

Vorwort / Hinweise

Das Buch wendet sich an Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 7 - 10. Es behandelt die wichtigsten Themen in dieser Phase des Schullebens.

Die behandelten Themen erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Dem ein oder anderen wird ein Thema fehlen oder ein Bereich zu wenig behandelt zu sein. In diesem Buch liegt der Schwerpunkt auf Rechenaufgaben. Theoretische Grundlagen werden in der Regel nicht in diesem Werk hergeleitet. Dies wird dem Unterricht in der Schule überlassen. Die wichtigsten Regeln und Gesetzmäßigkeiten werden jedoch zu Beginn jedes Kapitels vorgestellt.

Rein geometrische Themen wie Ähnlichkeit von Dreiecken, Winkelsätze oder Dreieckskonstruktionen wurden nicht behandelt. Ebenso verzichten wir auf das Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wir haben uns bemüht, einen Kompromiss zwischen Gesamtumfang und Wichtigkeit im Schulleben zu treffen. Dabei soll durch die Übungen das Basiswissen gefestigt werden. Für vertiefendes Spezialwissen wird auf themenbezogene Literatur verwiesen.

Die Themen können je nach Schulform und Bundesland in verschiedenen Jahrgängen behandelt werden. Sie stellen jedoch eine essenzielle Auswahl für eine gute Vorbereitung auf die Oberstufe oder zum Wiederholen des Stoffs eines Schuljahres dar.

Autor und Herausgeber übernehmen trotz sorgfältiger Prüfung keine Haftung oder Gewähr für eventuell fehlerhafte Inhalte.

Inhaltsverzeichnis

1	TERME AUFSTELLEN UND VEREINFACHEN	11
1.1	WAS SIND TERME?.....	11
1.2	WOZU BRAUCHT MAN TERME?	11
1.3	EINFACHE TERME ZUSAMMENFASSEN – ADDIEREN UND SUBTRAHIEREN	12
1.4	EINFACHE TERME ZUSAMMENFASSEN – MULTIPLIZIEREN UND DIVIDIEREN.....	13
1.5	ETWAS KOMPLIZIERTERE TERME ZUSAMMENFASSEN – KLAMMERN AUFLÖSEN.....	13
1.6	KOMPLIZIERTERE TERME ZUSAMMENFASSEN – KLAMMERN UND POTENZEN	14
1.7	TERME AUFSTELLEN AUS GRAFIKEN	15
1.8	TERME AUFSTELLEN IN PRAXISAUFGABEN	16
1.8.1	STREICHHÖLZER ZUSAMMENLEGEN	16
1.8.2	DIE QUADRATISCHE PIZZA – ECKSTÜCKE, RANDSTÜCKE UND INNENSTÜCKE	17
1.8.3	DAS PAKETSCHNURPROBLEM	17
2	GLEICHUNGEN LÖSEN.....	18
2.1	WARUM GLEICHUNGEN LÖSEN.....	18
2.2	SO LÖST MAN GLEICHUNGEN	19
2.3	AUFGABEN - EINFACHE FORM: NUR MULTIPLIKATION.....	20
2.4	AUFGABEN – EINFACHE FORM: NUR DIVISION	20
2.5	AUFGABEN - EINFACHE FORM: NUR ADDITION UND SUBTRAKTION.....	21
2.6	AUFGABEN - TERMUMFORMUNG I.....	21
2.7	AUFGABEN - TERMUMFORMUNG II	22
2.8	AUFGABEN - TERMUMFORMUNG III (MIT KLAMMERN).....	22
2.9	AUFGABEN – TEXTAUFGABEN ZAHLENRÄTSEL	23
2.10	TEXTAUFGABEN ALTERSRÄTSEL.....	24
2.11	MISCHUNGSAUFGABEN.....	24
2.12	BEWEGUNGSAUFGABEN	25
3	UNGLEICHUNGEN LÖSEN	26
3.1	EINFACHE UNGLEICHUNGEN OHNE NEGATIVE MULTIPLIKATION/DIVISION.....	27
3.2	EINFACHE UNGLEICHUNGEN MIT NEGATIVER MULTIPLIKATION/DIVISION.....	28

