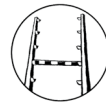


Zauberhafte Zahlenkarten – den Zaubertrick vorführen



Addition von natürlichen Zahlen
Zweiersystem / Binäres Zahlensystem



einfach bis mittel



20 Minuten



Die Schüler*innen

- trainieren das Kopfrechnen anhand der Addition natürlicher Zahlen.
- lernen die Darstellung von natürlichen Zahlen im binären System kennen.

Die Grundidee des Zaubertricks

Eine Person denkt an eine ganze Zahl zwischen 1 und 63. Der Clou: Sie können diese gedachte Zahl benennen!

Material

- sechs Zahlenkarten auf Pappkarton

Vorführung

- Sie sind der*die Zauberer*Zauberin.
- Zur Vorführung dieses Zaubertricks benötigen Sie die sechs Zahlenkarten auf Pappkarton.
- Prägen Sie sich die Zahlen in der linken oberen Ecke jeder einzelnen Karte gut ein. Das sind folgende Zahlen:
Karte I → 1 Karte II → 2 Karte III → 4 Karte IV → 8 Karte V → 16 Karte VI → 32
- Eine Person denkt an eine ganze Zahl zwischen 1 und 63.
Beispiel: 24
- Dieser Person geben Sie nacheinander die Zahlenkarten mit dem Auftrag, diejenigen Zahlenkarten zu behalten, auf dem sich ihre gedachte Zahl befindet. Die restlichen Karten legen Sie beiseite und werfen scheinbar nebensächlich einen Blick auf die Karten, welche die Person behalten hat.
Im Beispiel: Die Person behält die Zahlenkarten IV und V.
- Von den Zahlenkarten, die die Person nun behalten hat, addieren Sie die Zahlen aus der oberen linken Ecke. Das Ergebnis ist die Zahl, die sich die Person gemerkt hat.
Im Beispiel: Auf den Karten IV und V befinden sich die Zahlen 8 und 16 in der oberen linken Ecke. Die Addition lautet demnach: $8 + 16 = 24$

Mathematischer Hintergrund

Bei den in unserem Kunststück verwendeten Zahlen (1–63) handelt es sich um natürliche Zahlen. Diese lassen sich nicht nur im Dezimalsystem (zehn Ziffern), sondern auch im Binärsystem (zwei Ziffern), auch Zweiersystem genannt, darstellen. Das gilt selbstverständlich für alle natürlichen Zahlen.

Wenn Sie sich näher mit dem Binärsystem befassen wollen, so finden Sie in der einschlägigen Fachliteratur viele Abhandlungen dazu, wie z. B. o. A. (1995): Mathematik, Band 1. Weltbild Verlag Augsburg. S. 19ff.

Zur Darstellung im Binärsystem wählt man die Ergebnisse der Zweierpotenzen und addiert diese. So ist es möglich, jede Zahl des Dezimalsystems darzustellen. Für die Erklärung unseres Kunststückes reicht die Darstellung der Zahl von 1–63 im Zweiersystem, da nur Zahlen aus diesem Bereich in Betracht kommen. Selbstverständlich könnte man den Zahlenbereich beliebig erweitern, man müsste dann nur mehr Zahlenkarten anfertigen. Alle Zahlen von 1 bis 63 lassen sich aus der Summe folgender Zweierpotenzen darstellen:

$$2^0 = 1 \quad 2^1 = 2 \quad 2^2 = 4 \quad 2^3 = 8 \quad 2^4 = 16 \quad 2^5 = 32$$

Zauberhafte Zahlenkarten

Wie Sie erkennen, ist der Exponent vermehrt um 1 die Nummer der Karte (Exponent 0 + 1 – Karte 1; Exponent 1 + 1 – Karte 2; usw.) und das Ergebnis der Potenz ist die oben links auf der Zahlenkarte befindliche Zahl.

