schwingt er mit einer Frequenz, die der eines Pendels mit etwa der doppelten Schnurlänge entspricht. Bei einem einfachen Pendel ist die Bewegung unabhängig von der Masse (weil die Trägheits- und die Rückstellkräfte beide proportional zur Masse sind), während bei der Vogelschaukel die Masse selbst keinen Einfluss hat, wohl aber das Massenverhältnis m_w zu m_b , siehe Formel 1.19. Beim Schwingvogel wird die Rückstellkraft durch das Drehmoment erzeugt, das sich aus der horizontalen Kraft im Gelenk ergibt und proportional zur Masse des Flügels und des Vogels ist. Aber auch die Trägheit des Flügels trägt dazu bei, sodass sich der Einfluss der Masse wie bei einem Pendel aufhebt.

Ohne eine gesonderte Analyse und rein argumentativ kann man absehen, was passieren würde, wenn die Tragschnur des Schwingvogels in einer Position platziert würde, in der der Abstand L_s größer oder kleiner ist als der aus Formel 1.2 berechnete Wert. Angenommen, L_s wäre größer, so ergäbe sich eine neue Gleichgewichtsposition, in der sich der Vogel mit seiner Masse m_b nicht mehr auf der Verbindungslinie der beiden Flügelmassen m_w befindet, sondern darunter liegt, was zu einem positiven Winkel γ führt. Dementsprechend wäre die horizontale Kraft im Gelenk höher, sodass ein höheres Rückstellmoment am Flügel die Schwingungsfrequenz effektiv erhöhen würde. Derselbe Effekt ließe sich erzielen, wenn man das Tragseil in die richtige Gleichgewichtslage bringt, aber mit einem längeren Trennstab. Die Gleichgewichtslage wäre immer noch eine horizontale Gerade, aber der Vogel würde mit einer höheren Frequenz schwingen.

Es bleibt dem interessierten Leser überlassen, Berechnungen mit solchen unterschiedlichen Geometrien durchzuführen.

