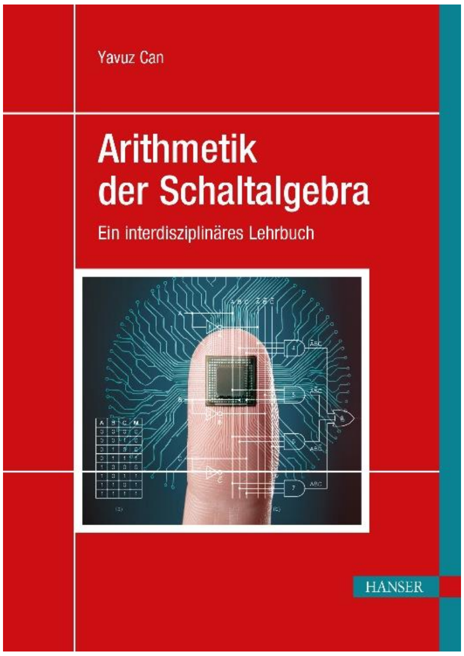
HANSER



Leseprobe

zu

Arithmetik der Schaltalgebra

von Yavuz Can

Print-ISBN: 978-3-446-48247-0
E-Book-ISBN: 978-3-446-48295-1

Weitere Informationen und Bestellungen unter
https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446482470
sowie im Buchhandel

Vorwort

Die Boolesche Algebra beinhaltet die Schaltalgebra, jedoch beinhaltet die Schaltalgebra nicht die Boolesche Algebra. Daher sah ich hier die Notwendigkeit, ein Buch zu verfassen, in dem zum ersten Mal die Schaltalgebra arithmetisch behandelt wird. Dabei werden die Grundoperationsarten wie Verunden, Verodern, Negieren und Differenzbildung in Abhängigkeit der Basisformen mathematisch mithilfe von Beispielen und unterstützenden Abbildungen ausführlich erklärt. Damit soll für unterschiedliche Disziplinen, wie z.B. Informatik, Elektrotechnik und auch der Mathematik, eine gemeinsame Literatur zur Verfügung gestellt werden. Darüber hinaus wird damit bezweckt, Begriffe aus der Schaltalgebra, die von unterschiedlichen Disziplinen unterschiedlich bezeichnet werden, auf eine gemeinsame einheitliche Begriffsnutzung hinzuführen.

Hinzu kommt die Vorstellung von sechs Basisformen der Schaltalgebra. Dabei werden auch Methoden zum Resolvieren von Funktionen in Abhängigkeit von ihrer Form vermittelt. Daneben wird der Schwerpunkt des Buches auch auf die neue Verknüpfungstechnik der orthogonalisierenden Differenzbildung gelegt. Mit ihrem Einsatz wird die klassische Problematik der Orthogonalisierung aus der Booleschen Algebra gelöst. Zuletzt liegt eine weitere Besonderheit darin, dass einzelne Gleichungen entweder innerhalb der Kapitel oder im Anhang mithilfe von mathematischen Beweisen auf ihre Allgemeingültigkeit bewiesen werden. Die aufgeführten mathematischen Gleichungen werden größtenteils auch mit Beispielen erläutert. Dabei kommen auch Abbildungen wie das Karnaugh-Veitch-Diagramm zum besseren Verständnis als unterstützende Visualisierungswerkzeuge zum Einsatz.

Das Lehrbuch richtet sich auch an diejenigen, deren Anwendungen z.B. in der Digitaltechnik, der Zuverlässigkeitsanalyse, der Kryptologie, der Spieltheorie u.a. liegen. Es ermöglicht, aus den aufgeführten Gleichungen gleichwertige Algorithmen in jeder Programmiersprache zu implementieren und dadurch gewisse Boolesche Handlungen rechnertechnisch zu behandeln.

Darüber hinaus bin ich davon überzeugt, dass im Bereich der Schaltalgebra noch weitere neue Gleichungen entwickelt werden können. Denn ich bin der Meinung, dass in diesem Themenfeld die Untersuchung der Grundlagen noch nicht vollendet ist und hier noch Potential besteht, mathematisch vorzudringen.