Die mit der Zahl 1 gekennzeichneten Zweierpotenzen werden addiert, die mit der Zahl Null werden weggelassen. So lässt sich z. B. die Zahl 24 im Binärsystem wie folgt darstellen:

$$24_{10} = \underset{\text{(Karte VI)}}{0 \cdot 2^5} + \underset{\text{(Karte V)}}{1 \cdot 2^4} + \underset{\text{(Karte IV)}}{1 \cdot 2^3} + \underset{\text{(Karte III)}}{0 \cdot 2^2} + \underset{\text{(Karte II)}}{0 \cdot 2^1} + \underset{\text{(Karte I)}}{0 \cdot 2^0} = 11\,000_2 \quad (\text{binär})$$

Auf den einzelnen Zahlenkarten sind jeweils diejenigen Zahlen vermerkt, die sich aus der jeweiligen Zweierpotenz zusammensetzen. Z. B. ist die Zahl 24 die Summe der Zweierpotenzen 2^3 und 2^4 . Somit befindet sich die Zahl 24 auf den Karten IV (Exponent 3 + 1) und V (Exponent 4 + 1), auf allen anderen nicht.

Durchführung im Unterricht

- Verteilen Sie Schere, Klebstoff, das Material und das Arbeitsblatt „Zauberhafte Zahlenkarten – dem Geheimnis auf der Spur“ an Zweierteams.
- Nur ein*e Schüler*in erhält das Material und das Arbeitsblatt, das er*sie ausschneidet und ggf. auf Pappkarton klebt.
- Diese*r Schüler*in führt den Zaubertrick vor, während der*die andere sich eine Zahl zwischen 1 und 63 denkt.
- Danach werden die Rollen getauscht.
- Im Anschluss können Sie den Zaubertrick auflösen.

Erwartungshorizont

- Die Schüler*innen kennen das Geheimnis des Zaubertricks.
- Sie können das Zauberkunststück selbständig vorführen.



Material

Karte I

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

Karte II

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63

Karte III

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

Karte IV

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63

Karte V

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

Karte VI

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

Hier lernst du ein Zauberkunststück kennen, bei dem du mithilfe von sechs Zahlenkarten eine Zahl von 1 bis 63 erraten kannst, die sich eine andere Person ausgedacht hat.

Vorbereitungen

1. Schneide die Zahlenkarten (**Material**) sauber aus und klebe diese auf Pappkarton!

2. Merke dir zu jeder Karte die obere linke Zahl!

Karte I → 1

Karte II → 2

Karte III → 4

Karte IV → 8

Karte V → 16

Karte VI → 32

Vorführung

1. Stelle deinem Mitspieler die Aufgabe, sich eine geheime Zahl zwischen 1 und 63 zu merken!

2. Gib ihm nacheinander die Zahlenkarten in der Reihenfolge von I bis VI!

3. Dein Mitspieler soll sich jede Karte genau ansehen und dir diejenigen Zahlenkarten zurückgeben, auf denen die gemerkte Zahl **nicht** steht.

4. Dadurch erhältst du Hinweise, auf welchen Zahlenkarten die gemerkte Zahl steht.

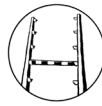
5. Addiere bei den Zahlenkarten, die der Mitspieler behalten hat, jeweils die Zahl, die oben links steht. Das Ergebnis ist die gesuchte Zahl.



Farbe einer Spielkarte erraten – den Zaubertrick vorführen



gerade und ungerade natürliche Zahlen



einfach



20 Minuten



Die Schüler*innen

- unterscheiden zwischen geraden und ungeraden natürlichen Zahlen.
- wenden ihr Wissen in einem Zaubertrick an.

Die Grundidee des Zaubertricks

Eine Person verdeckt eine von zehn schwarz/weißen Karten auf dem Tisch. Der Clou: Der*die Zauberer*Zauberin kann sofort sagen, welche Farbe die verdeckte Karte hat!

