

# 1

## Grundlegende Eigenschaften von Supraleitern

### Abstract

Das Verschwinden des elektrischen Widerstands, die Beobachtung des ideal diamagnetischen Verhaltens, das Auftreten quantisierter magnetischer Flussschläuche oder die Flussquantisierung in supraleitenden Ringen sind sehr charakteristische Eigenschaften von Supraleitern, die wir in Kap. 1 detailliert betrachten werden. In den Abschn. 1.1–1.3 werden wir die grundlegenden Effekte vorstellen, aber noch nicht erklären. In Abschn. 1.4 werden wir sehen, dass all diese Eigenschaften verständlich werden, wenn wir den supraleitenden Zustand als eine kohärente Materiewelle erkennen. Wir werden in Abschn. 1.5 außerdem Experimente kennenlernen, die diese Welleneigenschaft eindrucksvoll demonstrieren.

### 1.1 Das Verschwinden des elektrischen Widerstands

#### Abstract

In diesem Abschnitt wollen wir uns zunächst mit der Frage befassen, wie der Widerstand von Metallen zustande kommt. Wir werden sehen, dass eine rein klassische Herangehensweise nur begrenzt zielführend ist. Erst die Einbeziehung einiger Aspekte der Quantenmechanik – insbesondere des Welle-Teilchen-Dualismus sowie des Pauli-Prinzips – erlaubt ein weitergehendes Verständnis. Diese Thematik wird in Lehrbüchern zur Festkörperphysik ausführlich betrachtet. Wir werden an dieser Stelle nur einige zentrale Grundbegriffe kennenlernen.

Nach diesem Exkurs in die Metallphysik werden wir uns zunächst unterschiedlichen Messmethoden zuwenden, um »Widerstand null« experimentell zu untersuchen. Man muss sich natürlich darüber klar sein, dass es grundsätzlich unmöglich ist, mit einem Experiment die Aussage, der Widerstand sei exakt null, zu beweisen. Ein Experiment kann immer nur eine obere Grenze für den Widerstand eines Supraleiters liefern.

#### 1.1.1 Grundlegendes zum Widerstand von Metallen

Wir wissen, dass der Ladungstransport in Metallen über Elektronen erfolgt. Schon sehr früh wurde die Vorstellung entwickelt (Paul Drude 1900, Hendrik Anton Lorentz 1905), wonach in einem Metall eine bestimmte Anzahl von Elektronen pro Atom – in den Alkalimetallen z. B. ein Elektron, das Valenzelektron – frei, gleichsam als Gas vorhanden sei.

Unter dem Einfluss eines elektrischen Felds werden die freien Elektronen beschleunigt. Nach einer gewissen Zeit, der mittleren Stoßzeit  $\tau$ , stoßen sie mit Atomen zusammen, geben ihre aus dem elektrischen Feld aufgenommene Energie ab und werden von neuem beschleunigt. Die Existenz freier Ladungsträger, die mit dem Metallgitter nur über Stöße wechselwirken, macht die gute Leitfähigkeit der Metalle verständlich. Nicht zuletzt ergibt sich in diesem klassischen Bild das ohmsche Gesetz, das wir unter Verwendung spezifischer Größen als  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  schreiben können. Hierbei ist  $\vec{j}$  die elektrische Stromdichte,  $\vec{E}$  das elektrische Feld und  $\sigma$  die elektrische Leitfähigkeit. Für die **elektrische Leitfähigkeit** ergibt sich der Ausdruck  $\sigma = ne^2\tau/m$  ( $n$ : Dichte der Elektronen,  $m$ : Elektronenmasse).

Auch der Anstieg des Widerstands (Abnahme der Leitfähigkeit) mit steigender Temperatur wird zwanglos erklärt. Mit wachsender Temperatur wird die ungeordnete thermische Bewegung der Atome eines Metalls – die Atome schwingen mit statistischer Amplitude um ihre Ruhelage – größer. Damit wird die Wahrscheinlichkeit für Stöße zwischen den Elektronen und den Atomen größer, d. h., die Zeit zwischen zwei Stößen wird kleiner. Da die Leitfähigkeit direkt proportional ist zu der Zeit, die die Elektronen im Feld frei beschleunigt werden, nimmt sie mit wachsender Temperatur ab – der Widerstand nimmt zu.

Die klassische Vorstellung stößt aber rasch an ihre Grenzen, etwa wenn man den Beitrag der Elektronen zur inneren Energie des Festkörpers betrachtet. Nach sehr allgemeinen Gesetzmäßigkeiten der klassischen statistischen Thermodynamik sollten alle Freiheitsgrade<sup>1</sup> eines Systems im Mittel  $k_B T/2$ , mit der Boltzmann-Konstanten  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Js/K, zur inneren Energie des Systems beitragen. Das heißt auch, die freien Elektronen sollten den für ein einatomiges Gas charakteristischen Beitrag von  $3k_B T/2$  pro freies Elektron liefern. Messungen der spezifischen Wärme von Metallen zeigten jedoch, dass der Beitrag der Elektronen zur Gesamtenergie der Metalle etwa 1000-mal kleiner ist, als nach den klassischen Gesetzen erwartet werden muss.

Zum genaueren Verständnis werden einige elementare Aspekte der Quantenmechanik benötigt. Eine Eigenschaft der Quantentheorie besteht darin, dass jedem physikalischen System diskrete Zustände zugeordnet werden. Ein Austausch physikalischer Größen, etwa der Energie, kann nur dadurch erfolgen, dass das System von einem Zustand in einen anderen übergeht. Wird der für irgendeinen solchen Übergang erforderliche Betrag der Energie oder einer anderen Austauschgröße nicht angeboten, so bleibt der Zustand stabil.

Ebenso hat uns die Quantentheorie gelehrt, dass **Teilchenbild und Wellenbild** komplementäre Beschreibungen ein und desselben physikalischen Gegenstandes sind. Dabei kann als einfache Regel gelten, dass es zweckmäßig ist, Ausbreitungsvorgänge im Wellenbild und Austauschprozesse bei der Wechselwirkung mit anderen Systemen im Teilchenbild zu beschreiben.

Nach Louis de Broglie kann jedem bewegten Teilchen auch eine Welle zugeordnet werden, wobei die Wellenlänge gleich der planckschen Konstanten  $h$  dividiert durch den Betrag des Impulses  $p$  des Teilchens ist, also  $\lambda = h/p$ . Das Betragsquadrat der Wellenamplitude

<sup>1</sup> Als thermodynamischen Freiheitsgrad bezeichnen wir jede Koordinate des Systems, die quadratisch in die Gesamtenergie eingeht. Beispiele sind die Geschwindigkeit,  $E_{kin} = (1/2)mv^2$ , oder die Verschiebung  $x$  aus der Ruhelage bei linearem Kraftgesetz,  $E_{pot} = (1/2)Dx^2$  ( $D$  = Kraftkonstante).

am Ort  $(x, y, z)$  ist dabei ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen an diesem Ort anzutreffen.

Das Teilchen wird also über den Raum »verschmiert«. Will man im Wellenbild ausdrücken, dass ein Ort für den Aufenthalt des Teilchens besonders bevorzugt ist, so muss man eine Welle zusammensetzen, die an diesem Ort eine besonders hohe Amplitude gegenüber allen anderen Orten hat – man nennt eine solche Welle ein **Wellenpaket**. Die Geschwindigkeit, mit der das Wellenpaket im Raum läuft, ist dann gleich der Geschwindigkeit des Teilchens.

Für die mit einem bewegten Teilchen verbundene Welle – man spricht von der »**Materiewelle**« oder von der »**Wellenfunktion**« – existiert, wie für jeden Wellenvorgang, eine charakteristische Differentialgleichung, die fundamentale Schrödinger-Gleichung.

Auch die Elektronen im Inneren eines Metalls haben Wellencharakter. Die Schrödinger-Gleichung gibt uns unter einigen vereinfachenden Annahmen die diskreten Quantenzustände für diese Elektronenwellen in der Form eines Zusammenhangs zwischen den erlaubten Energien  $E$  und dem sog. Wellenzahlvektor oder kurz Wellenvektor  $\vec{k}$ . Der Betrag von  $\vec{k}$  ist gegeben durch  $2\pi/\lambda$  und die Richtung von  $\vec{k}$  ist die Ausbreitungsrichtung der Welle. Für ein völlig freies Elektron ist dieser Zusammenhang sehr einfach. Es gilt:

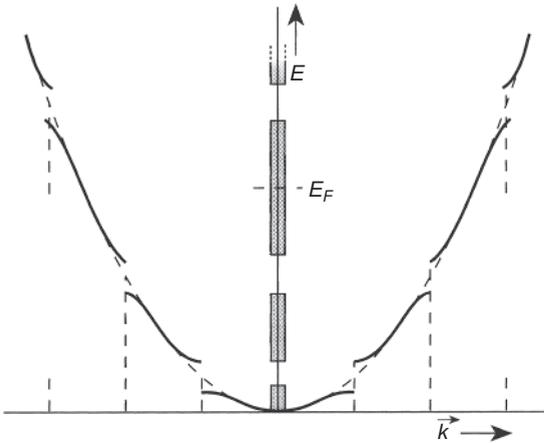
$$E = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} \quad (1-1)$$

( $m$  ist die Masse des Elektrons;  $\hbar = h/2\pi$ ).

Nun sind die Elektronen im Inneren eines Metalls nicht völlig frei. Sie sind erstens auf das Volumen des Metallstückes beschränkt; sie sind in dem Metall wie in einem Kasten eingesperrt. Diese Beschränkung führt dazu, dass die erlaubten  $\vec{k}$ -Werte diskret werden, einfach deshalb, weil die zugelassenen Elektronenwellen an den Wänden des Kastens gewisse Bedingungen (Randbedingungen) erfüllen müssen. Man kann z. B. fordern, dass die Amplitude der Elektronenwelle am Rand verschwindet.

Zum Zweiten spüren die Elektronen im Inneren eines Metalls über die elektrostatischen Kräfte die positiv geladenen Rumpfatome, die im Allgemeinen periodisch angeordnet sind. Man sagt, die Elektronen befinden sich in einem periodischen Potenzial. Damit meint man, dass die potenzielle Energie der Elektronen in der Nähe der positiv geladenen Atomrümpfe niedriger ist als zwischen den Atomen. Dieses periodische Potenzial führt dazu, dass im  $E$ - $\vec{k}$ -Zusammenhang nicht mehr alle Energien erlaubt sind. Es ergeben sich vielmehr Bereiche erlaubter Energien, die getrennt sind von Bereichen verbotener Energien. Ein Beispiel eines solchen durch ein periodisches Potenzial modifizierten  $E$ - $\vec{k}$ -Zusammenhangs ist in Abb. 1.1 schematisch dargestellt. Man spricht von **Energiebändern**.

In diese Zustände müssen die Elektronen eingefüllt werden. Hierbei ist ein weiteres wichtiges Prinzip zu beachten, das von Wolfgang Pauli 1924 formuliert worden ist. Dieses **Pauli-Prinzip** besagt, dass Elektronen (allgemeiner alle Teilchen mit halbzahligen Spin, sog. Fermionen) jeden diskreten Zustand der Quantenphysik nur einfach besetzen können. Da der Eigendrehimpuls (**Spin**) der Elektronen eine hier bisher nicht betrachtete Quantenzahl mit zwei Werten darstellt, können wir aufgrund des Pauli-Prinzips nur je zwei Elektronen in jeden unserer diskreten  $\vec{k}$ -Werte einfüllen. Wir müssen also, um alle Elektronen eines Metalls unterzubringen, die Zustände bis zu relativ hohen Energien auffüllen. Die



**Abb. 1.1** Energie-Impuls-Zusammenhang für ein Elektron im periodischen Potenzial. Der Zusammenhang, Gl. (1-1), für freie Elektronen ist als gestrichelte Parabel eingezeichnet.

Energie, bis zu der wir dabei auffüllen, nennt man die **Fermi-Energie**  $E_F$ . Die Dichte der Zustände pro Energieintervall und Volumeneinheit bezeichnet man als **Zustandsdichte**  $N(E)$ . Im einfachsten Fall bilden die gefüllten Zustände im Impulsraum dabei eine Kugel, die sog. **Fermi-Kugel**, bei der die Zustände mit möglichst kleinem  $|\vec{p}|$  bzw.  $|\vec{k}|$  besetzt sind. Im Allgemeinen erhält man aber sehr komplex geformte Körper.

Ein Metall kann dadurch charakterisiert werden, dass die Fermi-Energie in ein erlaubtes Energieband fällt, d. h., dass wir ein Band nur teilweise auffüllen<sup>2</sup>. In Abb. 1.1 ist für diesen Fall die Fermi-Energie eingezeichnet.

Die Besetzung der Zustände wird durch die Verteilungsfunktion für ein System von Fermionen, die Fermi-Funktion, bestimmt. Diese **Fermi-Funktion**, die dem Pauli-Prinzip Rechnung trägt, lautet:

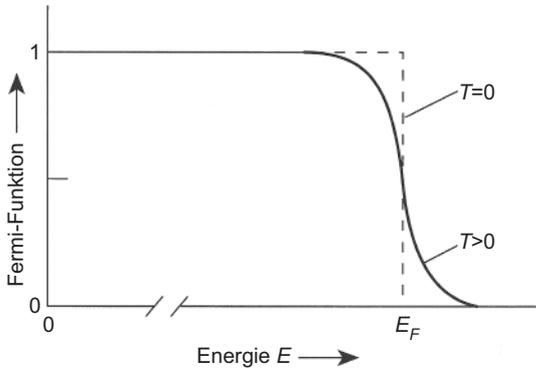
$$f = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1} \quad (1-2)$$

Diese Fermi-Funktion ist in Abb. 1.2 für den Fall  $T = 0$  (gestrichelte Kurve) und für den Fall  $T \neq 0$  (ausgezogene Kurve) dargestellt. Für endliche Temperaturen wird die Fermi-Verteilung etwas verschmiert. Die Verschmierung ist etwa gleich der mittleren thermischen Energie, also bei Zimmertemperatur etwa gleich  $1/40$  eV<sup>3</sup>. Die Fermi-Energie ist bei endlichen Temperaturen diejenige Energie, bei der die Verteilungsfunktion den Wert  $1/2$  annimmt. Sie liegt in der Größenordnung von einigen Elektronenvolt. Das heißt aber – und das ist sehr wichtig –, dass die Verschmierung an der Fermi-Kante bei normalen Temperaturen sehr gering ist. Man nennt ein solches Elektronensystem ein »**entartetes Elektronengas**«.

Mit diesen Überlegungen verstehen wir nun auch den sehr kleinen Beitrag der Elektronen zur inneren Energie. Es können nach dem eben gesagten nur sehr wenige Elektronen,

<sup>2</sup> Ein Isolator oder auch ein Halbleiter ergibt sich, wenn wir beim Einfüllen der Elektronen nur volle Bänder erhalten. Das ist leicht einzusehen. Die Elektronen eines vollen Bandes können aus dem elektrischen Feld keine Energie aufnehmen, da sie keine freien Zustände finden.

<sup>3</sup> eV ist eine bei elementaren Prozessen gebräuchliche Energieeinheit.  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .



**Abb. 1.2** Fermi-Funktion.  $E_F$  beträgt einige Elektronenvolt, die Temperaturverschmierung dagegen nur einige  $10^{-3}$  eV. Um dies anzudeuten, ist die Abszisse unterbrochen.

nämlich nur die innerhalb der Verschmierung der Fermi-Kante liegenden, an den thermischen Austauschprozessen teilnehmen. Alle anderen können mit thermischen Energien gar nicht angeregt werden, weil sie keine freien Plätze finden, in die sie nach der Anregung gehen könnten.

