© 2024 Uwe Knittel

Lektorat von: Dagmar Henning

Druck und Distribution im Auftrag des Autors:

tredition GmbH, Heinz-Beusen-Stieg 5, 22926 Ahrensburg, Germany

Lektorat von: Dagmar Henning

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Für die Inhalte ist der Autor verantwortlich. Jede Verwertung ist ohne seine Zustimmung unzulässig. Die Publikation und Verbreitung erfolgen im Auftrag des Autors, zu erreichen unter: tredition GmbH, Abteilung "Impressumservice", Heinz-Beusen-Stieg 5, 22926 Ahrensburg, Deutschland.

Vorbemerkung

Differenzialgleichungen sind neben der Stochastik mit das Schwerste, was die Mathematik zu bieten hat. Dieser Aufsatz wird wohl nicht den allerhöchsten wissenschaftlichen Ansprüchen genügen, daher richtet er sich eher an Studenten und andere wohlgeneigte Leser, die die Zwischenschritte bei der Berechnung von Differenzialgleichungen und dem Nachrechnen der schwierigen Materie nachvollziehen möchten.

Einführung

„All theory depends on assumptions which are not quite true“[1] – so beginnt der Aufsatz von Robert M. Solow. Sicherlich basiert eine Theorie auf Annahmen, die auch wahr sein müssen. Eine Theorie, die fast alle Annahmen aufnimmt, wird immer komplexer und schwieriger zu verstehen. Dies können wir anhand des Modells von Solow aufzeigen.

Aus der Schulzeit sind gewiss die einfachsten Differenzialgleichungen unter dem Fachbegriff ‚Wachstum‘ und ‚beschränktes Wachstum‘ bekannt. In diesem Aufsatz

[1] Solow, 1956, S. 65.

werden die etwas schwierigeren Differenzialgleichungen behandelt. Dazu gibt es eine Vielzahl von Lehrbüchern wie das von Peter Furlan[2] oder von Harro Heuser[3]. Für Ökonomen ist das Buch „Fundamental Methods of Mathematical Economics“ von Alpha C. Chiang (1984) von größerer Wichtigkeit.

Dynamische Modelle, insbesondere die Modelle der Theorie des Wachstumsgleichgewichts, sind sehr anspruchsvoll. Je komplizierter ein Modell aufgebaut ist, desto schwieriger ist es, auch einen Nutzen für eine ‚optimale‘ Wirtschaftspolitik aus diesen Modellen zu ziehen. Dennoch zeigt das Modell von Solow, dass sich Wachstum und Vollbeschäftigung unter bestimmten Voraussetzungen nicht widersprechen und dass das Modell den keynesianischen Stabilitätspessimismus widerlegt.

Zunächst wird in diesem Aufsatz die allgemeine Differenzialgleichung erster Ordnung und deren allgemeine Lösung gezeigt. Dann wird als Beispiel die Bernoulli-Gleichung besprochen und danach das Wachstumsmodell

---

[2] Vgl. Furlan, 2008.

[3] Vgl. Heuser, 2009.

von Solow. Schrittweise werden die einzelnen Annahmen in das Wachstumsmodell integriert.

1 Allgemeine lineare Differenzialgleichung erster Ordnung

Die lineare Differenzialgleichung erster Ordnung

(1) $$\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t)$$

hat folgende Lösung:

(2) $$y(t) = e^{-\int u(t)dt} (A + \int w(t)\, e^{\int u(t)dt}\, dt).$$

Der Ausdruck ‚linear' bedeutet, dass keine mathematischen Ausdrücke wie y dy/dt vorhanden sind. Eine Differenzialgleichung erster Ordnung besagt, dass Gleichung (1) keine Differenzialquotienten höherer Ordnung, z. B.

$$(\frac{dy}{dt})^2 (\frac{dy}{dt})^3 \text{usw.}$$

aufweisen.

Die Herleitung der Lösungsgleichung ist ein wenig schwierig. Beginnen wir zunächst mit der homogenen Lösung. Das bedeutet, dass die Differenzialgleichung gleich null gesetzt wird:

(3) $$\frac{dy}{dt} + u(t)y = 0.$$

Der Summand wird auf die rechte Seite gebracht. Nach der Trennung der Variablen erhalten wir das Integral

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -u(t)$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy + c = \int - u(t)\, dt$$

$$\ln y = -\int u(t)\, dt - C.$$

Nach Eliminierung des ln durch die e-Funktion ergibt

$$y(t) = e^{-\int u(t)dt - C}$$

$$y(t) = A\, e^{-\int u(t)dt}.$$

Nun die inhomogene Lösung:

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y = w(t)$$

Die Gleichung wird gleich null gesetzt, indem wir w(t) auf die andere Seite ziehen:

$$\frac{dy}{dt} + u(t)y - w(t) = 0$$

$$dy + [u(t)y - w(t)]\, dt = 0.$$

Nun müssen wir das Verfahren der exakten Differenzialgleichung anwenden, indem wir zwei Parameter, M und N, vor die Differenzialausdrücke mit einem noch nicht bekannten Integrations-faktor I einsetzen.