Material

- zehn Karten aus Pappkarton
- Scheren und Klebstoff

Vorführung

- Sie sind der*die Vorführende und legen nebeneinander zehn Karten aus Pappkarton auf den Tisch, die auf der einen Seite weiß und auf der anderen schwarz sind. Je fünf Karten liegen mit der weißen bzw. schwarzen Farbe nach oben.
- Sie drehen sich zur Tafel um.
- Eine Person soll nun hinter Ihrem Rücken eine beliebige Anzahl von beliebig ausgewählten Karten beliebig oft umdrehen. Bei jeder Drehung soll der Mitspieler jedoch die Farbe der Karte (schwarz oder weiß) nennen, welche umgedreht wird. Anschließend deckt die Person eine beliebige Karte mit der Hand zu.
- Sie zählen die Anzahl der Drehungen mit.
Beispiel: weiß – weiß – schwarz. Drei Karten wurden umgedreht.
- Schließlich wenden Sie sich wieder der Klasse zu und zählen die Anzahl der weißen bzw. schwarzen Karten auf dem Tisch.
Im Beispiel: Es liegen vier weiße und fünf schwarze Karten auf dem Tisch.
- **Die Anzahl der Drehungen ist gerade:** Die Farbe der verdeckten Karte ist diejenige, von der nur eine **gerade Anzahl** von Karten zu sehen ist.
Die Anzahl der Drehungen ist ungerade: Die Farbe der verdeckten Karte ist diejenige, von der nur eine **ungerade Anzahl** von Karten zu sehen ist.
Im Beispiel: Zu sehen sind vier weiße und fünf schwarze Karten. Die Farbe der verdeckten Karte ist schwarz.
- Sie überraschen die Schüler*innen mit der Aussage über die Farbe der verdeckten Karte.

Mathematischer Hintergrund

Die Anzahl der Drehungen entspricht der Anzahl der Aussprüche „weiß“ und „schwarz“. Bei einer ungeraden Anzahl von Drehungen müssen jeweils eine gerade Anzahl von weißen und eine gerade Anzahl von schwarzen Karten nach oben zeigen. Bei einer geraden Anzahl von Drehungen zeigen immer eine ungerade Anzahl von weißen und schwarzen Karten nach oben.

Farbe einer Spielkarte erraten

Zu Beginn der Vorführung befindet sich jeweils eine ungerade Anzahl m von Farbkärtchen jeder Farbe nach oben liegend auf dem Tisch, nämlich jeweils fünf weiße und fünf schwarze Karten ($m = 5$). Es gibt folglich eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $m = 2k + 1$ (für $m = 5$ ist $k = 2$).

Die Anzahl der Drehungen n sei gerade: Dann kommen zu den vorhandenen m Karten einer Farbe eine gerade Anzahl Karten derselben Farbe hinzu oder sie bleibt gleich (es passiert gar nichts oder eine Karte wird mehrmals geradzahlig umgedreht oder die Wechsel der Farbänderungen heben sich auf (die Anzahl Karten mit der anderen Farbe nimmt entsprechend ab), d.h. es gilt:

$$\begin{array}{ccccc} (2k + 1) & + & 2l & = & 2 \cdot (k + l) + 1 \\ m = 2k + 1 = \text{ungerade Anzahl jeder Farbe} & & 2l = \text{Anzahl der Farbwechsel} & & \text{ungerade Anzahl jeder Farbe} \end{array}$$

Am Ende zeigen jeweils eine ungerade Anzahl Karten jeder Farbe nach oben, weil die Gesamtzahl $2m$ der Karten gerade ist.

Beispiel: $m = 5, n = 4$: Das Verhältnis der Anzahl der schwarzen Karten zu der Anzahl der weißen Karten ist $5 : 5, 7 : 3, 3 : 7, 9 : 1, 1 : 9$.