Wir wollen jetzt betrachten, wie man sich im Rahmen der Quantentheorie das **Zustandekommen des elektrischen Widerstands** vorstellen muss. Die Elektronen werden jetzt als Wellenpakete beschrieben, die den Kristall in allen Richtungen durchlaufen. Ein Strom kommt dadurch zustande, dass etwas mehr Wellen in der Richtung des Stroms laufen als entgegengesetzt. Die Wechselwirkung mit den Rumpfatomen führt zu einer Streuung der Elektronenwellen. Diese Streuung entspricht den Stößen im Teilchenbild. Sie kann – und das ist im Wellenbild neu – nicht am streng periodischen Gitter erfolgen. Die mit Hilfe der Schrödinger-Gleichung bestimmten Zustände der Elektronen sind stabile Quantenzustände. Erst eine Störung des periodischen Potentials, sei sie nun durch die thermischen Schwingungen der Atome, durch Fehler im Gitteraufbau oder durch Fremdatome hervorgerufen, kann eine Streuung der Elektronenwellen, d. h. eine Umbesetzung der Quantenzustände, bedingen. Die Streuung an den thermischen Schwingungen ergibt den temperaturabhängigen Anteil des Widerstands und die an den Baufehlern und Fremdatomen den Restwiderstand.

Was natürlich auch bei quantenmechanischer Betrachtung bleibt, ist die Tatsache, dass Metalle einen endlichen Widerstand haben. Das ohmsche Gesetz, wie auch der Ausdruck für die Leitfähigkeit,  $\sigma = ne^2\tau/m$ , den wir bereits im klassischen Bild kennengelernt haben, bleibt bestehen.

Dies macht das Verschwinden des elektrischen Widerstands im supraleitenden Zustand umso ungewöhnlicher.

Wir haben gesehen, dass wir irgendwelche Mechanismen brauchen, die eine Wechselwirkung zwischen den einen Strom tragenden Elektronen eines Supraleiters und dem Gitter verbieten. Nimmt man an, dass die »supraleitenden« Elektronen in einem gemeinsamen Quantenzustand sind, so wäre eine gewisse Stabilität dieses Zustands verständlich. In den vorangegangenen Überlegungen haben wir Quantenzustände für einzelne Elektronen

betrachtet und so getan, als würden sich diese Zustände nicht ändern, wenn wir sie mit Elektronen besetzen. Existiert aber eine Wechselwirkung zwischen den Elektronen, so ist diese Behandlung nicht mehr in Strenge richtig. Wir müssen vielmehr fragen, welche Zustände das System der Elektronen mit Wechselwirkung hat, anders gesagt, welche Kollektivzustände existieren. Hierin liegt das Verständnis, aber auch die Schwierigkeit der Supraleitung. Sie ist ein typisches Quanten- und Kollektivphänomen, charakterisiert durch die Ausbildung einer **makroskopischen, kohärenten Materiewelle**, die sich reibungsfrei durch den Supraleiter bewegen kann.

### 1.1.2 Dauerströme im Supraleiter

Schon aus den ersten Beobachtungen der Supraleitung an Quecksilber ergab sich die grundlegende Frage, wie groß die Widerstandsabnahme bei Eintritt der Supraleitung ist. Oder anders ausgedrückt: Wie gerechtfertigt ist es, von einem Verschwinden des elektrischen Widerstands zu sprechen? Wir wollen dies nachfolgend beantworten, indem wir im Rahmen einer Textbox unterschiedliche Methoden (und deren Ergebnisse) zum Nachweis extrem kleiner Widerstände diskutieren.

Wir wissen heute, dass der Widerstandssprung bei Eintritt der Supraleitung mindestens 14 Zehnerpotenzen beträgt [1]. Ein Metall im supraleitenden Zustand könnte damit höchstens einen spezifischen Widerstand haben, der etwa 17 Zehnerpotenzen kleiner ist als der spezifische Widerstand von Kupfer, einem unserer besten metallischen Leiter. Da wohl niemand eine Vorstellung mit der Angabe »17 Zehnerpotenzen« verbinden kann, soll noch ein anderer Vergleich gegeben werden: Der Widerstandsunterschied zwischen einem Metall im supraleitenden und im normalleitenden Zustand ist mindestens ebenso groß wie zwischen Kupfer und gebräuchlichen Isolatoren.

Nach diesen Erfahrungen erscheint es gerechtfertigt, zumindest vorläufig anzunehmen, dass der elektrische Widerstand im supraleitenden Zustand wirklich verschwindet. Es sei hier allerdings darauf hingewiesen, dass diese Aussage nur unter speziellen Bedingungen gilt, nämlich für nicht zu große Gleichströme. Der Widerstand kann endlich werden, wenn sich magnetische Flussschläuche im Supraleiter befinden. Auch hat man bei Wechselströmen einen von null verschiedenen Widerstand. Wir werden darauf in späteren Kapiteln genauer eingehen.

#### Methoden 1.1 Messung extrem kleiner elektrischer Widerstände

Bei den ersten Untersuchungen zur Supraleitung wurde eine **konventionelle Methode der Widerstandsmessung** verwendet. Es wurde die elektrische Spannung an der von einem Strom durchflossenen Probe gemessen. Dabei konnte nur festgestellt werden, dass der Widerstand bei Eintritt der Supraleitung auf weniger als ein Tausendstel abnimmt. Von einem Verschwinden des Widerstands zu sprechen, war also nur insoweit gerechtfertigt, als dass der Widerstand unter die Empfindlichkeitsgrenze der Messanordnung absank und damit nicht mehr nachgewiesen werden konnte.

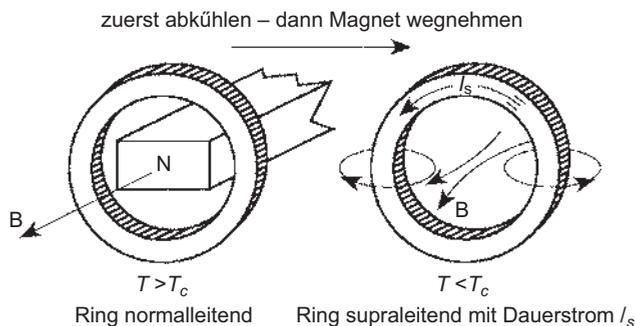
Es ist natürlich für das Verständnis einer solch neuen Erscheinung sehr wichtig, mit möglichst empfindlichen Methoden zu testen, ob auch im supraleitenden Zustand noch

ein Restwiderstand gefunden werden kann. Es geht also darum, extrem kleine Widerstände zu messen. Dafür wurde schon 1914 von Kamerlingh-Onnes die schlechthin beste Methode verwendet. Kamerlingh-Onnes beobachtete nämlich das **Abklingen eines Stroms in einem geschlossenen supraleitenden Kreis**. Die in einem solchen Strom gespeicherte Energie wird, falls ein Widerstand vorhanden ist, allmählich in joulesche Wärme verwandelt. Man braucht also nur einen solchen Strom zeitlich verfolgen. Klingt er im Laufe der Zeit ab, so ist mit Sicherheit noch ein Widerstand vorhanden. Kann man kein solches Abklingen feststellen, so lässt sich aus der Beobachtungszeit und der Geometrie des supraleitenden Stromkreises eine obere Grenze für den Widerstand angeben.

Diese Methode kann um viele Zehnerpotenzen empfindlicher gemacht werden als die übliche Strom-Spannungs-Messung. In Abb. 1.3 ist sie im Prinzip veranschaulicht. Wir haben einen Ring aus supraleitendem Material, z. B. Blei, oberhalb der Übergangstemperatur  $T_c$ , also im normalleitenden Zustand. Ein Magnetstab sorgt dafür, dass die Ringöffnung von einem Magnetfeld durchsetzt wird. Nun kühlen wir den Ring auf eine Temperatur ab, bei der er supraleitend ist ( $T < T_c$ ). An dem Magnetfeld<sup>4</sup> durch die Öffnung ändert sich dabei praktisch nichts. Dann nehmen wir den Magneten weg. Dabei wird in dem supraleitenden Ring ein Strom angeworfen, weil jede Änderung des magnetischen Flusses  $\Phi$  durch den Ring eine elektrische Spannung längs des Ringes erzeugt. Diese Induktionsspannung wirft den Strom an.

Wäre der Widerstand exakt null, so sollte dieser Strom als sog. »Dauerstrom« unverändert fließen, solange der Bleiring supraleitend bleibt. Ist irgendein Widerstand  $R$  vorhanden, so nimmt der Strom nach einem Exponentialgesetz ab. Es gilt:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (1-3)$$



**Abb. 1.3** Zur Erzeugung eines Dauerstroms in einem supraleitenden Ring.

4 Wir werden fast durchgehend die Größe  $\vec{B}$  als magnetische Feldgröße verwenden und sie der Einfachheit halber »magnetisches Feld« anstelle von »magnetischer Flussdichte« nennen. Da die uns interessierenden Magnetfelder, auch diejenigen im Supraleiter, durch makroskopische Ströme erzeugt werden, ist eine Unterscheidung von magnetischer Feldstärke  $\vec{H}$  und magnetischer Flussdichte  $\vec{B}$  unnötig.

Dabei ist  $I_0$  der Strom zu einem Zeitpunkt, von dem aus wir die Zeit zählen.  $I(t)$  ist der Strom zur Zeit  $t$ .  $R$  ist der Widerstand und  $L$  ist der Selbstinduktionskoeffizient, der nur von der Geometrie des Ringes abhängt<sup>5</sup>.

Für eine Abschätzung wollen wir annehmen, dass wir einen Draht ring von 5 cm Durchmesser mit einer Drahtdicke von 1 mm verwenden. Der Selbstinduktionskoeffizient  $L$  eines solchen Ringes ist etwa  $1,3 \cdot 10^{-7}$  H. Klingt in einem solchen Ring ein Dauerstrom innerhalb 1 h um weniger als 1 % ab, so kann man daraus schließen<sup>6</sup>, dass der Widerstand kleiner sein muss als  $4 \cdot 10^{-13} \Omega$ . Das aber bedeutet eine Widerstandsänderung bei Eintritt der Supraleitung um mehr als acht Zehnerpotenzen.

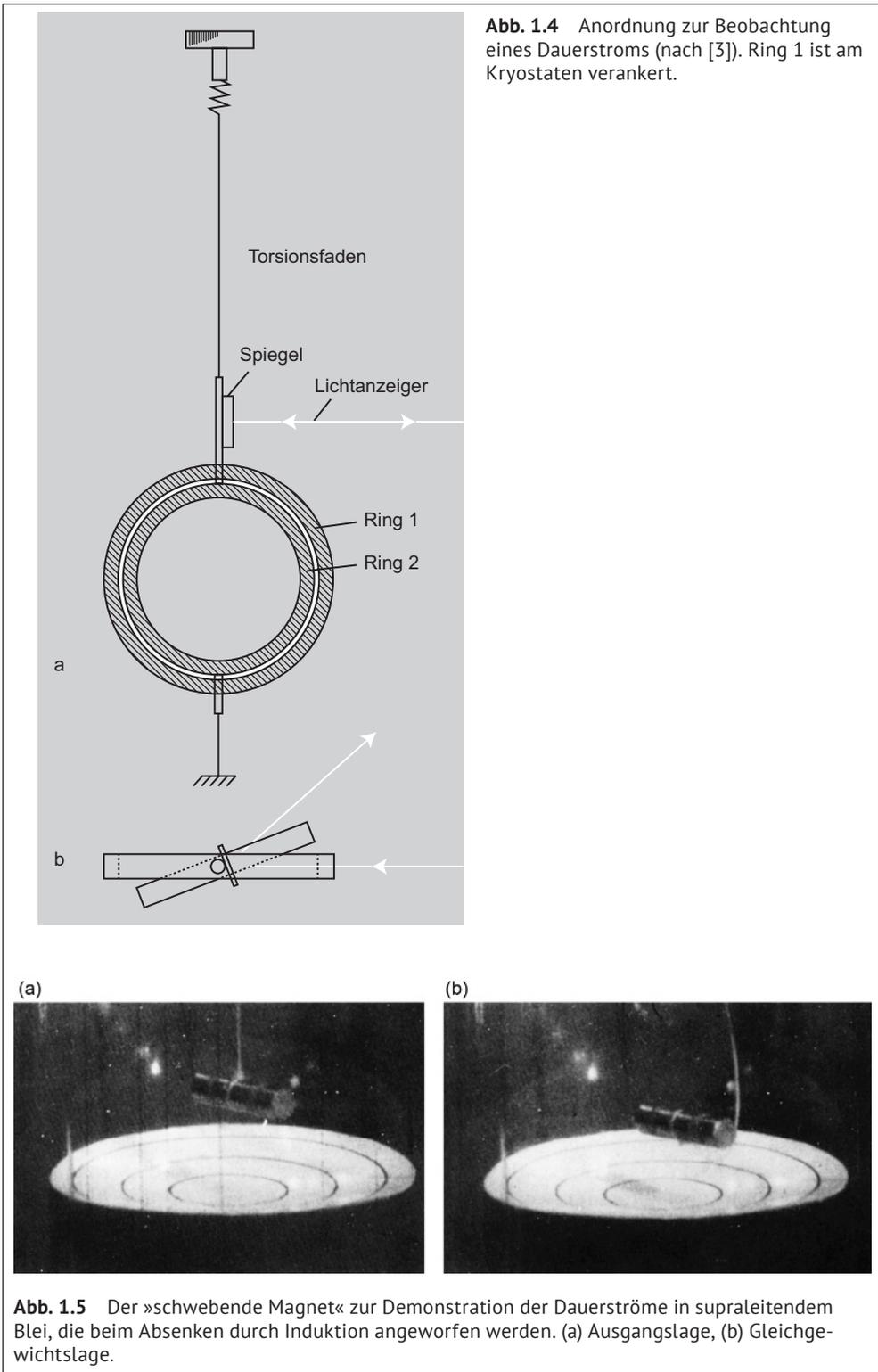
Bei all diesen Versuchen muss die Stärke des Dauerstroms beobachtet werden. In den ersten Experimenten [2] geschah dies einfach mit einer Magnetnadel, deren Auslenkung im magnetischen Feld des Dauerstroms beobachtet wurde. Eine empfindlichere Anordnung wurde von Kamerlingh-Onnes und etwas später von Tuyn [3] verwendet. Sie ist in Abb. 1.4 schematisch dargestellt. In den beiden supraleitenden Ringen 1 und 2 wird über einen Induktionsvorgang ein Dauerstrom angeworfen. Dieser Strom versucht, die beiden Ringe in paralleler Lage zu halten. Nun kann man einen der beiden Ringe (hier den inneren) an einem Torsionsfaden aufhängen und etwas aus der Parallellage herausdrehen. Dabei wird der Torsionsfaden durch die Rückstellkraft des Dauerstroms verdrillt. Es ergibt sich eine Gleichgewichtslage, bei der die Drehmomente von Dauerstrom und Torsionsfaden gleich groß sind. Diese Gleichgewichtslage wird über einen Lichtzeiger sehr empfindlich beobachtet. Klingt der Dauerstrom in den Ringen ab, so würde der Lichtzeiger eine Veränderung der Gleichgewichtslage anzeigen. Bei allen derartigen Experimenten ist nie eine Änderung des Dauerstroms beobachtet worden.