Meine Absicht besteht zusätzlich auch darin, dem Leser einen unkomplizierten Eintritt in die Welt der schaltalgebraischen Arithmetik zu verschaffen und dabei eine einfache zu verstehende Beschreibung der Thematik zu liefern.

Danksagung

Lob gebührt dem Allwissenden, der uns die Möglichkeit gibt, neues Wissen und Erkenntnis generieren zu dürfen, dem ich für die mir gegebene Kraft und das Durchhaltevermögen, derer ich bedurfte, um dieses Schriftwerk verfassen zu dürfen, danke.

An dieser Stelle möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dieter Bochmann (*https://de.wikipedia.org/wiki/Dieter_Bochmann*) bedanken, der mich in seinen E-Mails motiviert und mir einige seltene Schriften zur Booleschen Thematik aus seiner privaten Sammlung zugesandt hat.

Dr. Yavuz Can im Juni 2024

Inhalt

TEIL I

Theoretische Grundlagen

1 Algebraische Strukturen

1.1 Was ist eine Menge?

Unter einer Menge ist die Zusammenfassung unterschiedlicher Objekte, die Elemente genannt werden, zu verstehen. Dabei geht es um die Fragestellung, welche Elemente in einer Menge enthalten sind. Eine Menge ohne Elemente bzw. ohne Inhalt wird als **leere** Menge bezeichnet. Neben den aufzählenden Formen einer Menge, wie z.B. $\mathbb{M}_1 = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ gibt es auch die beschreibende Form, wie z.B. $\mathbb{M} = \{x \mid x \text{ ist Ziffer im Monat}\}$.

Die elementaren Zahlenmengen beinhalten eine fest definierte Menge an Zahlen und sind aufeinander aufbauend, d.h. dass jede Zahlenmenge in der nächstgrößeren Zahlenmenge vollkommen enthalten ist. Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Die Abstufung einer Menge ist in folgenden Bereichen dargestellt (Bild 1.1).

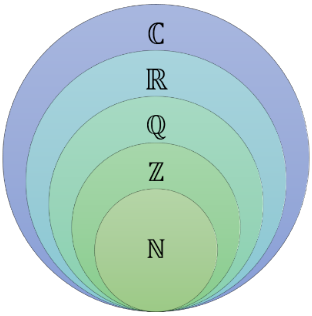


Bild 1.1 Zahlenmengen

Mit Verknüpfungen von Mengen (Tabelle 1.1) werden algebraische Strukturen aufgebaut, um mathematische Problemstellungen lösen zu können.

Tabelle 1.1 Klassifizierung der Zahlenmengen

Klassifizierung der Zahlenmengen	
Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$:	$\mathbb{M} = \{1, 2, 3, \ldots, \infty\}$
Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$:	$\mathbb{M} = \{-\infty, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, \infty\}$
Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$:	Darstellung von Brüchen, die im Nenner und im Zähler ganze Zahlen enthalten.
Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$:	umfasst sowohl rationale als auch irrationale Zahlen, die nicht-periodische Dezimalbrüche mit unendlichen vielen Nachkommastellen sind.
Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$:	umfasst alle Zahlen der Form $a + b \cdot i$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und i eine imaginäre Zahl ist, für die $i^2 = -1$ gilt.

1.2 Verknüpfungsgebilde

Definition 1.1. (Verknüpfungsgebilde VG)
Ein Verknüpfungsgebilde ist eine nicht leere Menge $\mathbb{M}$ mit einer auf ihr definierten Verknüpfung ($\circ$ oder $*$). Durch eine Verknüpfung $\circ$ auf die Menge $\mathbb{M}$ wird jedem geordneten Paar $(a, b) \in \mathbb{M} \times \mathbb{M}$ ein Element $a \circ b \in \mathbb{M}$ zugeordnet.