4	LINEARE FUNKTIONEN	30
4.1	DEFINITIONEN UND GRUNDLAGEN	30
4.1.1	DEFINITION	30
4.1.2	BESTIMMUNG DER STEIGUNG AUS DEN KOORDINATEN VON ZWEI PUNKTEN	30
4.1.3	SCHNITTPUNKT VON GERADEN BESTIMMEN	31
4.2	AUFGABEN: STEIGUNG UND Y-ACHSENABSCHNITT ERKENNEN	31
4.3	AUFGABEN: FUNKTIONEN RICHTIG ZEICHNEN	34
4.4	FUNKTIONSGLEICHUNG AUS PUNKT UND STEIGUNG (PUNKT-STEIGUNGSFORM)	34
4.5	FUNKTIONSGLEICHUNG AUS ZWEI PUNKTEN (ZWEIPUNKTEFORM)	34
4.6	WERTETABELLEN VON LINEAREN FUNKTIONEN	35
4.7	LINEARE FUNKTIONEN IN TEXTAUFGABEN	36
5	LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME	37
5.1	PRAKTISCHE ANWENDUNG / DEFINITIONEN	37
5.2	GRAFISCHE LÖSUNG	39
5.3	GLEICHSETZUNGSVERFAHREN	39
5.4	EINSETZUNGSVERFAHREN	40
5.5	ADDITIONSVERFAHREN	42
5.6	GEMISCHTE AUFGABEN	43
6	BINOMISCHE FORMELN	45
6.1	WIE KOMMT MAN ZU DEN BINOMISCHEN FORMELN	45
6.1.1	1. BINOMISCHE FORMEL	45
6.1.2	2. BINOMISCHE FORMEL	46
6.1.3	3. BINOMISCHE FORMEL	46
6.2	WOZU BRAUCHT MAN DIE BINOMISCHEN FORMELN?	47
6.3	EINFACHE AUFGABEN ZUR 1. BINOMISCHEN FORMEL	47
6.4	EINFACHE AUFGABEN ZUR 2. BINOMISCHEN FORMEL	48
6.5	EINFACHE AUFGABEN ZUR 3. BINOMISCHEN FORMEL	48
6.6	BINOMISCHE FORMELN GEMISCHT	49
6.7	NICHT IMMER SIND ES BINOMISCHE FORMELN!	49
6.8	FEHLER IN BINOMISCHEN FORMELN ERKENNEN	50
6.9	BINOMISCHE FORMELN RÜCKWÄRTS	50
6.10	GLEICHUNGEN MIT HILFE VON BINOMISCHEN FORMELN LÖSEN	51
6.11	NOCH MEHR BINOMISCHE FORMELN RÜCKWÄRTS	51

7	QUADRATISCHE TERME FAKTORISIEREN.....	52
7.1	AUSKLAMMERN BEI POLYNOMEN.....	52
7.2	FAKTORISIEREN MIT DEM SATZ VON VIETA.....	54
7.3	AUFGABEN – SCHNELL AUSMULTIPLIZIEREN MIT DEM SATZ VON VIETA	56
7.4	FAKTORISIEREN MIT DEM SATZ VON VIETA.....	57
7.5	QUADRATISCHE GLEICHUNGEN LÖSEN DURCH FAKTORISIEREN	57
7.6	GEMISCHTE AUFGABEN ZUM AUSMULTIPLIZIEREN UND FAKTORISIEREN.....	58
8	BRUCHTERME VEREINFACHEN	59
8.1	WAS SIND BRUCHTERME?	59
8.2	DIE DEFINITIONSMENGE.....	59
8.3	WOZU BRAUCHT MAN BRUCHTERME?	60
8.3.1	BRUCHTERME ALS GEBROCHEN RATIONALE FUNKTIONEN IN DER OBERSTUFE	61
8.4	WICHTIGE REGELN FÜR DAS VEREINFACHEN VON BRUCHTERMEN.....	62
8.5	AUFGABEN – ANWENDUNG VON AUSKLAMMERN.....	62
8.6	AUFGABEN – ANWENDUNG DER BINOMISCHEN FORMELN.....	63
8.7	AUFGABEN – ANWENDUNG VON FAKTORISIEREN	63
8.8	AUFGABEN – GEMISCHTE BRUCHTERME.....	64
9	WURZELN BERECHNEN	65
9.1	WARUM RECHNEN WIR MIT WURZELN?.....	65
9.2	EINFACHE WURZELN BERECHNEN.....	65
9.3	WURZELGESETZE.....	67
9.4	WURZELN VEREINFACHEN.....	68
9.5	WURZELTERME VEREINFACHEN	71
9.6	DER TERM x^2 UND DIE LÖSUNGEN	72
10	DER SATZ DES PYTHAGORAS	74
10.1	DER SATZ DES THALES – KOMMT NOCH VOR DEM SATZ DES PYTHAGORAS	74
10.2	DER SATZ DES PYTHAGORAS	75
10.3	HÖHENSATZ.....	78
10.4	KATHETENSATZ.....	79
10.5	GEMISCHTE AUFGABEN.....	81