Eine hübsche **Demonstration für supraleitende Dauerströme** ist in Abb. 1.5 dargestellt. Ein kleiner Permanentmagnet, der auf eine supraleitende Bleischale herabgesenkt wird, wirft nach der lenzschen Regel Induktionsströme so an, dass eine Abstoßung des Magneten zustande kommt. Die Induktionsströme tragen den Magneten in einer Gleichgewichtshöhe. Man nennt diese Anordnung einen »schwebenden Magneten«. Der Magnet wird so lange getragen, wie die Dauerströme im Blei fließen, d. h. solange das Blei supraleitend gehalten wird. Mit Hochtemperatursupraleitern wie  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  kann die Levitation leicht an Raumluft vorgeführt werden. Man kann wahre Schwergewichte wie den in Abb. 1.6 gezeigten Sumoring schweben lassen.

Die empfindlichsten Anordnungen zur Festlegung einer oberen Grenze für den Widerstand im supraleitenden Zustand verwenden Leitergeometrien mit besonders kleinem Selbstinduktionskoeffizienten  $L$  und steigern die Beobachtungszeit. Mit

5 Der Selbstinduktionskoeffizient  $L$  kann definiert werden als der Proportionalitätsfaktor zwischen der Induktionsspannung an einem Leiter und der zeitlichen Änderung des Stroms durch den Leiter, also via  $U_{\text{ind}} = -L \frac{dI}{dt}$ . Die in einem Ring mit Dauerstrom gespeicherte Energie ist gegeben durch  $\frac{1}{2} L \cdot I^2$ . Die zeitliche Änderung dieser Energie ist gerade gleich der im Widerstand auftretenden jouleschen Wärmeleistung  $R \cdot I^2$ . Es gilt also  $-\frac{d}{dt}(\frac{1}{2} L I^2) = R \cdot I^2$ . Damit erhält man die Differentialgleichung  $-\frac{dI}{dt} = \frac{R}{L} \cdot I$ , deren Lösung Gleichung (1-3) ist.

6 Für einen Kreisring mit dem Radius  $r$  aus einem Draht der Dicke  $2d$  mit ebenfalls kreisförmigem Querschnitt ( $r \gg d$ ) gilt:  $L = \mu_0 r \cdot [\ln(8r/d) - 2]$ , mit  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Vs/Am. Damit folgt  $R \leq \frac{-\ln 0,99 \cdot 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ Vs}}{3,6 \cdot 10^3 \text{ Am}} \cong 3,6 \cdot 10^{-13} \Omega$ .



solchen hochgezüchteten Apparaturen konnte die Grenze weiter erniedrigt werden. Die modernen supraleitenden Magnetfeldmesser (siehe Abschn. 7.6.4) erlauben eine weitere Steigerung der Empfindlichkeit bis hin zu dem eingangs erwähnten Ergebnis, dass der spezifische Widerstand im Supraleiter mindestens 17 Zehnerpotenzen kleiner ist als der spezifische Widerstand von Kupfer.



**Abb. 1.6** Anwendung der berührungsfreien Levitation durch die Dauerströme in Supraleitern. Der Sumoringer inklusive Bodenplatte wiegt 202 kg. Der verwendete Supraleiter ist  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  (Wiedergabe mit freundlicher Genehmigung durch das International Superconductivity Research Center (ISTEC) und Nihon-SUMO Kyokai (Japan, 1997)).

## 1.2 Idealer Diamagnetismus, Flussschläuche und Flussquantisierung

### Abstract

In diesem Abschnitt werden wir uns zunächst fragen, welche Eigenschaften ein gedachtes Material, der »ideale Leiter« hat, dessen einzige Eigenschaft es ist, unterhalb einer kritischen Temperatur seinen Widerstand zu verlieren. Wir werden sehen, wenn wir die Temperatur des idealen Leiters ändern sowie ein Magnetfeld anlegen, dass das Magnetfeld im Inneren des Leiters davon abhängt, in welcher Reihenfolge wir Magnetfeld und Temperatur ändern. Nachfolgend werden wir in Abschn. 1.2.2 sehen, dass ein **echter Supraleiter** darüber hinausgeht und bei genügend kleinen Feldern ideal diamagnetisch ist, d. h. in seinem Inneren feldfrei bleibt. Wir werden danach in Abschn. 1.2.3 lernen, dass es **zwei unterschiedliche Arten von Supraleitern** gibt, die sog. Typ-I- bzw. Typ-II-Supraleiter. Bei Typ-II-Supraleitern kann ein Magnetfeld in einem gewissen Feldbereich, der Shubnikov-Phase, den Supraleiter durchdringen, und zwar in Form quantisierter Flussschläuche. Wir werden ebenfalls mehrere Methoden besprechen,

mit denen sich diese Flussschläuche abbilden lassen. Abschließend werden wir in Abschn. 1.2.4 sehen, dass auch in der Shubnikov-Phase Levitation möglich ist und sehr spezielle Eigenschaften hat.

### 1.2.1 Der ideale Leiter

Lange Zeit glaubte man, dass es die einzige charakteristische Eigenschaft des supraleitenden Zustands sei, keinen messbaren Widerstand für Gleichstrom zu besitzen. Wird an einen solch idealen Leiter ein Magnetfeld angelegt, so werden durch die Induktion Dauerströme angeworfen, die das Magnetfeld vom Inneren einer Probe abschirmen. Dieses Prinzip ist uns ja bereits in Abschn. 1.1 beim schwebenden Magneten begegnet.

Was passiert, wenn wir zunächst ein Magnetfeld  $\vec{B}_a$  an einen Normalleiter anlegen und dann durch Abkühlung unter die Sprungtemperatur  $T_c$  die ideale Leitfähigkeit erhalten? Zunächst werden im normalleitenden Zustand bei Anlegen des Felds durch Induktion Wirbelströme fließen. Sobald das Magnetfeld aber seinen Endwert erreicht hat und sich zeitlich nicht mehr ändert, werden diese Ströme aber ganz in Analogie zu Gl. (1-3) abklingen, so dass schließlich das Magnetfeld im Supraleiter gleich dem von außen angelegten Feld ist.

Kühlt man jetzt den idealen Leiter unter  $T_c$ , dann wird dieser Zustand einfach beibehalten, da weitere Induktionsströme ja nur bei *Feldänderungen* angeworfen werden. Genau dies passiert, wenn das Feld jetzt unterhalb  $T_c$  abgeschaltet wird. Der ideale Leiter behält das Feld in seinem Inneren.

Wir haben damit, je nach Art und Weise, wie der Endzustand – eine Temperatur unterhalb  $T_c$  und ein angelegtes Magnetfeld  $\vec{B}_a$  – erreicht wurde, ganz verschiedene Magnetfelder im Inneren des idealen Leiters.

Ein Experiment von Kamerlingh-Onnes aus dem Jahr 1924 schien dieses komplizierte Verhalten eines Supraleiters eindeutig zu bestätigen. Kamerlingh-Onnes [4] kühlte eine Hohlkugel aus Blei bei angelegtem Magnetfeld unter die Sprungtemperatur und schaltete dann das äußere Magnetfeld ab. Dabei erhielt er, wie man aus  $R = 0$  erwarten musste, Dauerströme, die ein magnetisches Moment der Kugel ergaben.

Man könnte demnach einen Stoff, der nur die Eigenschaft  $R = 0$  hätte, bei gleichen äußeren Variablen  $T$  und  $\vec{B}_a$  je nach der Vorgeschichte in ganz verschiedene Zustände bringen. Damit hätte man nicht *eine* durch Vorgabe der Variablen wohldefinierte supraleitende Phase, sondern eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit von supraleitenden Phasen mit beliebigen Abschirmströmen, die von der Vorgeschichte abhängen. Die Existenz einer Mannigfaltigkeit supraleitender Phasen war so unvorstellbar, dass man – ohne experimentelle Verifikation – auch vor 1933 von *einer* supraleitenden Phase sprach.

### 1.2.2 Der ideale Diamagnetismus

Tatsächlich verhält sich ein Supraleiter aber anders als ein idealer Leiter. Kühlen wir wiederum in Gedanken eine Probe bei angelegtem Magnetfeld durch  $T_c$ . Wenn das Magnetfeld

sehr klein war, findet man, dass das Feld bis auf eine sehr dünne Schicht an der Probenoberfläche aus dem Inneren des Supraleiters vollständig *verdrängt* wird, und damit hat man einen idealen diamagnetischen Zustand, der nicht davon abhängt, in welcher Reihenfolge das Magnetfeld angelegt und die Probe gekühlt wurde.

Dieser ideale Diamagnetismus wurde 1933 durch Meißner und Ochsenfeld an Blei- und Zinnstäbchen entdeckt [5].

Wir können den Verdrängungseffekt ebenso wie die Eigenschaft  $R = 0$  mit dem »schwebenden Magneten« eindrucksvoll demonstrieren<sup>7</sup>. Um die Eigenschaft  $R = 0$  zu zeigen, haben wir in Abb. 1.5 den Permanentmagneten auf die supraleitende Bleischale abgesenkt und dabei die Dauerströme über den damit verbundenen Induktionsvorgang angeworfen. Zur Demonstration des **Meißner-Ochsenfeld-Effekts** legen wir den Permanentmagneten bei  $T > T_c$  auf die Bleischale (Abb. 1.7a) und kühlen dann ab. Mit dem Übergang in die Supraleitung tritt die Feldverdrängung auf, der Magnet wird von dem diamagnetischen Supraleiter abgestoßen und steigt bis zur Gleichgewichtshöhe auf (Abb. 1.7b). Dabei wird im Grenzfall idealer Verdrängung des Magnetfelds die gleiche Schwebehöhe erreicht wie in Abb. 1.5.

Was ging schief beim ursprünglichen Experiment von Kamerlingh-Onnes? Für den Versuch wurde eine Hohlkugel verwendet, um weniger flüssiges Helium für die Abkühlung zu benötigen. Die Beobachtungen an dieser Probe waren korrekt, man hatte aber übersehen, dass bei einer Hohlkugel während der Abkühlung ein ringförmig geschlossener supraleitender Bereich entstehen kann, der den Fluss durch seine Fläche konstant hält. Damit kann sich die Hohlkugel wie ein supraleitender Ring (Abb. 1.3) verhalten und zu dem beobachteten Ergebnis führen.

### 1.2.3 Typ-I- und Typ-II-Supraleiter; Flussschläuche

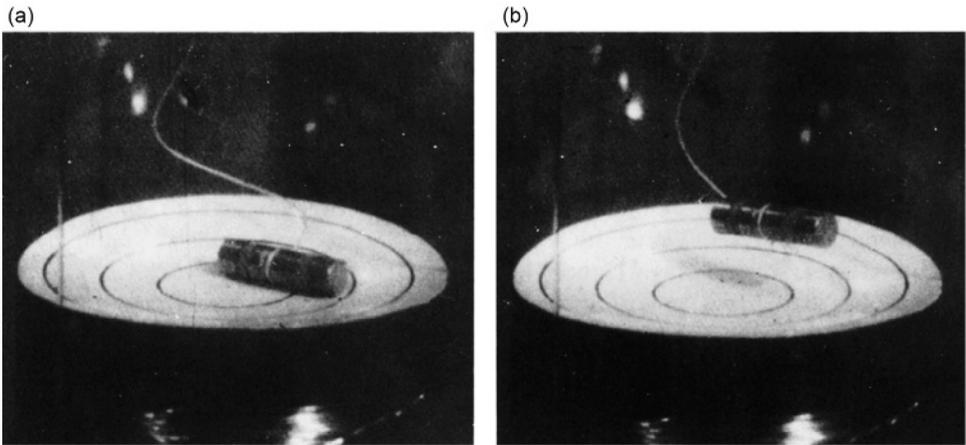
Wir hatten oben angenommen, dass das an den Supraleiter angelegte Magnetfeld »klein« sei. Tatsächlich zeigt sich, dass der ideale Diamagnetismus nur in einem endlichen Bereich von Magnetfeldern und Temperaturen existiert, der überdies von der Geometrie der Probe abhängen kann.

Betrachten wir im Folgenden eine lange, stabförmige Probe, für die Magnetfelder parallel zur Achse angelegt werden. Für andere Formen kann das Magnetfeld häufig verzerrt werden. So ist für eine ideal diamagnetische Kugel das Magnetfeld am »Äquator« anderthalbmal so groß wie das von außen angelegte Feld. Auf geometriebedingte Effekte werden wir in Abschn. 4.6.4 näher eingehen.

Man findet, dass zwei unterschiedliche Arten von Supraleitern existieren:

- Der erste Typ – **Typ-I-Supraleiter** oder **Supraleiter erster Art** genannt – verdrängt das Magnetfeld bis zu einem Maximalwert  $B_c$ , dem »**kritischen Magnetfeld**« (oder kurz: dem »**kritischen Feld**«). Für größere Felder bricht die Supraleitung zusammen und die Probe geht in den normalleitenden Zustand über. Das kritische Feld hängt

<sup>7</sup> Auch nichtsupraleitende, aber diamagnetische Objekte – z. B. Nüsse oder Frösche – können auf Magneten schweben [6]. Man benötigt aber sehr starke Feldgradienten.



**Abb. 1.7** »Schwebender Magnet« zur Demonstration des Meißner-Ochsenfeld-Effekts bei angelegtem Magnetfeld. (a) Ausgangslage für  $T > T_c$ , (b) Gleichgewichtslage für  $T < T_c$ .

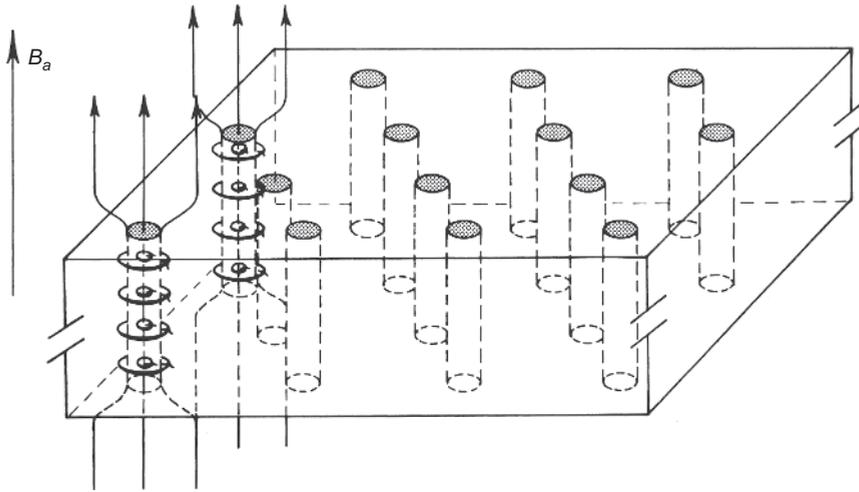
dabei von der Temperatur ab und geht an der Übergangstemperatur  $T_c$  gegen null. Beispiele für Typ-I-Supraleiter sind Quecksilber oder sehr reines Blei.

- Der zweite Typ – der **Typ-II-Supraleiter** oder **Supraleiter zweiter Art** – zeigt den idealen Diamagnetismus für Magnetfelder kleiner als das »**untere kritische Magnetfeld**«  $B_{c1}$ . Die Supraleitung verschwindet vollständig für Felder oberhalb des »**oberen kritischen Magnetfelds**«  $B_{c2}$ , das oft erheblich größer ist als  $B_{c1}$ . Beide kritischen Felder gehen bei  $T_c$  gegen null. Viele Legierungen, aber auch die Hochtemperatursupraleiter zeigen dieses Verhalten. Für letztere kann  $B_{c2}$  sogar Werte von über 100 T erreichen.