Die Anzahl der Drehungen n sei ungerade: Dann kommen zu den vorhandenen m Karten einer Farbe eine ungerade Anzahl von Farben hinzu (nur eine Karte wird einmal oder mehrmals ungeradzahlig umgedreht oder die Wechsel der Farbänderungen ist ungeradzahlig), d.h. es gilt mit $1 \leq l \leq k, l + k \leq m - 1$:

$$\begin{array}{ccccc} (2k + 1) & + & 2l + 1 & = & 2 \cdot (k + l) + 2 \\ m = 2k + 1 = \text{ungerade Anzahl jeder Farbe} & & 2l + 1 = \text{Anzahl der Farbwechsel} & & \text{gerade Anzahl jeder Farbe} \end{array}$$

Am Ende zeigen jeweils eine gerade Anzahl Karten jeder Farbe nach oben, weil die Gesamtzahl $2m$ der Karten gerade ist. Im Grenzfall mit $m = n$, wobei z.B. alle schwarzen Karten Farbe umgedreht werden, zeigen alle Karten auf dem Tisch weiß, während schwarz nicht mehr vorkommt.

Beispiel: $m = 5, n = 5$: Das Verhältnis der Anzahl der schwarzen Karten zu der Anzahl der weißen Karten ist $10 : 0, 0 : 10, 8 : 2, 2 : 8, 6 : 4, 4 : 6$.

Durchführung im Unterricht:

- Führen Sie das Zauberkunststück zwei- bis dreimal in der Klasse vor.
- Anschließend teilen Sie das Arbeitsblatt an die Schüler*innen aus, die es in Zweierteams bearbeiten.
- Sie erfahren das Geheimnis des Zaubertricks und üben seine Durchführung.
- Sie geben Hinweise, was eine gerade bzw. ungerade natürliche Zahl ist bzw. welche Teilbarkeitsregel für die Zahl Zwei gilt.
- Sie fordern die Schüler*innen auf, den Zaubertrick vor der Klasse vorzuführen.
- Ergänzend fordern Sie die Schüler*innen (ab Klasse 9 für jeweils fünf Karten) auf, in einer Unterrichtsstunde die Begründung für das Gelingen des Zaubertricks zu finden.

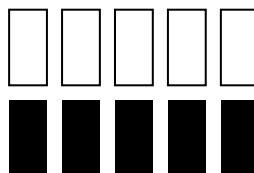
Erwartungshorizont

- Die Schüler*innen erkennen mithilfe der Vorführungen und des Arbeitsblattes das Geheimnis des Zaubertricks.
- Sie können das Zauberkunststück selbstständig vorführen.

Mithilfe dieser Kopiervorlage kannst du zehn Karten aus Pappkarton anfertigen, mit denen du einen tollen Zaubertrick vorführen kannst! Übe den Trick gut, bevor du ihn vorführst!

1. Schneide die Pappkarten aus und klebe diese so zusammen, dass jede Karte eine weiße und eine schwarze Seite hat.

2. Lege die Karten so auf den Tisch, dass fünf schwarze und fünf weiße Seiten oben liegen!



3. Ein Mitspieler soll dann beliebig viele Karten umdrehen und zwar so, dass du es nicht sehen kannst. Bei jeder Drehung soll er schwarz oder weiß sagen. Je nachdem welche Farbe die Karte, die er umdreht, hat.
4. Du zählst heimlich die Anzahl der Drehungen, wie oft dein Mitspieler „schwarz“ oder „weiß“ gesagt hat.
5. Dein Mitspieler soll dann eine Karte vollständig mit der Hand bedecken. Du siehst dir die übrigen neun Karten an und sollst auf magische Weise die Farbe der verdeckten Karte bestimmen!
6. Hat dein Mitspieler die Karten in einer ungeraden Anzahl (1, 3, 5, 7, ...) umgedreht, so müssten eine gerade Anzahl weißer und schwarzer Karten zu sehen sein. Die Farbe bei der das nicht so ist, ist diejenige, welche er verdeckt hält.
7. Hat dein Mitspieler die Karten in einer geraden Anzahl (2, 4, 6, 8, ...) umgedreht, so müssten eine ungerade Anzahl weißer und schwarzer Karten zu sehen sein. Die Farbe, bei der das nicht der Fall ist, ist diejenige, welche er verdeckt hält.