Wir nehmen nun den Lösungsansatz aus dem homogenen Fall

$$I(t) = A\, e^{-\int u(t)dt}$$

und setzen ihn für die Differenzialquotienten bzw. Koeffizienten in obige Gleichung ein:

(4) $$I\, dy + I\, [u(t)y - w(t)]\, dt = 0$$

$$A\, e^{-\int u(t)dt}\, dy + A\, e^{-\int u(t)dt}\, (u(t)y - w)\, dt = 0.$$

Dann ist

$$M = A\, e^{-\int u(t)dt}$$

und

$$N = A\, e^{-\int u(t)dt}\,(u(t)y - w).$$

Die Differenzialgleichung ist genau dann exakt, wenn sich die partiellen Gleichungen entsprechen:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dN}{dy}.$$

Also

$$\frac{dM}{dt} = -Au(t)\, e^{-\int u(t)dt}$$

und

$$\frac{dN}{dy} = Au(t)\, e^{-\int u(t)dt}.$$

Die beiden Gleichungen entsprechen sich nicht. Also ist der Integrationsfaktor falsch. Ein weiterer Ansatz für den Integrationsfaktor ist dieselbe Formel unter Hinweglassen des Minuszeichens:

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = u(t)\ A\ e^{\int u(t)dt} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}.$$

Die Bedingung für die Exaktheit ist gegeben und der Integrationsfaktor lautet

$$A\ e^{\int u(t)dt}.$$

Die zu lösende Differenzialgleichung sieht nun wie folgt aus:

$$A\ e^{\int u(t)dt}\ dy + A\ e^{\int u(t)dt}\ (u(t)y - w)\ dt = 0.$$

Um weiter rechnen zu können, bedarf es eines kleinen Einschubs. Um die Lösung zu erhalten, müssen wir nun folgende Lösungsmethode anwenden.[4] Der Lösungsweg lautet wie folgt:

I. Wir bilden eine Stammfunktion F(y,t):

$$F(y,t) = \int M\,dy + \int N\,dt + c$$

$$= \int M\,dy + C(t)$$

mit

$$C(t) = \int N\,dt + c$$

$$= \int e^{\int u(t)dt}\,dy + C(t)$$

$$= y\,e^{\int u(t)dt} + C(t).$$

[4] Vgl. Chiang, 1984, S. 488.

II. Diese Stammfunktion leiten wir nach dt ab:

$$dF/dt = y\,u(t)\,e^{\int u(t)dt} + C'(t).$$

III. Diese abgeleitete Funktion setzen wir mit N gleich und lösen nach C´(t) auf

$$N = y\,u(t)\,e^{\int u(t)dt} + C'(t).$$

Mit N:

$$N = e^{\int u(t)dt}\,(u(t)y - w) = y\,u\,e^{\int u(t)dt} - w\,e^{\int u(t)dt}$$

$$C'(t) = y\,u(t)\,e^{\int u(t)dt} - w\,e^{\int u(t)dt} - y\,u(t)\,e^{\int u(t)dt}$$

$$C'(t) = -\,w\,e^{\int u(t)dt}.$$

IV. Nun leiten wir $C'(t)$ auf und setzen den Ausdruck in die Stammfunktion ein:

$$\int C'(t)\,dt = \int -w\,e^{\int u(t)dt}\,dt$$

$$C(t) = -\int w\,e^{\int u(t)dt}\,dt$$

$$F(y,t) = y\,e^{\int u(t)dt} - \int w\,e^{\int u(t)dt}\,dt.$$

Die Integrationskonstante c ist dann

$$c = y\,e^{\int u(t)dt} - \int w\,e^{\int u(t)dt}\,dt$$

und wir lösen nach y auf:

$$y(t) = e^{-\int u(t)dt}\left(A - \int w\,e^{\int u(t)dt}\,dt\right).$$

Dies war zu zeigen (q. e. d.).

Beispiel von Furlan[5]:

Die Funktion lautet

$$(2y + 4t + 2)\, dy + (4y + 12t + 8)\, dt = 0.$$

Dann sind

$$M = 2y + 4t + 2$$

und

$$N = 4y + 12t + 8$$

die Differenzialkoeffizienten. Es gilt

[5] Furlan, 2008, S. 26–27.

$$\frac{dM}{dt} = 4 = \frac{dN}{dy}.$$

Es handelt sich um eine exakte Differenzialgleichung.

Lösungsweg:

I. Wir bilden eine Stammfunktion

$$F(y,t) = \int M \, dt + C(t)$$

$$= \int (2y + 4t + 2) \, dy + C(t)$$

$$= y^2 + 4ty + 2y + C(t).$$

II. Dieser Ausdruck wird nach t abgeleitet:

$$\frac{dF}{dt} = 4y + C'(t).$$

III. $\frac{dF}{dt}$ wird gleich N gesetzt und nach C´(t) aufgelöst:

$$4y + C'(t) = 4y + 12t + 8$$

$$C'(t) = 12t + 8.$$

IV. Wir leiten C´(t) nach dt auf:

$$\int C'(t)\, dt = \int 12t + 8\, dt$$

$$C(t) = 6t^2 + 8t.$$

Die Integrationskonstante lassen wir einfach weg.

V. Wir setzen C(t) in die Stammfunktion ein und erhalten

$$F(y,t) = \int M\, dy + C(t)$$