Was passiert bei Typ-II-Supraleitern in der »**Shubnikov-Phase**« zwischen  $B_{c1}$  und  $B_{c2}$ ? In diesem Bereich dringt das Magnetfeld teilweise in die Probe ein. Es fließen dann Abschirmströme im Inneren des Supraleiters und bündeln die magnetischen Feldlinien, so dass ein System von **Flussschläuchen**, auch »**Abrikosov-Flusswirbel**«<sup>8</sup> genannt, entsteht. Diese Wirbel ordnen sich in einem ideal homogenen Supraleiter im Allgemeinen in der Form eines Dreiecksgitters an. Die Abb. 1.8 zeigt diese Struktur der Shubnikov-Phase schematisch. Der Supraleiter wird von magnetischen Flussschläuchen durchsetzt, die jeweils ein elementares Flussquant enthalten und an den Ecken gleichseitiger Dreiecke sitzen. Jeder Flussschlauch besteht aus einem System von Ringströmen, die in Abb. 1.8 für zwei Flussschläuche angedeutet sind. Diese Ströme erzeugen zusammen mit dem äußeren Feld den magnetischen Fluss durch den Schlauch und verdrängen das Magnetfeld etwas aus dem Raum zwischen den Flussschläuchen. Man spricht deshalb auch von Flusswirbeln. Mit wachsendem Außenfeld  $\vec{B}_a$  wird der Abstand der Flussschläuche kleiner.

In der nachfolgenden Textbox sind eine Reihe von Methoden zum Nachweis bzw. zur Abbildung von Flussschläuchen dargestellt.

8 Für die Vorhersage solcher Flusswirbel erhielt A. A. Abrikosov 2003 den Nobelpreis.

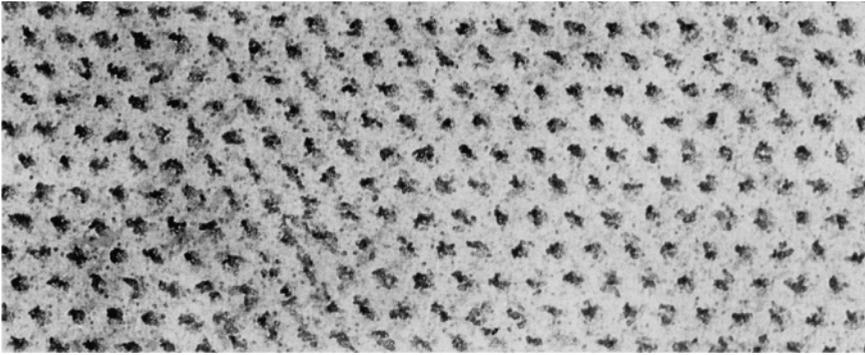


**Abb. 1.8** Schematische Darstellung der Shubnikov-Phase. Magnetfeld und Supraströme sind nur für zwei Flussschläuche gezeichnet.

#### Methoden 1.2 Abbildung von Flussschläuchen

Der erste Nachweis einer periodischen Struktur des Magnetfelds in der Shubnikov-Phase wurde 1964 mit Hilfe der **Neutronenbeugung** von einer Gruppe am Kernforschungszentrum Saclay erbracht [7]. Dabei konnte allerdings nur eine Grundperiode der Struktur beobachtet werden. Wirkliche »Bilder« der Shubnikov-Phase wurden 1966 von Eßmann und Träuble [8] mit einer trickreichen Dekorationsmethode, **der Bitterdekorations**, hergestellt. Die Abb. 1.9 gibt ein Beispiel für eine Blei-Indium-Legierung. Diese Aufnahmen der magnetischen Struktur sind auf folgende Weise erhalten worden: Über der supraleitenden Probe wird von einem glühenden Draht Eisen verdampft. Die Eisenatome finden sich bei der Diffusion durch das Heliumgas des Kryostaten zu Eisenkolloiden. Diese Kolloide mit einem Durchmesser von weniger als 50 nm sedimentieren im Helium langsam auf die Oberfläche des Supraleiters. Aus dieser Oberfläche stoßen die Flussschläuche der Shubnikov-Phase (in Abb. 1.8 für zwei Flussschläuche angedeutet), die je ein Flussquant  $\Phi_0$  enthalten sollen. Das ferromagnetische Eisenkolloid lagert sich an den Stellen ab, an denen die Flussschläuche aus der Oberfläche austreten, da hier die stärksten Magnetfelder vorliegen. Damit gelingt es, die Flussschläuche zu dekorieren. Diese Struktur kann anschließend im Elektronenmikroskop sichtbar gemacht werden. So wurde die Aufnahme der Abb. 1.9 gewonnen. Mit diesen Experimenten wurde die Flusswirbelstruktur, die von der Theorie vorausgesagt worden war, in überzeugender Weise bestätigt.

Offen bleibt zunächst die Frage, ob die dekorierten Stellen der Oberfläche wirklich den Enden von Flussschläuchen mit nur *einem* Flussquant entsprechen. Um diese Frage zu entscheiden, muss man die Flussschläuche abzählen und gleichzeitig den Gesamtfluss, etwa über ein Induktionsexperiment, bestimmen. Dann erhält man die Größe des magnetischen Flusses durch einen Fluss Schlauch, indem man den Gesamtfluss  $\Phi_{\text{ges}}$  durch die Probe durch die Zahl der Schläuche dividiert. Solche Auswertungen



**Abb. 1.9** Elektronenmikroskopische Aufnahme eines Flussquantengitters nach der Dekoration mit Eisenkolloid. »Eingefrorener« Fluss beim Feld null. Material: Pb + 6,3 Atom-% In, Temperatur: 1,2 K, Probenform: Zylinder 60 mm lang, 4 mm  $\varnothing$ , Magnetfeld  $\vec{B}_a$  parallel zur Achse. Vergrößerung 8300fach (Wiedergabe mit freundlicher Genehmigung von Herrn Dr. Eßmann.)

haben eindeutig ergeben, dass tatsächlich für sehr homogene Supraleiter zweiter Art jeder Flussschlauch nur ein **elementares Flussquant**  $\Phi_0 = 2,07 \cdot 10^{-15} \text{ T} \cdot \text{m}^2$  enthält.

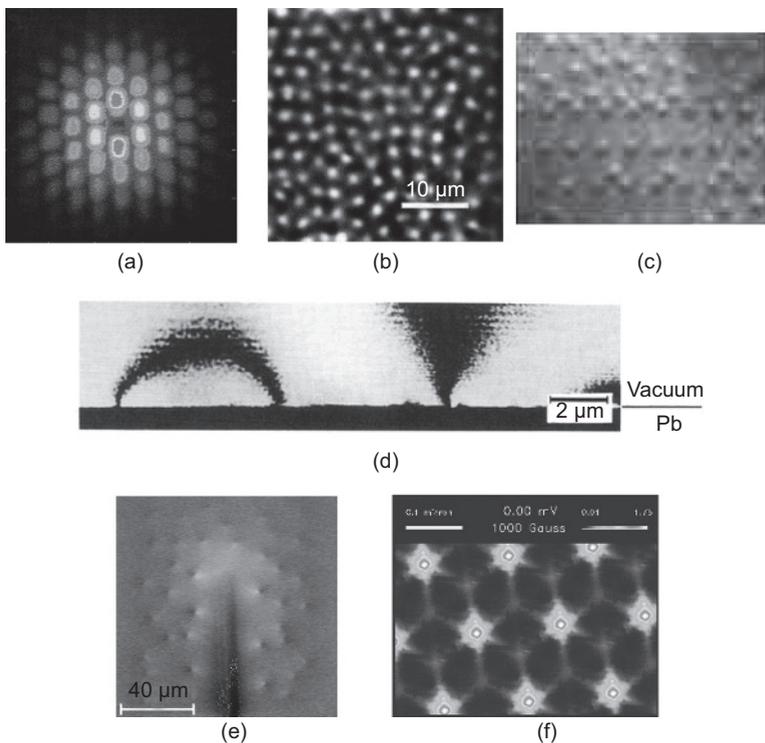
Heute kennt man eine Reihe von Verfahren, um magnetische Flusswirbel abzubilden. Die Verfahren ergänzen sich oft gegenseitig und liefern wertvolle Informationen über die Supraleitung. Wir wollen deshalb einige davon etwas näher besprechen.

Nach wie vor stellen die Neutronenbeugung und die Dekoration wichtige Techniken dar. Die Abb. 1.10a zeigt eine Beugungsstruktur, die am Institut Max von Laue – Paul Langevin in Grenoble durch Neutronenstreuung am Flussliniengitter in Niob gewonnen wurde. Das Beugungsbild gibt klar die Dreiecksstruktur des Flussliniengitters wieder.

Ein Verfahren, das Abbildungen magnetischer Strukturen im Ortsraum ermöglicht, ist die **Magnetooptik**. Hier nützt man den Faraday-Effekt aus. Wenn linear polarisiertes Licht durch eine dünne Schicht eines »Faraday-aktiven« Materials, z. B. Ferrit-Granat, tritt, wird die Polarisationssebene des Lichts durch ein in der Filmebene liegendes Magnetfeld gedreht. Man legt ein durchsichtiges Substrat, auf dem sich ein dünner Ferrit-Granat-Film befindet, auf eine supraleitende Probe und durchstrahlt die Anordnung mit polarisiertem und gut fokussiertem Licht. Das Licht wird am Supraleiter reflektiert, durchläuft nochmals den Ferrit-Granat-Film und wird dann in eine CCD-Kamera fokussiert. Das Magnetfeld von Flusswirbeln im Supraleiter dringt teilweise in den Ferrit-Granat-Film ein und dreht dort die Polarisationssebene des Lichts. Man bringt einen Analysator vor die CCD-Kamera, der nur Licht durchlässt, dessen Polarisation aus der ursprünglichen Richtung gedreht wurde und kann damit die Flusswirbel als helle Punkte erkennen, wie in Abb. 1.10b für die Verbindung NbSe<sub>2</sub> dargestellt [10]<sup>9</sup>. Das Verfahren erlaubt eine Ortsauflösung von unter 1  $\mu\text{m}$ . Man kann zurzeit etwa zehn Bilder pro Sekunde erstellen, so dass man sehr schön dynamische Prozesse beobachten kann. Leider ist das Verfahren zumindest derzeit auf Supraleiter beschränkt, deren Oberfläche sehr glatt ist und gut reflektiert.

<sup>9</sup> Man beachte, dass in diesem Fall das Vortexgitter stark gestört ist. Auf solche gestörten Gitter werden wir in Abschnitt 5.3.2 genauer eingehen.

Bei der **Lorentz-Mikroskopie** transmittiert man einen Elektronenstrahl durch eine dünne supraleitende Probe. Man benötigt hierbei sehr dünne Proben und eine hohe Energie der Elektronen, damit die Probe vom Strahl durchdrungen werden kann. In der Nähe eines Fluss Schlauchs erfahren die transmittierten Elektronen eine zusätzliche Lorentz-Kraft und der Elektronenstrahl wird durch den Magnetfeldgradienten eines Fluss Schlauchs leicht defokussiert. Man kann den durch die Fluss Schlauche hervorgerufenen Phasenkontrast außerhalb des eigentlichen Fokus des Transmissionselektronenmikroskops abbilden. Durch die Ablenkung erscheint jeder Wirbel als ein kreisförmiges Signal, das zur Hälfte hell und zur Hälfte dunkel ist. Aus diesem Wechsel von hell nach dunkel lässt sich ebenfalls die Polarität des Wirbels ermitteln. Die Lorentz-Mikroskopie erlaubt eine sehr schnelle Vortexabbildung, so dass man wie bei



**Abb. 1.10** Methoden zur Abbildung von Flussschläuchen: (a) Neutronen-Beugungsbild des Vortexgitters in Niob; (b) Magnetooptische Abbildung von Flusswirbeln in  $\text{NbSe}_2$  [10]; (c) Lorentz-Mikroskopie an Niob; (d) Elektronenholographie an Pb [12], (e) Tieftemperatur-Rasterelektronenmikroskopie an  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  [15] (f) Rastertunnelmikroskopie an  $\text{NbSe}_2$ . Abb. (a) mit freundlicher Genehmigung durch das Institut Max von Laue-Paul Langevin, Grenoble [9]. Abb. (b) mit Erlaubnis von [10]; © IOP Publishing 2001. All rights reserved. Abb. (c) mit freundlicher Genehmigung durch A. Tonomura, Fa. Hitachi Ltd., 2003. Abb. (d) mit Erlaubnis von [12], © 1989 American Physical Society. Abb. (e) mit Erlaubnis von [14], © 2004 AIP Publishing; Abb. (f) mit freundlicher Genehmigung durch Fa. Lucent Technologies Inc./ Bell Labs (2003).

der Magnetooptik regelrecht Filme aufnehmen kann, die die Bewegung der Flusswirbel zeigen [11]. Die Abb. 1.10c zeigt ein Bild aus einem derartigen Film, der an Niob gewonnen wurde. Bei dieser Probe waren kleine Mikrolöcher in den Supraleiter eingebracht, die ihrerseits ein quadratisches Gitter bilden. In der Abbildung sind die meisten der Mikrolöcher (»Antidots«) durch Flusswirbel »besetzt«, während einige weitere Wirbel zwischen den Antidots sitzen. Die Wirbel treten dabei im oberen Bildteil in die Probe ein und werden dann von den Antidots und den sich bereits im Supraleiter befindenden Wirbeln am weiteren Vordringen in die Probe gehindert.

Bei der **Elektronenholographie** steht die Wellennatur des Elektrons im Vordergrund. Ähnlich wie bei der optischen Holographie wird ein kohärenter Elektronenstrahl in eine Referenz- und eine Objektwelle aufgespalten, die später miteinander interferieren. Die relative Phasenlage der beiden Teilwellen kann durch ein Magnetfeld – genauer, durch den zwischen den beiden Teilwellen eingeschlossenen magnetischen Fluss – beeinflusst werden. Der für die Abbildung genutzte Effekt besitzt selbst eine starke Verwandtschaft mit der Flussquantisierung im Supraleiter. Wir werden ihn in Abschn. 1.5.4 genauer betrachten. In Abb. 1.10d ist das durch Flusswirbel verursachte Streufeld an der Oberfläche eines Bleifilms abgebildet [12]. Der Wechsel von hell auf dunkel in den Interferenzstreifen entspricht einem magnetischen Fluss von einem Flussquant. Im linken Bildteil schließt sich das Streufeld zwischen zwei Wirbeln entgegengesetzter Polarität, während sich das Streufeld im rechten Bildteil vom Supraleiter entfernt.