11	POTENZEN MIT GANZZAHLIGEN EXPONENTEN	82
11.1	POTENZGESETZE	82
11.2	AUFGABEN ZU DEN POTENZGESETZEN	83
11.3	WISSENSCHAFTLICHE SCHREIBWEISE MIT ZEHNERPOTENZEN	86
12	PARABELN UND QUADRATISCHE FUNKTIONEN	88
12.1	DIE FUNKTIONSGLEICHUNG DER PARABELN $f(x) = a \cdot x^2$	89
12.1.1	WERTETABELLE DER NORMALPARABEL $f(x) = x^2$	89
12.2	PARABELSCHABLONEN ERSTELLEN	89
12.2.1	PARABELN ERKUNDEN MIT GEOGEBRA	90
12.3	VERSCHIEBUNG EINER PARABEL IN Y - RICHTUNG	91
12.3.1	PARABELN IN Y-RICHTUNG VERSCHIEBEN UND ZEICHNEN	91
12.3.2	PARABELN DER FORM $f(x) = a \cdot x^2 + c$ ERKENNEN	92
12.4	VERSCHIEBUNG EINER PARABEL IN X - RICHTUNG	95
12.5	DIE SCHEITELPUNKTFORM	96
12.6	DIE NORMALFORM	98
12.7	DIE QUADRATISCHE ERGÄNZUNG	98
12.8	NORMALFORM IN SCHEITELPUNKTFORM UMWANDELN	99
12.9	NORMALFORM MIT GEOGEBRA	100
12.10	DIE NULLSTELLENFORM EINER PARABEL	102
12.11	GEMISCHTE AUFGABEN	106
13	QUADRATISCHE GLEICHUNGEN LÖSEN	109
13.1	WARUM QUADRATISCHE GLEICHUNGEN LÖSEN?	109
13.2	LÖSUNGSVERFAHREN FÜR QUADRATISCHE GLEICHUNGEN	109
13.3	QUADRATISCHE GLEICHUNGEN DURCH AUSKLAMMERN LÖSEN	111
13.4	QUADRATISCHE GLEICHUNGEN DURCH FAKTORISIEREN LÖSEN	111
13.5	QUADRATISCHE GLEICHUNGEN MIT QUADRATISCHER ERGÄNZUNG LÖSEN	111
13.6	QUADRATISCHE GLEICHUNGEN MIT DER P-Q-FORMEL LÖSEN	112
13.7	GEMISCHTE AUFGABEN	113
13.8	QUADRATISCHE GLEICHUNGEN MIT TERMUMFORMUNG	113
13.9	QUADRATISCHE GLEICHUNGEN: SCHNITTPUNKTE VON FUNKTIONSGRAPHEN	114

14	TRIGONOMETRIE	117
14.1	SINUS UND KOSINUS IM EINHEITSKREIS	117
14.2	BERECHNUNGEN IN ALLGEMEINEN RECHTWINKLIGEN DREIECKEN.....	121
14.3	SINUSSATZ, KOSINUSSATZ UND TRIGONOMETRISCHER PYTHAGORAS	123
14.4	TANGENS.....	126
15	DER KREIS	130
15.1	DIE KREISZAHL π	130
15.2	KREISBOGEN UND KREISAUSSCHNITT	132
15.3	GRADMAß UND BOGENMAß	134
15.4	KREISMUSTER BERECHNEN	136
16	3D – KÖRPER FORMELSAMMLUNG UND AUFGABEN.....	137
16.1	WÜRFEL UND QUADER	137
16.2	PRISMA	137
16.3	ZYLINDER.....	138
16.4	PYRAMIDE	138
16.5	KEGEL	139
16.6	KUGEL.....	139
16.7	AUFGABEN ZU 3D-KÖRPERN.....	140
17	FORMELSAMMLUNG / LERNZETTEL	145

1 Terme aufstellen und vereinfachen

1.1 Was sind Terme?

Ein Term ist ein Rechenausdruck. Er kann aus Zahlen, Rechenzeichen, Variablen und mathematischen Symbolen wie z.B. Klammern bestehen. Einige Beispiele für Terme:

$$2x + 3$$

$$15 + 23 \cdot 2 - 10$$

$$2a + 2b$$

Terme werden vereinfacht, zusammengefasst oder ausgerechnet. Sie enthalten grundsätzlich kein Gleichheitszeichen. **Steht ein Gleichheitszeichen zwischen zwei Rechenausdrücken, dann handelt es sich um eine Gleichung.**

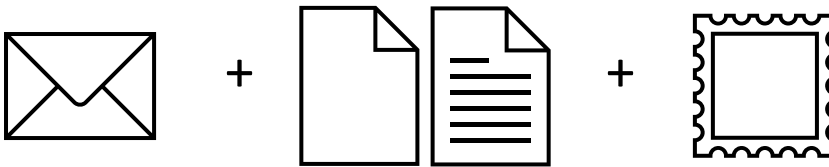
Wichtig zu wissen:

- Gleiche Variablen dürfen zusammengefasst werden.
- Wir dürfen NIE verschiedene Variablen (wie z.B. a und b) zusammenfassen.
- Reine Zahlen dürfen nicht mit Variablen zusammengefasst werden!
- Multiplizieren wir gleiche Variablen miteinander, so können wir dies als Potenz schreiben.
- Bei der Multiplikation dürfen wir Faktoren vertauschen, so dass die Variable im Produkt rechts steht und wir die Zahlenfaktoren miteinander multiplizieren können.