Dazu wird direkt ein Beispiel gegeben, um die Definition zu erläutern. Man betrachte die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, \infty\}$ und nehme dazu die Verknüpfung der Addition (+). Dabei wird überprüft, ob ein Verknüpfungsgebilde bei dieser Konstellation vorliegt. Dazu die folgenden Beispiele:

$$1 + 2 = 3 \quad \checkmark \text{(ok)}$$
$$2 + 3 = 5 \quad \checkmark \text{(ok)}$$

Aus den Beispielen heraus ist zu entnehmen, dass die Verknüpfung der Elemente wieder zu einem Element aus derselbigen Menge, hier $\mathbb{N}$, führt. Daher liegt hier ein Verknüpfungsgebilde vor, d.h $\mathbb{N}$ verknüpft mit der Addition (+), also $(\mathbb{N}, +)$.

Hätte man dagegen die Verknüpfung auf Division (:) gewählt, so wäre $(\mathbb{N}, :)$ kein Verknüpfungsgebilde, da der Quotient zweier Elemente aus $\mathbb{N}$ nicht immer ein Element aus $\mathbb{N}$ als Resultat hervorbringt. Wenn kein Verknüpfungsgebilde vorliegt, so existiert auch keine Gruppe, sprich algebraische Struktur. Damit lässt sich allgemein ausdrücken, dass ein Verknüpfungsgebilde dann vorliegt, wenn durch die Verknüpfung der Elemente aus der vorliegenden Menge wieder ein Element resultiert, das dieser vorliegenden Menge zuzuordnen ist, wie z.B. $(\mathbb{N}, +)$ oder $(\mathbb{N}, \cdot)$. Diese Eigenschaft wird unter anderem auch als Abgeschlossenheit bezeichnet.

Im folgenden Unterkapitel werden unterschiedliche Eigenschaften von Verknüpfungsgebilden aufgeführt. In Abhängigkeit der Zuordnung dieser Eigenschaft eines Verknüpfungsgebildes ist es unter gewissen algebraischen Strukturen einzugliedern. Dazu aber in einem späteren Unterkapitel mehr.

1.2.1 Kommutativität

Hier soll die Frage beantwortet werden, wann ein Verknüpfungsgebilde kommutativ ist. Kommutativ ist ein VG, wenn (für alle) $\forall a, b \in \mathbb{M}$ gilt:

$$a \circ b = b \circ a, \tag{1.1}$$

dann heißt das VG $(\mathbb{M}, \circ)$ kommutatives Verknüpfungsgebilde. Das bedeutet, unabhängig von der Reihenfolge der Verknüpfung resultiert immer dasselbe Ergebnis daraus.

1.2.2 Assoziativität

Ein Verknüpfungsgebilde ist assoziativ, wenn $\forall a, b, c \in \mathbb{M}$ gilt:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \tag{1.2}$$

dann heißt das VG $(\mathbb{M}, \circ)$ assoziatives Verknüpfungsgebilde. Das heißt, die Verknüpfung aus der Verknüpfung a und b mit c muss der Verknüpfung aus a und der Verknüpfung b und c entsprechen.

1.2.3 Distributivität

Ein Verknüpfungsgebilde $(\mathbb{M}, +, \circ)$ ist distributiv, wenn $\forall a, b, c \in \mathbb{M}$ mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\circ$ gilt:

$$(a + b) \circ c = a \circ c + b \circ c \tag{1.3}$$

bzw.

$$a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c \tag{1.4}$$

1.2.4 Neutrales Element

Bei einem Verknüpfungsgebilde $(\mathbb{M}, \circ)$ ist $n \in M$ ein neutrales Element, wenn $\forall a \in \mathbb{M}$ gilt:

$$a \circ n = n \circ a = a \tag{1.5}$$

Die Verknüpfung eines Elements a mit dem neutralen Element ergibt wieder das Element. Damit hat ein neutrales Element keine Auswirkungen auf die Verknüpfung. Liegt das neutrale Element vor der Verknüpfungsoperation, dann wird es als linksneutral bezeichnet. Von rechtsneutral ist die Rede, wenn das neutrale Element nach der Verknüpfungsoperation notiert ist:

$$\begin{aligned} n \circ a &= a \quad \text{(linksneutral)} \\ a \circ n &= a \quad \text{(rechtsneutral)} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Stichwortverzeichnis