Bei der Abbildung mit dem **Tiefemperatur-Rasterelektronenmikroskop** (TTREM) rastert ein Elektronenstrahl über die zu untersuchende Probe und erwärmt diese lokal innerhalb eines etwa  $1\ \mu\text{m}$  durchmessenden Flecks um wenige Kelvin. Man misst dann eine elektrische Größe des Supraleiters, die sich durch diese Erwärmung ändert. Mit diesem Verfahren kann eine Vielzahl supraleitender Eigenschaften, wie etwa die Übergangstemperatur  $T_c$ , ortsaufgelöst dargestellt werden [13]. Im speziellen Fall der Flusswirbelabbildung wird das Magnetfeld des Wirbels durch ein supraleitendes Quanteninterferometer (engl. »dc SQUID« für **d**irect **c**urrent **S**uperconducting **Q**uantum **I**nterference **D**evice, vgl. Abschn. 1.5.4.1) detektiert [14]. Wenn der Elektronenstrahl nahe am Flusswirbel vorbeiläuft, werden die um die Wirbelachse fließenden Supraströme etwas verzerrt, was zu einer leichten Verschiebung der Achse der Wirbelströme zum Elektronenstrahl hin führt. Mit dieser Verschiebung ändert sich ebenfalls das vom Quanteninterferometer detektierte Magnetfeld des Wirbels, und diese Feldänderung bildet das kontrastgebende Signal. Eine typische Abbildung von Flusswirbeln im Hochtemperatursupraleiter  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  ist Abb. 1.10e dargestellt [15]. Die Flusswirbel befinden sich bei diesem Bild im Quanteninterferometer selbst. Jeder Wirbel wird ähnlich wie bei der Lorentz-Mikroskopie als ein kreisförmiges Hell-Dunkel-Signal angezeigt, das durch die Verschiebung des Flusswirbels zu verschiedenen Richtungen hin entsteht. Die dunkle Linie in der Bildmitte ist ein Schlitz im Quanteninterferometer, der den eigentlichen, magnetfeldempfindlichen Teil des Sensors bildet. Man beachte, dass die Anordnung der Flusswirbel sehr unregelmäßig ist. Der besondere Vorteil des Verfahrens ist, dass sich auch sehr kleine Bewegungen der Flusswirbel um ihre Gleichgewichtslage herum noch gut nachweisen lassen, da das SQUID bereits eine Änderung des magnetischen Flusses von einigen millionstel eines Flussquants detektiert. Solche

Änderungen treten beispielsweise dadurch auf, dass die Wirbel durch thermische Bewegung statistisch zwischen zwei Positionen hin- und herspringen. Diese Prozesse können das Auflösungsvermögen von SQUIDs stark herabsetzen, weshalb man sie mit Anordnungen wie der eben besprochenen detailliert untersucht.

Die letzte Gruppe von Abbildungsmethoden, die wir hier ansprechen wollen, sind die **Rastersondenverfahren**, bei denen ein geeigneter Detektor relativ zum Supraleiter bewegt wird. Der Detektor kann eine magnetische Spitze [16], eine Hall-Sonde [17] oder auch ein SQUID [18] sein. Insbesondere mit der letzten Methode wurde eine Reihe von Schlüsselexperimenten zum Verständnis der Hochtemperatursupraleitung durchgeführt, die wir in Abschn. 3.2.2 besprechen werden. Ähnlich wichtige Beiträge hat schließlich das Rastertunnelmikroskop geliefert. Hierbei wird eine unmagnetische metallische Spitze über die Probenoberfläche geführt. Der Abstand zwischen der Spitze und der Probenoberfläche ist so gering, dass Elektronen aufgrund des quantenmechanischen Tunneleffekts von der Probenoberfläche zur Spitze fließen können.

Im Gegensatz zu den obigen Methoden, die alle das magnetische Feld von Flusswirbeln detektierten, bildet man mit dem Rastertunnelmikroskop die Elektronenverteilung, genauer gesagt die Dichte der für die Elektronen quantenmechanisch erlaubten Zustände, ab [19]. Das Verfahren kann atomare Auflösung erreichen. Ein Beispiel ist in Abb. 1.10f gezeigt. Die Abbildung wurde von H. F. Hess und Mitarbeitern (Bell Laboratories, Fa. Lucent Technologies Inc.) an einem NbSe<sub>2</sub>-Einkristall gewonnen. Das angelegte Magnetfeld betrug 0.1 T. Wir werden später sehen, dass der Supraleiter nahe der Wirbelachse sozusagen normalleitend ist. In diesen Regionen fließen die größten Tunnelströme zwischen der Spitze und der Probe und die Achse der Wirbel erscheint hell.

Neben den bildgebenden Verfahren existiert eine Reihe weiterer Techniken, um den Vortorzustand zu charakterisieren. So wird bei der **Myonenspinresonanz** ( $\mu$ SR) der Supraleiter mit spinpolarisierten, üblicherweise positiv geladenen Myonen bestrahlt, die von einem Teilchenbeschleuniger erzeugt werden. Die Myonen werden im Supraleiter schnell gestoppt. Der Spin des Myons präzediert in den lokalen Magnetfeldern. Das Myon zerfällt nach ca. 2  $\mu$ s in zwei Neutrinos und ein Positron. Das Positron wird in Richtung des Myonenspins beim Zerfall emittiert. Dessen Detektion erlaubt damit Aussagen über die lokalen Magnetfelder im Inneren des Supraleiters und damit auch der Struktur des Flussliniengitters. Weitere indirekte Verfahren bestehen beispielsweise in der Analyse der spezifischen Wärme oder von Transportgrößen wie der thermischen Leitfähigkeit oder auch der elektrischen Leitfähigkeit, die bei genügend großen Strömen endlich wird (vgl. Kap. 5).

#### 1.2.4 Levitation in der Shubnikov-Phase

Ein Supraleiter kann auch in der Shubnikov-Phase levitieren. So wurde der in Abb. 1.6 verwendete Supraleiter YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7</sub> im Feld der Permanentmagneten eingekühlt und war von Flusswirbeln durchsetzt. Zum weiteren Verständnis ist wesentlich, dass die Flussschläuche im Supraleiter an Defekten verankert werden können. Die entsprechende Physik wird in Abschn. 5.3.2 genauer aufgegriffen.

Bei »**harten**« **Supraleitern** ist diese Verankerung besonders effektiv. Einmal verankert, werden sich die Flussschläuche nicht bewegen, solange die maximale Haftkraft der



**Abb. 1.11** Hängender Spielzeugschwebzug am Leibniz Institut für Festkörper- und Werkstoffforschung, Dresden [20] (Abbildung mit Erlaubnis von deGruyter).

Haftzentren nicht überschritten wird. Als Resultat versucht der harte Supraleiter, das Feld in seinem Inneren auf dem Wert zu halten, in dem er abgekühlt wurde.

Kühlt man ihn in einem gewissen Abstand über einem Permanentmagneten ab, so wirkt eine *anziehende* Kraft, wenn man den Supraleiter vom Magneten entfernen will. Genauso wirkt eine *abstoßende* Kraft, wenn man den Supraleiter näher an den Permanentmagneten drückt. Der harte Supraleiter versucht letztlich, den Abstand zum Magneten beizubehalten, in dem er eingekühlt wurde. Das Gleiche gilt für beliebige Bewegungsrichtungen. Sobald sich das äußere Feld ändert, wird der harte Supraleiter Abschirmströme so anwerfen, dass sich das Feld (bzw. Flussliniengitter) in seinem Inneren nicht ändert. Damit kann ein harter Supraleiter – und mit ihm eine Traglast – nicht nur wie in Abb. 1.6 auf einem Magneten schweben, sondern auch unter einem Magneten frei hängen oder auch beliebig schief gelagert sein. Der Effekt ist in Abb. 1.11 demonstriert. Hier wurden geeignet hergestellte Klötzchen aus  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  in einen Spielzeugszug montiert und diese Klötzchen in einem gewissen Arbeitsabstand von den Magneten, die die »Bahntrasse« bilden, abgekühlt. Entlang der Trasse kann sich der Zug praktisch reibungsfrei bewegen, da in dieser Richtung das Magnetfeld seinen Wert beibehält.

Mit diesem Spielzeugszug wurde auch ein besonderer Trick demonstriert, der den hängenden Zug davor bewahrt, nach Erwärmung über  $T_c$  nach unten zu fallen: Im Zug wurden Permanentmagnete so installiert, dass der Zug ohne Anwesenheit des Supraleiters an die Schiene gezogen würde. Genau dies passiert auch, wenn sich der Supraleiter erwärmt. Im supraleitenden Zustand wird aber der Zug – entgegen der Anziehung durch die Permanentmagneten – von der Schiene weggehalten und kann frei an ihr entlanggleiten.

### 1.3 Die Flussquantisierung in supraleitenden Ringen und Hohlzylindern

#### Abstract

In diesem Abschnitt werden wir anhand zweier Schlüsselexperimente sehen, dass auch der magnetische Fluss durch einen supraleitenden Ring oder Hohlzylinder quantisiert ist. Er nimmt nur ganzzahlige Vielfache des Flussquants  $\Phi_0$  an.

Betrachten wir nochmals das in Abb. 1.3 dargestellte Experiment. Durch einen Induktionsvorgang haben wir in einem supraleitenden Ring einen Dauerstrom angeworfen.

Wie groß ist der magnetische Fluss durch den Ring? Er ist gegeben durch das Produkt aus der Eigeninduktivität  $L$  des Rings und dem im Ring zirkulierenden Strom  $I$ ,  $\Phi = LI$ . Aus unseren Erfahrungen mit makroskopischen Systemen würden wir erwarten, dass wir bei Induktionsvorgängen durch eine geeignete Wahl des Magnetfelds jeden beliebigen Dauerstrom anwerfen können. Der magnetische Fluss durch den Ring könnte damit jeden beliebigen Wert annehmen. Auf der anderen Seite haben wir gesehen, dass im Inneren von Typ-II-Supraleitern Magnetfelder zu Schläuchen gebündelt werden, die jeweils einen Fluss von einem Flussquant  $\Phi_0$  tragen. Die Frage ist jetzt, ob das Flussquant auch beim supraleitenden Ring eine Rolle spielt. Diese Vermutung wurde bereits 1950 von Fritz London [21] ausgesprochen.

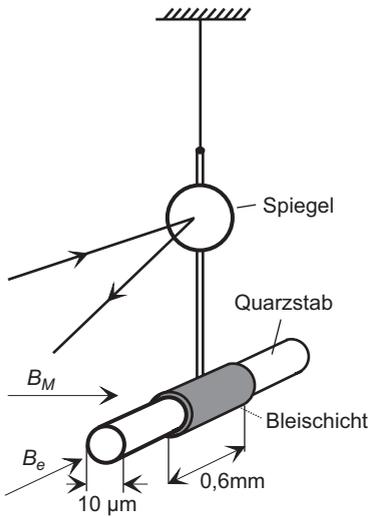
1961 wurden von zwei Gruppen – Doll und Näbauer [22] in München und Deaver und Fairbank [23] in Stanford – Messungen zur Flussquantisierung in supraleitenden Hohlzylindern publiziert, die klar zeigten, dass der magnetische Fluss durch den Zylinder in ganzzahligen Vielfachen des Flussquants  $\Phi_0$  auftritt. Diese Experimente hatten großen Einfluss auf die Entwicklung der Supraleitung. Wegen ihrer besonderen Bedeutung und nicht zuletzt als Musterbeispiele hervorragender Experimentierkunst sollen diese Versuche genauer beschrieben werden.

Um zu testen, ob die Flussquantisierung im supraleitenden Ring bzw. Hohlzylinder eine Rolle spielt, mussten mit verschiedenen Magnetfeldern Dauerströme angeworfen und der von ihnen erzeugte magnetische Fluss so genau bestimmt werden, dass eine Detektion des magnetischen Flusses durch den Ring mit einer Auflösung besser als  $\Phi_0$  möglich war. Wegen der Kleinheit des Flussquants sind diese Experimente äußerst schwierig. Um eine große relative Änderung des Flusses in verschiedenen Zuständen zu erhalten, muss man versuchen, den Fluss durch den Ring von der Größenordnung eines oder weniger  $\Phi_0$  zu haben. Dazu ist es erforderlich, recht kleine supraleitende Ringe zu verwenden, da sonst die erforderlichen Felder zur Erzeugung des Dauerstroms zu klein werden. Wir nennen diese Felder »Einfrierfelder«, da der Fluss, den sie durch die Öffnung des Ringes erzeugen, bei Eintritt der Supraleitung »eingefroren« wird. Für eine Öffnung von nur  $1 \text{ mm}^2$  wird ein Flussquant schon durch ein Feld von  $10^{-9} \text{ T}$  erzeugt.

Von beiden Gruppen wurden deshalb sehr kleine Proben in der Form dünner Röhrcchen mit einem Durchmesser von nur ca.  $10 \text{ }\mu\text{m}$  verwendet. Bei diesem Durchmesser ist zur Erzeugung eines Flussquants  $\Phi_0 = h/2e = 2,07 \cdot 10^{-15} \text{ Tm}^2$  ein Feld von  $\Phi_0/\pi r^2 = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ T}$  erforderlich. Solche Felder kann man bei sorgfältiger Abschirmung der Störfelder, z. B. des Erdfeldes, experimentell beherrschen.

Doll und Näbauer verwendeten Bleizylinder, die auf Quarzstäbchen aufgedampft waren (Abb. 1.12). In diesen Bleizylindern wird ein Dauerstrom in der bekannten Weise durch Abkühlen in dem zur Zylinderachse parallelen Einfrierfeld  $B_c$  und Abschalten dieses Felds nach Eintritt der Supraleitung bei  $T < T_c$  erzeugt. Der Dauerstrom macht den Bleizylinder zu einem Magneten. Die Größe des eingefrorenen Flusses kann im Prinzip aus dem Drehmoment bestimmt werden, das ein Messfeld  $B_M$ , senkrecht zur Zylinderachse gerichtet, auf die Probe ausübt. Dazu hängt die Probe an einem Quarzfaden. Der Ausschlag kann über einen Spiegel mit einem Lichtzeiger abgelesen werden. Die erreichbaren Drehmomente waren jedoch so klein, dass eine statische Bestimmung selbst bei sehr dünnen Quarzfäden aussichtslos erschien. Doll und Näbauer überwandern diese Schwierigkeit mit einer Messmethode, die man als Autoresonanzmethode bezeichnen kann.

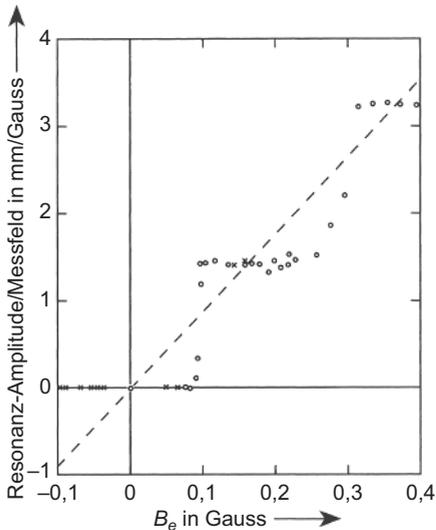
Sie verwendeten das kleine Drehmoment, das von dem Messfeld auf den Bleizylinder ausgeübt wird, zur Anregung einer Torsionsschwingung des Systems. Im Resonanzfall werden



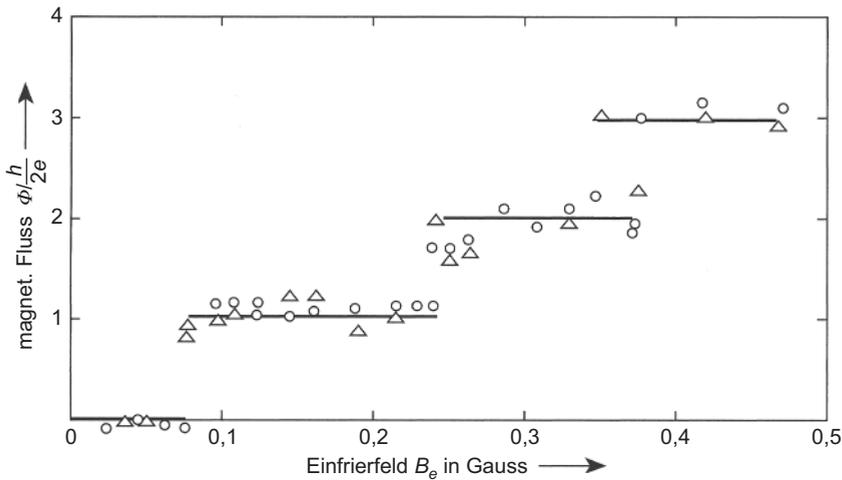
**Abb. 1.12** Schematische Darstellung des Messaufbaus von Doll und Näbauer (nach [22]). Das Quarzstäbchen mit dem kleinen Bleizylinder, der durch die aufgedampfte Schicht gebildet wird, schwingt in flüssigem Helium.

die Amplituden genügend groß, um sie bequem zu registrieren. Die Resonanzamplitude ist proportional zum erregenden Drehmoment, das bestimmt werden soll. Für die Anregung muss das Messfeld  $B_M$  mit der Frequenz der Schwingung umgepolt werden. Um sicher zu sein, dass die Anregung stets exakt mit der Resonanzfrequenz erfolgt, wurde die Umpolung von dem schwingenden System selbst über den Lichtzeiger und eine Photozelle gesteuert.