1.2 Wozu braucht man Terme?

Rechenausdrücke oder Terme werden verwendet, um mathematische Berechnungen durchzuführen, Gleichungen aufzustellen, Funktionen zu definieren oder Problemstellungen in verschiedenen Bereichen der Mathematik oder unserem Alltag zu beschreiben und zu lösen.

Beispiel: Das Gewicht eines Briefes in Abhängigkeit der Anzahl der Blätter in dem Briefumschlag einschließlich der Briefmarke.



Wir nennen das Gewicht des Briefumschlags u , das Gewicht eines Blattes Papier p und die Anzahl der Blätter Papier nennen wir n . Das Gewicht der Briefmarke nennen wir b . Dann lautet der Rechenausdruck für das Gesamtgewicht:

$$u + n \cdot p + b$$

Kennen wir die einzelnen Gewichte in Gramm und nur die Anzahl der Blätter Papier ist unbekannt, können wir den Rechenausdruck auch schreiben als:

$$7 + n \cdot 5 + 3$$

In diesem Term wiegt der Umschlag 7 g , ein Blatt Papier 5 g und eine Briefmarke 3 g . Unseren Term kann man zusammenfassen zu:

$$10 + n \cdot 5$$

Darf ein Standardbrief maximal 20 g wiegen, wird schnell klar, dass n maximal 2 werden darf, d.h. man darf nur zwei Blätter in den Briefumschlag einlegen.

1.3 Einfache Terme zusammenfassen – Addieren und Subtrahieren

Aufgabe

Vereinfache die Terme und fasse zusammen.

a) $13a + 2a + a - 2a + 5a$

b) $20h - 18h + 25h - 17h$

c) $3x + 3x - 2x + 5x$

d) $-17b - 23b + 25b + 16b$

e) $10i + 3i - i - 4i$

f) $-c + 20c - 19c - 25c$

g) $5k + 3k - 4k + 11k$

h) $a + 200 - 190 + 24a$

i) $8a - 2a - 6a + 4a + 5a$

j) $10b + 20 + 20b + 10$

1.8.2 Die quadratische Pizza – Eckstücke, Randstücke und Innenstücke

Aufgabe

Ein Quadrat habe die Kantenlänge n und sei dabei in n^2 gleich große kleine Quadrate eingeteilt. Im Bild ist die Situation für $n = 4$ dargestellt.

Bestimme die Anzahl der Eckstücke, Innenstücke und Randstücke in Abhängigkeit der Kantenlänge n . Stelle hierzu jeweils Rechenausdrücke auf.

Tipp: Es ist hilfreich, eine Wertetabelle für die Eckstücke, Randstücke und Innenstücke für die Werte $n = 4$ bis $n = 6$ zu erstellen, um einen ersten Eindruck vom allgemeinen Rechenausdruck zu erhalten.

$n=4$

E	R	R	E
R	I	I	R
R	I	I	R
E	R	R	E

- Anzahl der Innenstücke I
- Anzahl der Randstücke R
- Anzahl der Eckstücke E

1.8.3 Das Paketschnurproblem

Aufgabe

Ein quaderförmiges Paket soll mit einer Schnur umwickelt werden. Die Kantenlängen des Quaders nennen wir a , b , c . Die Schnur wird an den Enden noch zu einem Knoten zusammengebunden, der insgesamt eine Länge von 30 cm haben soll.

Erstelle zu den abgebildeten Varianten jeweils einen allgemeinen Rechenausdruck und berechne anschließend die benötigte Schnurlänge für die Kantenlängen $a = 40 \text{ cm}$, $b = 30 \text{ cm}$, $c = 20 \text{ cm}$.

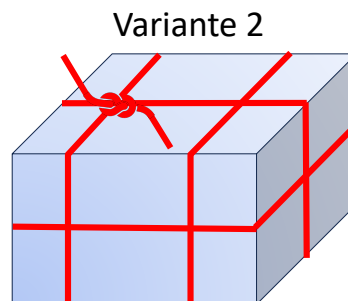
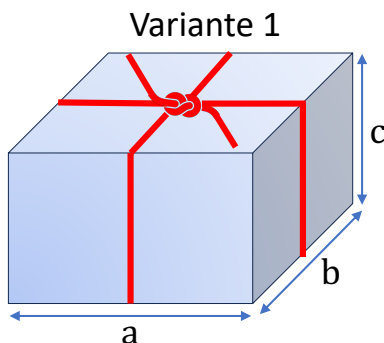


Bild: Powerpoint