In der Abb. 1.13 sind Ergebnisse von Doll und Näbauer wiedergegeben. Als Ordinate ist die Resonanzamplitude dividiert durch das Messfeld, also eine Größe, die dem gesuchten Drehmoment proportional ist, aufgetragen. Die Abszisse gibt das jeweilige Einfrierfeld. Wäre der Fluss in dem supraleitenden Bleizylinder kontinuierlich variabel, so sollte auch die beobachtete Resonanzamplitude proportional zum Einfrierfeld variieren (gestrichelte Gerade in Abb. 1.13). Das Experiment zeigt deutlich ein anderes Verhalten. Bis zu einem Einfrierfeld von ca.  $1 \cdot 10^{-5}$  T



**Abb. 1.13** Ergebnisse von Doll und Näbauer zur Flussquantisierung in einem Pb-Zylinder (nach [22]).



**Abb. 1.14** Ergebnisse von Deaver und Fairbank zur Flussquantisierung in einem Sn-Zylinder. Der Zylinder hatte ca. 0,9 mm Länge, einen inneren Durchmesser von 13  $\mu\text{m}$  und eine Wandstärke von 1,5  $\mu\text{m}$  (nach [23]).

wird überhaupt kein Fluss eingefroren. Der supraleitende Bleizylinder nimmt den energetisch tiefliesten Zustand mit  $\Phi = 0$  ein. Erst bei Einfrierfeldern größer als  $1 \cdot 10^{-5}$  T wird ein Zustand mit eingefrorenem Fluss erzeugt. Er ist für alle Einfrierfelder zwischen  $1 \cdot 10^{-5}$  und ca.  $3 \cdot 10^{-5}$  T der gleiche. Die Resonanzamplitude ist in diesem Bereich konstant. Der aus dieser Amplitude und der Apparatekonstanten berechnete Fluss entspricht etwa einem Flussquant  $\Phi_0 = h/2e$ . Für größere Einfrierfelder werden weitere Quantenstufen beobachtet.

Dieses Experiment zeigt eindeutig, dass der magnetische Fluss durch einen supraleitenden Ring nur diskrete Werte  $\Phi = n \cdot \Phi_0$  annehmen kann.

Auch die Ergebnisse von Deaver und Fairbank – Abb. 1.14 gibt ein Beispiel – zeigten die Quantisierung des Magnetflusses durch einen supraleitenden Hohlzylinder und ergaben für das elementare Flussquant  $\Phi_0 = h/2e$ . Dabei verwendeten Deaver und Fairbank eine völlig andere Messmethode für den eingefrorenen Fluss. Sie bewegten den supraleitenden Zylinder mit einer Frequenz von 100 Hz um 1 mm in seiner Längsrichtung hin und her. Dadurch wurde in zwei kleinen, die Enden des Röhrchens umfassenden Messspulen eine Induktionsspannung erzeugt, die, genügend verstärkt, gemessen werden konnte. In der Abb. 1.14 ist der Fluss durch das Röhrchen in Einheiten von  $\Phi_0$  über dem Einfrierfeld aufgetragen. Deutlich sind auch hier die Zustände mit null, ein und zwei Flussquanten zu erkennen.

## 1.4 Supraleitung: ein makroskopisches Quantenphänomen

### Abstract

In Abschn. 1.4 werden wir sehen, dass sich die bislang eingeführten Phänomene – das Verschwinden des elektrischen Widerstands, der ideale Diamagnetismus sowie die Quantisierung des magnetischen Flusses in Einheiten des Flussquants  $\Phi_0$  – erklären lassen, wenn wir annehmen, dass sich im supraleitenden Zustand eine kohärente

Elektronmateriewelle mit wohldefinierter Phase ausgebildet hat. Wir beginnen mit der **Flussquantisierung** (genauer betrachten wir die sog. **Fluxoidquantisierung**) und wenden uns dann dem idealen Diamagnetismus zu. Im Anschluss werden wir diskutieren, warum es **zwei unterschiedliche Arten von Supraleitern** (Typ I bzw. Typ II) gibt. Abschließend betrachten wir das Verschwinden des elektrischen Widerstands. Auf dem Weg zur Erklärung dieser Phänomene werden wir die phänomenologischen **London-Gleichungen** kennenlernen sowie zwei wichtige charakteristische Längenskalen, die **London-Eindringtiefe** und die **Ginzburg-Landau-Kohärenzlänge**.

### 1.4.1 Fluxoid- und Flussquantisierung

Das Auftreten diskreter Zustände ist im Bereich der Atome nichts Ungewohntes. So sind die stationären Atomzustände beispielsweise durch eine Quantenbedingung für den Drehimpuls ausgezeichnet, der in ganzzahligen Vielfachen von  $\hbar = h/2\pi$  auftritt. Hinter dieser Drehimpulsquantisierung steht letztlich die Notwendigkeit, dass das Betragsquadrat der quantenmechanischen Wellenfunktion, das die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons angibt, eindeutig ist. Wenn wir uns in Gedanken um  $360^\circ$  um den Atomkern drehen und dabei die Wellenfunktion beobachten, dann muss deren Betrag nach unserer Rückkehr zum Startpunkt der gleiche sein wie beim Start. Die *Phase* der Wellenfunktion kann sich dabei aber um ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  geändert haben, da dies keinen Einfluss auf das Betragsquadrat hat.

Auch im Makroskopischen kann uns diese Situation begegnen. Stellen wir uns eine beliebige Welle vor, die ungedämpft in einem Ring mit Radius  $R$  umläuft. Die Welle kann stationär sein, wann immer eine ganze Zahl  $n$  von Wellenlängen  $\lambda$  in den Ring passt. Dies ergibt die Bedingung  $n \cdot \lambda = 2\pi R$  oder (ausgedrückt durch den Wellenvektor  $k = 2\pi/\lambda$ )  $kR = n$ . Wird diese Bedingung verletzt, dann interferiert sich die Welle nach wenigen Umläufen weg.

Wenden wir diese Gedanken nun auf eine Elektronenwelle an, die um den Ring läuft. Für eine vollständige Rechnung müssten wir die Schrödinger-Gleichung für die uns interessierende Geometrie lösen. Wir wollen aber darauf verzichten und stattdessen eine halbklassische Betrachtung durchführen, die uns ebenfalls alle wesentlichen Ergebnisse liefern wird.

Wir benötigen zunächst einen Zusammenhang zwischen dem Wellenvektor des Elektrons und seinem Impuls. Für ein ungeladenes Quantenteilchen ist dieser Zusammenhang nach de Broglie  $\vec{p}_{kin} = \hbar\vec{k}$ , wobei wir  $\vec{p}_{kin}$  als »**kinetischen Impuls**«  $m\vec{v}$  ( $m$ : Masse,  $\vec{v}$ : Geschwindigkeit des Teilchens) bezeichnen. Er bestimmt die kinetische Energie des Teilchens,  $E_{kin} = (\vec{p}_{kin})^2/2m$ . Für ein geladenes Teilchen wie das Elektron hängt der Wellenvektor  $\vec{k}$  nach den Regeln der Quantenmechanik zusätzlich vom sog. Vektorpotenzial  $\vec{A}$  ab. Dieses Vektorpotenzial ist mit dem Magnetfeld durch die Bedingung

$$\text{rot}\vec{A} = \vec{B} \quad (1-4)$$

verknüpft<sup>10</sup>. Wir definieren zunächst den »**kanonischen Impuls**«:

$$\vec{p}_{kan} = m\vec{v} + q\vec{A} \quad (1-5)$$

10 Die »Rotation«  $\text{rot}\vec{A}$  eines Vektors  $\vec{A}$  ist ebenfalls ein Vektor, dessen Komponenten  $(\text{rot}\vec{A})_x, \dots$  aus den Komponenten  $A_i$  auf folgende Weise gewonnen werden:  $(\text{rot}\vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$ ;  $(\text{rot}\vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$ ;  $(\text{rot}\vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$ .

wobei  $q$  die Ladung des Teilchens bezeichnet. Die Größe  $q\vec{A}$  bezeichnet man auch als »**Feldimpuls**«.

Der Zusammenhang zwischen Wellenvektor  $\vec{k}$  und  $\vec{p}_{kan}$  ist:

$$\vec{p}_{kan} = \hbar\vec{k} \quad (1-6)$$

Wir verlangen nun, dass sich eine ganze Zahl von Wellenlängen im Ring befindet. Hierzu integrieren wir  $\vec{k}$  auf einem Integrationsweg um den Ring herum und verlangen, dass dieses Integral ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  ist. Wir haben damit

$$n \cdot 2\pi = \oint \vec{k} d\vec{r} = \frac{1}{\hbar} \oint \vec{p}_{kan} d\vec{r} = \frac{m}{\hbar} \oint \vec{v} d\vec{r} + \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A} d\vec{r} \quad (1-7)$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite  $\oint \vec{A} d\vec{r}$  kann nach dem stokeschen Satz ersetzt werden durch das Flächenintegral  $\int_F \text{rot}\vec{A} d\vec{f}$  über die vom Ring eingeschlossene Fläche  $F$ .

Dieses Integral ist aber nichts anderes als der vom Ring eingeschlossene magnetische Fluss,  $\int_F \text{rot}\vec{A} d\vec{f} = \int_F \vec{B} d\vec{f} = \Phi$ . Damit können wir Gl. (1-7) umschreiben zu

$$n \cdot \frac{\hbar}{q} = \frac{m}{q} \oint \vec{v} d\vec{r} + \Phi \quad (1-8)$$

Hierbei haben wir Gl. (1-7) zusätzlich mit  $\hbar/q$  multipliziert und  $\hbar = h/2\pi$  verwendet.

Wir haben damit eine Quantenbedingung gefunden, die den magnetischen Fluss durch den Ring mit dem planckschen Wirkungsquantum und der Ladung des Teilchens verknüpft. Wenn das Wegintegral auf der rechten Seite von Gl. (1-8) konstant ist, dann ist der magnetische Fluss durch den Ring gerade ein ganzzahliges Vielfaches von  $h/q$ .

Bisher haben wir nur von *einem* Teilchen gesprochen. Was passiert aber, wenn sich alle oder zumindest viele Ladungsträger im gleichen Quantenzustand befinden? Wir können dann auch diese Ladungsträger durch eine einzige, kohärente Materiewelle beschreiben, die eine wohldefinierte Phase hat, und bei der alle Ladungsträger ihre Quantenzustände gemeinsam ändern. Die Gl. (1-8) gilt dann für diese kohärente Materiewelle.

Wir stehen jetzt allerdings vor dem Problem, dass Elektronen wie alle Quantenteilchen mit halbzahligen Spin dem Pauli-Prinzip gehorchen und unterschiedliche Quantenzustände einnehmen müssen. Der Ausweg besteht darin, dass sich je zwei Elektronen auf eine trickreiche Art, die wir in Kap. 3 näher beschreiben werden, in ihrer Bewegung zu einem Paar – dem **Cooper-Paar** – zusammenschließen. Aus diesen Paaren lässt sich die kohärente Materiewelle aufbauen. Sie ist letztlich verknüpft mit der Bewegung der Schwerpunkte der Paare, die für alle Paare die gleiche ist.

Wir wollen nun Gl. (1-8) weiter umformen und sehen, welche Aussagen wir über den supraleitenden Zustand gewinnen können. Zunächst verknüpfen wir die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  mit der Suprastromdichte  $\vec{j}_s$  via  $\vec{j}_s = qn_s\vec{v}$ . Hierbei bezeichnen wir mit  $n_s$  die Dichte der supraleitenden Ladungsträger. Um allgemein zu bleiben, behalten wir für den Moment die Bezeichnung  $q$  für die Ladung bei.

Wir können damit Gl. (1-8) umschreiben:

$$n \cdot \frac{\hbar}{q} = \frac{m}{q^2 n_s} \oint \vec{j}_s d\vec{r} + \Phi \quad (1-9)$$

Wir wollen jetzt noch die Abkürzung  $\frac{m}{q^2 n_s} = \mu_0 \lambda_L^2$  benutzen. Die Länge

$$\lambda_L = \sqrt{m/(\mu_0 q^2 n_s)} \quad (1-10)$$

ist die **London-Eindringtiefe**, der wir im Folgenden häufig begegnen werden. Wir erhalten damit:

$$n \cdot \frac{\hbar}{q} = \mu_0 \lambda_L^2 \oint \vec{j}_s d\vec{r} + \Phi \quad (1-11)$$

Die Beziehung in Gl. (1-11) ist die sog. »**Fluxoidquantisierung**«, der Ausdruck auf der rechten Seite bezeichnet das »**Fluxoid**«. Oft ist die Suprastromdichte und damit das Wegintegral auf der rechten Seite der Gl. (1-11) vernachlässigbar klein. Dies gilt insbesondere, wenn wir einen dickwandigen supraleitenden Zylinder oder Ring aus einem Typ-I-Supraleiter betrachten. Das Magnetfeld wird durch den Meißner-Ochsenfeld-Effekt aus dem Supraleiter gedrängt. Die Supraströme fließen nur an der Oberfläche des Supraleiters und klingen exponentiell nach innen ab, wie wir weiter unten sehen werden. Wir können den Integrationsweg, auf dem Gl. (1-11) auszuwerten ist, tief ins Innere des Rings legen. Das Integral über die Stromdichte ist dann exponentiell klein und wir erhalten in guter Näherung

$$\Phi \approx n \cdot \frac{\hbar}{q} \quad (1-12)$$

Dies ist aber gerade die Bedingung für die **Quantisierung des magnetischen Flusses**, und die experimentelle Beobachtung  $\Phi = n \cdot \frac{\hbar}{2|e|} = n \cdot \Phi_0$  zeigt klar, dass die supraleitenden Ladungsträger die Ladung  $|q| = 2e$  tragen. Über das Vorzeichen der Ladungsträger kann die Beobachtung der Flussquantisierung allerdings keine Aussage machen, da in diesem Experiment nicht die Richtung des *Teilchenstroms* bestimmt wurde. Für viele Supraleiter werden die Cooper-Paare durch Elektronen gebildet, d. h.,  $q = -2e$ . Insbesondere bei vielen Kupratsupraleitern liegt aber Löcherleitung vor, ähnlich wie man dies von Halbleitern kennt. Hier ist  $q = +2e$ .

### 1.4.2 Der ideale Diamagnetismus

Wenden wir uns nun einem massiven Supraleiter ohne Loch zu. Nehmen wir an, der Supraleiter sei überall in seinem Inneren supraleitend. Wir können uns dann einen Integrationsweg mit einem beliebigen Radius um einen beliebigen Punkt gelegt vorstellen und wir erhalten dann ebenso wie beim Ring die Gl. (1-11). Jetzt können wir uns aber einen Integrationsweg mit einem immer kleineren Radius  $r$  vorstellen. Wenn wir vernünftigerweise unterstellen, dass die Suprastromdichte auf dem Integrationsweg nicht unendlich groß werden kann, dann geht aber das Wegintegral über  $\vec{j}_s$  gegen null, da der Umfang des Rings gegen null geht. Ebenso geht der magnetische Fluss  $\Phi$ , der ja das Magnetfeld  $\vec{B}$  über die vom Integrationsweg eingeschlossene und immer kleiner werdende Fläche integriert, gegen null, vorausgesetzt das Magnetfeld kann nicht unendlich groß werden. Damit verschwindet aber die rechte Seite der Gl. (1-11) und wir müssen schließen, dass unter der Voraussetzung eines kontinuierlichen Supraleiters auch die linke Seite verschwinden muss, d. h.,  $n = 0$ .

Wir lassen jetzt den Integrationsweg wieder endlich werden und haben mit  $n = 0$  die Bedingung

$$\mu_0 \lambda_L^2 \oint \vec{j}_s d\vec{r} = -\Phi = - \int_F \vec{B} d\vec{f} \quad (1-13)$$

Wir können, wiederum unter Verwendung des stokeschen Satzes, diese Bedingung auch als

$$\vec{B} = -\mu_0 \lambda_L^2 \text{rot} \vec{j}_s \quad (1-14)$$

schreiben.

Die Gl. (1-14) ist die **zweite London-Gleichung**, die wir weiter unten noch auf eine etwas andere Art erhalten werden. Sie ist eine von zwei Grundgleichungen, mit der die Brüder F. und H. London bereits 1935 eine sehr erfolgreiche phänomenologische Beschreibung der Supraleitung aufbauen konnten [24].

Verwenden wir zunächst noch die Maxwell-Gleichung  $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$ , die wir mit  $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ ,  $\mu \approx 1$  für unmagnetische Supraleiter und  $\vec{j} = \vec{j}_s$  zu

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \quad (1-15)$$

umschreiben. Wir bilden zu beiden Seiten der Gl. (1-15) nochmals die Rotation, eliminieren  $\text{rot} \vec{j}_s$  mit Hilfe der Gl. (1-14) und verwenden weiter die Beziehung<sup>11</sup>  $\text{rot}(\text{rot} \vec{B}) = \text{grad}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B}$  und die Maxwell-Gleichung  $\text{div} \vec{B} = 0$ . Hiermit erhalten wir

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B} \quad (1-16)$$

Diese Differentialgleichung gibt den Meißner-Ochsenfeld-Effekt wieder, wie wir uns an einem einfachen Beispiel klarmachen können. Betrachten wir dazu die Oberfläche eines sehr großen Supraleiters, die bei der Koordinate  $x = 0$  liegt und sich in  $(y, z)$ -Richtung unendlich weit ausdehnen soll. Der Supraleiter liege im Halbraum  $x > 0$  (vgl. Abb. 1.15).

Es sei ein Magnetfeld  $\vec{B}_a = (0, 0, B_a)$  von außen an den Supraleiter angelegt. Wegen der Symmetrie unseres Problems (supraleitender Halbraum) können wir annehmen, dass auch im Supraleiter nur die  $z$ -Komponente des Magnetfelds von null verschieden ist und eine Funktion allein der  $x$ -Koordinate sein wird. Gl. (1-16) liefert dann für  $B_z(x)$  im Supraleiter, d. h. für  $x > 0$ :

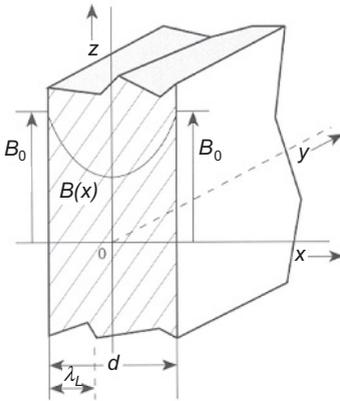
$$\frac{d^2 B_z(x)}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_L^2} B_z(x) \quad (1-17)$$

Die Gleichung hat die Lösung

$$B_z(x) = B_z(0) \cdot \exp(-x/\lambda_L) \quad (1-18)$$

<sup>11</sup> »div« ist die Divergenz eines Vektors,  $\text{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$ , »grad« der Gradient,  $\text{grad} f(x, y, z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ , und  $\Delta$  der Laplace-Operator,  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ . Er ist in Gleichung (1-16) auf die drei Komponenten von  $\vec{B}$  anzuwenden.





**Abb. 1.16** Ortsabhängigkeit des Magnetfelds in einer dünnen supraleitenden Schicht. Bei dem angenommenen Verhältnis  $d/\lambda_L = 3$  nimmt das Magnetfeld nur noch auf etwa den halben Wert ab.

Auch für diesen Fall können wir den Verlauf des Magnetfelds im Supraleiter durch die Differentialgleichung (1-17) berechnen, wobei nun aber das Magnetfeld an *beiden* Grenzflächen bei  $x = \pm d/2$  gleich dem angelegten Feld  $B_a$  sein soll. Um die Lösung zu finden, müssen wir auch die mit  $x$  anwachsende Exponentialfunktion berücksichtigen und wählen als Ansatz die Linearkombination

$$B_z(x) = B_1 e^{-x/\lambda_L} + B_2 e^{+x/\lambda_L} \quad (1-19)$$

Für  $x = d/2$  erhalten wir:

$$B_a = B_z\left(\frac{d}{2}\right) = B_1 e^{-d/2\lambda_L} + B_2 e^{+d/2\lambda_L} \quad (1-20)$$

Da das Problem bei der Wahl unseres Koordinatensystems symmetrisch ist in  $x$  und  $-x$ , muss gelten:  $B_1 = B_2 = B^*$ . Wir erhalten:

$$B_a = B^* (e^{d/2\lambda_L} + e^{-d/2\lambda_L}) \text{ bzw. } B^* = \frac{B_a}{2 \cosh d/2\lambda_L} \quad (1-21)$$

Damit wird im Supraleiter

$$B_z(x) = B_a \frac{\cosh \frac{x}{\lambda_L}}{\cosh \frac{d}{2\lambda_L}} \quad (1-22)$$

Dieser Verlauf ist in Abb. 1.16 eingezeichnet. Für  $d \gg \lambda_L$  fällt das Feld exponentiell von beiden Oberflächen her im Supraleiter ab und das Platteninnere ist nahezu feldfrei. Für eine kleiner werdende Dicke  $d$  wird die Feldvariation aber immer kleiner, weil sich die Abschirmschicht nicht mehr voll aufbauen kann. Für  $d \ll \lambda_L$  schließlich haben wir nur noch eine sehr kleine Feldvariation über die Dicke. Das Magnetfeld durchdringt die supraleitende Schicht praktisch homogen.

Wir geben für den Fall des supraleitenden Halbraums und der supraleitenden Platte noch die Abschirmströme an, die im Supraleiter fließen. Wir erhalten die Abschirmstromdichte aus dem Verlauf des Magnetfelds mit Hilfe der Maxwell-Gleichung Gl. (1-15), die sich für  $\vec{B} = (0, 0, B_z(x))$  zur Gleichung  $\mu_0 j_{s,y} = -\frac{dB_z}{dx}$  reduziert. Die

Stromdichte hat also nur eine  $y$ -Komponente. Diese nimmt wie das Magnetfeld von der Oberfläche ins Innere des Supraleiters ab.

Für den Fall des supraleitenden Halbraums ergibt sich  $j_{s,y} = \frac{B_a}{\mu_0 \lambda_L} e^{-x/\lambda_L}$ . Die Stromdichte an der Oberfläche beträgt damit  $\frac{B_a}{\mu_0 \lambda_L}$ . Für den Fall der dünnen Platte finden wir  $j_{s,y} = -\frac{B_a}{\mu_0 \lambda_L} \frac{\sinh(x/\lambda_L)}{\cosh(d/2\lambda_L)}$ , was sich an der Oberfläche bei  $x = -d/2$  zu  $j_{s,y}(-d/2) = \frac{B_a}{\mu_0 \lambda_L} \tanh(d/2\lambda_L)$  reduziert. Die Supraströme bei  $x = d/2$  sind das Negative dieses Werts.

Die Supraströme fließen damit bei  $x = -d/2$  in die Bildebene hinein und bei  $x = d/2$  aus dieser heraus. Beachten wir noch, dass sich bei einer endlich großen Platte diese Ströme schließen müssen, dann sehen wir, dass wir hier einen Kreisstrom beobachten, der nahe der Oberfläche um die Platte fließt. Das von diesem Strom erzeugte Magnetfeld ist dem angelegten Feld entgegengerichtet; die Platte verhält sich also wie ein Diamagnet.

### Methoden 1.3 Experimentelle Bestimmung der London-Eindringtiefe

Wie kann man die London-Eindringtiefe experimentell bestimmen? Im Prinzip muss bei allen Methoden der Einfluss der dünnen Abschirmschicht auf das diamagnetische Verhalten gemessen werden. Verschiedene Verfahren sind verwendet worden.

So kann man beispielsweise die **Magnetisierung**<sup>13</sup> immer dünnerer Platten bestimmen [25]. Solange die Plattendicke wesentlich größer ist als die Eindringtiefe, wird man dabei eine nahezu ideale diamagnetische Antwort finden, die aber abnimmt, wenn die Plattendicke in den Bereich von  $\lambda_L$  kommt. Ein weiteres Verfahren ist die in Abschn. 1.2 erwähnte **Myonenspinresonanz**, die auf lokale Magnetfelder sensitiv ist. Zur Bestimmung der Eindringtiefe im Meißner-Zustand implantiert man die Myonen durch Variation der Implantationsenergie in verschiedenen Tiefen und erhält so  $\lambda_L$  [26].

Weitere Methoden setzen an der Shubnikov-Phase an und bestimmen  $\lambda_L$  aus der Größe von Flusswirbeln.

Für die Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Eindringtiefe sind nur Relativmessungen erforderlich. Man kann etwa die **Resonanzfrequenz eines Hohlraums** aus supraleitendem Material bestimmen. Die Resonanzfrequenz hängt empfindlich von der Geometrie ab. Wenn die Eindringtiefe mit der Temperatur variiert, so bedeutet das eine Variation der Geometrie des Hohlraums und damit der Resonanzfrequenz, woraus die Änderung von  $\lambda_L$  bestimmt werden kann [27]. Wir werden experimentelle Ergebnisse in Abschn. 4.5 vorstellen.

Ein wesentliches Interesse in der genauen Bestimmung der Eindringtiefe, etwa als Funktion von Temperatur, Magnetfeld oder der Frequenz der anregenden Mikrowellen liegt in ihrer Abhängigkeit von der Dichte der supraleitenden Ladungsträger. Sie kann damit als ein Sensor zur Untersuchung der Supraleitung dienen.

13 Die Magnetisierung kann dadurch bestimmt werden, dass man die Probe im Inneren einer Spule anbringt und deren Induktivität bestimmt. Wird aufgrund des Meißner-Effekts das Feld aus dem Supraleiter gedrängt, verringert sich die Permeabilität der Spule. Aus dieser Änderung kann die Magnetisierung bestimmt werden.

### 1.4.3 Warum gibt es Typ-I- und Typ-II-Supraleiter?

Kommen wir nun zurück zu unseren Ausführungen über die makroskopische Wellenfunktion. Die bloße Annahme, dass im supraleitenden Zustand die Ladungsträger eine kohärente Materiewelle bilden, hat uns bereits das Phänomen der Fluxoid- bzw. Flussquantisierung und den idealen Diamagnetismus geliefert. Wir haben außerdem eine fundamentale Längenskala der Supraleitung gefunden, die London-Eindringtiefe.

Wie kommt es zum Unterschied zwischen Typ-I- und Typ-II-Supraleitung bzw. zur Ausbildung von Flusswirbeln? Die Annahme eines kontinuierlichen Supraleiters hatte uns zur zweiten London-Gleichung und damit zum idealen Diamagnetismus geführt. Bei Typ-I-Supraleitern ist dieser Zustand realisiert, solange das angelegte Feld einen gewissen kritischen Wert nicht überschreitet. Höhere Felder führen zum Zusammenbruch der Supraleitung. Für eine Diskussion des kritischen Felds müssen wir die Energieverhältnisse im Supraleiter genauer betrachten. Wir werden dies im Kap. 4 tun. Es wird sich zeigen, dass es letztlich die Konkurrenz zweier Energien – der Energiegewinn durch die Kondensation der Cooper-Paare und der Energieaufwand durch die Verdrängung des magnetischen Felds – ist, die zum Übergang vom supraleitenden in den normalleitenden Zustand führt.

Auch in Typ-II-Supraleitern bildet sich bei kleinen Magnetfeldern die Meißner-Phase aus. Beim unteren kritischen Feld kondensieren aber Flusswirbel im Material. Wenn wir nochmals die Gl. (1-11) betrachten, dann sehen wir, dass die Portionierung des magnetischen Flusses in Einheiten<sup>14</sup>  $\pm 1 \Phi_0$  Zuständen mit der Quantenzahl  $n = \pm 1$  entspricht. Die Diskussion des Meißner-Zustands hat uns aber auch gezeigt, dass dann der Supraleiter nicht kontinuierlich supraleitend bleiben kann. Wir müssen vielmehr annehmen, dass, ähnlich wie beim Ring, die Achse des Flusswirbels nicht supraleitend ist. Dann können wir uns den Integrationsweg nicht auf einen Punkt zusammengezogen denken, und die Ableitung der zweiten London-Gleichung mit  $n = 0$ , welche zum Meißner-Ochsenfeldefekt geführt hatte, verliert ihre Gültigkeit. Tatsächlich zeigt eine genauere Betrachtung im Rahmen der Ginzburg-Landau-Theorie, dass die Supraleitung auf einer Längenskala  $\xi_{GL}$ , der **Ginzburg-Landau-Kohärenzlänge**, zur Achse eines Flusswirbels hin verschwindet (siehe auch Abschn. 4.7.3). Diese Länge ist je nach supraleitendem Material von der Größenordnung einiger Nanometer bis einiger Hundert Nanometer und ähnlich wie die London-Eindringtiefe insbesondere nahe  $T_c$  stark temperaturabhängig.

In der Shubnikov-Phase ist also der Supraleiter von einer Vielzahl »normalleitender Achsen« durchzogen. Warum trägt aber jeder Flusswirbel genau  $1 \Phi_0$ ? Auch hier müssen die Energieverhältnisse im Supraleiter genau betrachtet werden. Im Wesentlichen stellt sich heraus, dass ein Typ-II-Supraleiter einen energetischen Vorteil davon hat, oberhalb des unteren kritischen Felds eine Grenzfläche Normalleiter–Supraleiter aufzubauen (vgl. Abschn. 4.7). Er versucht dann, möglichst viele dieser Grenzflächen zu realisieren. Dies wird durch die Wahl des kleinsten Quantenzustands  $n = \pm 1$  erreicht, da dann die maximale Zahl von Wirbeln und damit von Grenzflächen in Achsennähe entsteht.

<sup>14</sup> Das Vorzeichen ist entsprechend der Magnetfeldrichtung zu wählen.

Wir könnten Gl. (1-11) benutzen, um auszurechnen, wie weit das Magnetfeld eines Flussschlauchs in den Supraleiter hineinreicht. Wir wollen dies nicht im Detail durchführen. Es stellt sich heraus, dass auch hier das Feld nahezu exponentiell von der Achse her mit der Längenskala  $\lambda_L$  abfällt. Wir können also sagen, dass ein Flussschlauch einen magnetischen Radius  $\lambda_L$  hat.

Hiermit können wir auch das untere kritische Feld  $B_{c1}$  grob abschätzen. Jeder Flussschlauch trägt einen Fluss  $\Phi_0$  und wir benötigen mindestens ein Magnetfeld  $B_{c1} \approx \Phi_0 / (\text{Fläche des Flussschlauchs}) \approx \Phi_0 / (\pi \lambda_L^2)$ , um diesen Fluss zu erzeugen. Für  $\lambda_L = 100 \text{ nm}$  liefert dies einen Wert von etwa 66 mT für  $B_{c1}$ .

Für höhere Magnetfelder werden die Flusslinien immer dichter gepackt, bis sie nahe  $B_{c2}$  einen Abstand von der Größenordnung der Ginzburg-Landau-Kohärenzlänge  $\xi_{GL}$  haben. Für eine einfache Abschätzung von  $B_{c2}$  nehmen wir einen zylinderförmigen normalleitenden Kern des Flussschlauchs an. Die Supraleitung sollte ungefähr dann verschwinden, wenn der Abstand zwischen den Flussquanten gleich dem Kerndurchmesser ist, also für  $B_{c2} \approx \Phi_0 / (\pi \xi_{GL}^2)$ . Die genaue Theorie liefert einen um einen Faktor zwei kleineren Wert<sup>15</sup>. Man beachte, dass  $B_{c2}$  je nach dem Zahlenwert für  $\xi_{GL}$  sehr groß werden kann. Für  $\xi_{GL} = 2 \text{ nm}$  erhält man etwa einen Wert von über 80 T! Derart hohe Werte werden bei Hochtemperatursupraleitern erreicht oder sogar überschritten.

#### 1.4.4 Widerstand null

Zum Schluss des Abschn. 1.4 wollen wir uns fragen, wie die makroskopische Wellenfunktion die Dauerströme und damit Widerstand null – das namensgebende Phänomen der Supraleitung – erklären kann.

Betrachten wir hierzu die zweite London-Gleichung, siehe Gl. (1-14),  $\vec{B} = -\mu_0 \lambda_L^2 \text{rot} \vec{j}_s$  und benutzen zusätzlich die Maxwell-Gleichung

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\dot{\vec{B}} \quad (1-23)$$

die die Rotation des elektrischen Felds mit der zeitlichen Änderung des Magnetfelds verbindet. Wir leiten Gl. (1-14) nach der Zeit ab und setzen dies in Gl. (1-23) ein. Dann ergibt sich  $\text{rot} \vec{E} = \mu_0 \lambda_L^2 \text{rot} \dot{\vec{j}}_s$  oder, bis auf Integrationskonstanten,

$$\vec{E} = \mu_0 \lambda_L^2 \dot{\vec{j}}_s \quad (1-24)$$

Dies ist die **erste London-Gleichung**. Für einen zeitlich *konstanten* Suprastrom ist die rechte Seite von Gl. (1-24) null, und damit haben wir einen Stromfluss ohne elektrisches Feld und damit ohne Widerstand.

Die Gl. (1-24) besagt auch, dass die Suprastromdichte bei Anwesenheit eines elektrischen Felds mit der Zeit immer mehr anwächst. Dies ist für einen Suprastrom sinnvoll, da dann die supraleitenden Ladungsträger durch das elektrische Feld immer weiter beschleunigt

<sup>15</sup> Dieser Zusammenhang wird häufig genutzt, um  $\xi_{GL}$  zu bestimmen. Eine weitere Möglichkeit besteht in der Analyse der Leitfähigkeit in der Nähe der Sprungtemperatur (siehe auch Abschnitt 4.8).

werden. Auf der anderen Seite kann die Suprastromdichte nicht bis ins Unendliche anwachsen. Man benötigt weitergehende Energiebetrachtungen, um die maximal erreichbare Suprastromdichte zu finden. Wir werden diese im Rahmen der Ginzburg-Landau-Theorie in Abschn. 5.1 durchführen.

Wir hätten die erste London-Gleichung auch elementar in einer klassischen Betrachtung erhalten können, wenn wir sehen, dass bei Stromfluss ohne Widerstand die supraleitenden Ladungsträger ohne (inelastische) Stoßprozesse fließen müssen. Bei Anwesenheit eines elektrischen Felds haben wir dann die Kraftgleichung  $m\dot{\vec{v}} = q\vec{E}$  als Ausgangspunkt. Wir benutzen  $\vec{j}_s = qn_s\vec{v}$  und finden  $\vec{E} = \frac{m}{q^2n_s}\dot{\vec{j}}_s$ , was sich mit der Definition, siehe Gl. (1-10), der London-Eindringtiefe in die Form der Gl. (1-24) bringen lässt.

Die obige Argumentation zeigt zumindest formal, dass auch Widerstand null eine Konsequenz der makroskopischen Wellenfunktion ist. Wir können aber auch fragen, welche Prozesse zu einem endlichen Widerstand bzw. zum Abklingen eines Dauerstroms führen können. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf Gleichströme in einem Typ-I-Supraleiter, d. h., wir lassen dissipative Effekte durch Flusswirbelbewegungen oder durch im Wechselfeld beschleunigte ungepaarte Elektronen außer Acht.

Betrachten wir die stark vereinfachte Situation der Abb. 1.17. Wir nehmen an, wir hätten einen metallischen Ring, in dem sich lediglich vier Elektronen befinden. Die Elektronen sollen sich nur entlang des Rings bewegen können. In der Zeichnung haben wir diesen Ring aufgeschnitten dargestellt, d. h., wir haben ein Drahtstück gezeichnet, dessen beiden Enden miteinander identisch sein sollen. Man spricht hier auch von periodischen Randbedingungen. Ein Elektron, das den gezeichneten Ring beispielsweise auf der linken Seite verlässt, erscheint wieder auf der rechten Seite.

Im normalleitenden Zustand ( $T > T_c$ ) sei zunächst der Ringstrom gleich null. Dies bedeutet aber nicht, dass die Elektronen ruhen. Nach dem Pauli-Prinzip müssen die Elektronen unterschiedliche Quantenzustände einnehmen. Vernachlässigen wir den Elektronenspin, so müssen die vier Elektronen unterschiedliche Wellenvektoren und damit Geschwindigkeiten annehmen. Wir haben diese Geschwindigkeiten durch Pfeile unterschiedlicher

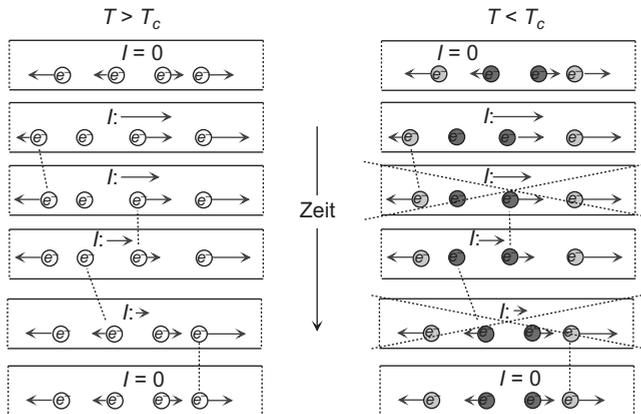


Abb. 1.17 Zur Entstehung des Suprastroms: vier Elektronen in einem ringförmigen Draht.

Länge bzw. Richtung dargestellt, die an den Elektronen ansetzen. Die Quantenmechanik verlangt, dass sich die Wellenzahlen und damit die Geschwindigkeiten der Elektronen in ganzzahligen Schritten ändern. Dies ist bei der Pfeillänge berücksichtigt. Soll netto kein Ringstrom fließen, dann müssen sich die Geschwindigkeiten der vier Elektronen zu null addieren, dies ist die in der Abbildung links oben gezeichnete Situation. Wenn wir andererseits einen Ringstrom angeworfen haben, dann bewegen sich die Elektronen vorzugsweise in eine Richtung. Diese Situation ist im zweiten Bild von oben dargestellt. Wir haben hier zur Geschwindigkeit jedes Elektrons eine Einheit addiert und den Gesamtstrom als Summenpfeil mit eingezeichnet<sup>16</sup>.

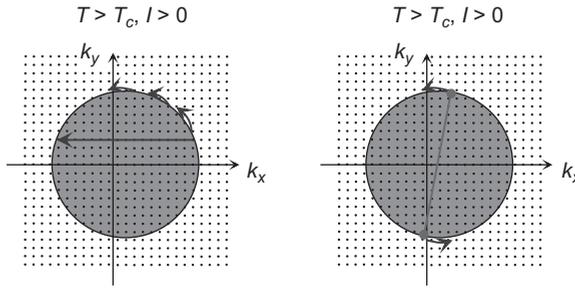
Überlässt man nun das System sich selbst, werden die Elektronen sehr schnell durch Streuprozesse ihren Quantenzustand in Richtung möglichst kleiner Gesamtenergie ändern, so dass nach kurzer Zeit der Ringstrom abgeklungen ist. Einige dieser Streuprozesse sind in der Abbildung angedeutet, wobei wir das jeweils streuende Elektron durch eine gestrichelte Linie gekennzeichnet haben. Hierbei kann sich der Gesamtstrom in Schritten von einer Einheit ändern.

Die makroskopische Wellenfunktion zeichnet sich dadurch aus, dass die Schwerpunkte aller Cooper-Paare den gleichen Impuls bzw. den gleichen Wellenvektor haben. Wir haben zur Illustration auf der rechten Seite der Abb. 1.17 die vier Elektronen zu zwei Cooper-Paaren verbunden und hell- bzw. dunkelgrau gekennzeichnet. Man beachte, dass in den beiden oberen Bildern der rechten Seite die beiden Paare jeweils die gleiche Schwerpunktschwindigkeit haben, die für den Strom  $I = 0$  bei null liegt. Im zweiten Bild weist der Geschwindigkeitsvektor beider Paare eine Einheit nach rechts. Eine Reihe von Streuprozessen, die für  $T > T_c$  zum Abklingen des Stroms führten, funktionieren nun nicht mehr, da sie die Bedingung verletzen, dass die Schwerpunktschwindigkeit der beiden Paare die gleiche sein muss. Bei einem Übergang eines Elektrons müssen die anderen Elektronen ihren Quantenzustand so einstellen, dass alle Paare auch weiterhin die gleiche Schwerpunktschwindigkeit besitzen. Der Gesamtstrom muss sich in Schritten von mindestens zwei Einheiten ändern, bis der Zustand  $I = 0$  wieder erreicht ist. Ganz analog muss sich bei  $N$  Paaren der Gesamtstrom in Schritten von  $N$  Einheiten ändern. Für  $N = 2$  wären diese Ereignisse sicher nicht besonders unwahrscheinlich. Für  $10^{20}$  Elektronen bzw. Cooper-Paare ist die Wahrscheinlichkeit eines solchen simultanen Prozesses jedoch extrem klein, der Strom klingt nicht ab.

Wir können die obige Betrachtung auch etwas realistischer im Bild der Fermi-Kugel darstellen. In Abb. 1.18 sind zwei Dimensionen  $k_x, k_y$  des  $\vec{k}$ -Raums gezeichnet. Die erlaubten, diskreten  $\vec{k}$ -Werte sind durch einzelne Punkte angedeutet, die allerdings in einem übertrieben großen Abstand gezeichnet sind. Die Elektronen besetzen zumindest bei  $T = 0$  die niedrigsten Energiezustände – die Fermi-Kugel in 3D, entsprechend einem Kreis in der  $(k_x, k_y)$ -Ebene. Ohne Nettostromfluss ist diese Kugel um den Nullpunkt zentriert. Fließt ein Nettostrom in  $x$ -Richtung, ist die Fermi-Kugel dagegen entlang  $k_x$  leicht ausgelenkt, da ja über alle Elektronen summiert eine Nettobewegung in Stromrichtung übrigbleiben muss<sup>17</sup>. Diese Auslenkung ist in Abb. 1.18 stark übertrieben dargestellt.

16 Wir ignorieren hier das *negative* Vorzeichen der Elektronenladung. Andernfalls müssten wir Strom- und Geschwindigkeitsvektoren in entgegengesetzte Richtungen zeichnen.

17 Auch in dieser Darstellung ignorieren wir das negative Vorzeichen der Elektronenladung.



**Abb. 1.18** Zur Entstehung des Suprastroms: Stromtransport und Abklingen des Dauerstroms im Bild der Fermi-Kugel.

Im normalleitenden Zustand können die Elektronen unter Beachtung des Pauli-Prinzips im Wesentlichen unabhängig voneinander in niedrigere Energiezustände streuen (durch die Pfeile angedeutet) und die Fermi-Kugel relaxiert schnell in den Ursprung zurück, d. h., der Kreisstrom klingt schnell ab. Im supraleitenden Zustand sind die Paare dagegen bezüglich des Mittelpunkts der Fermi-Kugel korreliert. Sie können lediglich um die Kugel herumstreuen, was aber nicht zu einer Verschiebung des Kugelmittelpunkts und damit nicht zu einem Abklingen des Kreisstroms führt. Wir haben damit einen Dauerstrom.

Die einfachste Möglichkeit, den Kreisstrom in einem Ring mit vielen Elektronen abzu-bremsen, besteht darin, die Paarkorrelationen in einem möglichst kleinen Volumen des Rings kurzfristig durch eine **Fluktuation** aufzuheben. Dieses Volumen wäre dann kurzfristig normalleitend und der Ringstrom könnte leicht zurückgehen. Wir wollen die Wahr-scheinlichkeit eines solchen Prozesses sehr grob abschätzen.

Die Längenskala, auf der man die Supraleitung unterdrücken kann, ist die Ginzburg-Landau-Kohärenzlänge  $\xi_{GL}$ , die wir bereits im Zusammenhang mit Flusswirbeln in Typ-II-Supraleitern erwähnt haben. Das kleinste Volumen, das kurzfristig normalleitend werden kann, ist dann durch den Drahtquerschnitt mal  $\xi_{GL}$  gegeben, falls der Drahtquerschnitt  $\xi_{GL}$  nicht überschreitet. Nehmen wir an, das Volumen, das wir normalleitend machen müssen, sei gerade  $V_c = \xi_{GL}^3$ . Wie viele Cooper-Paare sind in diesem Volumen? Die Elektronen-dichte sei  $n$  und es sei ein Anteil  $a$  aller Elektronen gepaart. Wir haben dann eine Zahl von  $N_c = an\xi_{GL}^3/2$  im Volumen  $\xi_{GL}^3$ . Im Rahmen der BCS-Theorie ergibt sich, dass der Anteil  $a$  an Elektronen, die effektiv an der Cooper-Paarung teilnehmen, in der Größenordnung von  $\Delta_0/E_F$  ist, mit der Fermi-Energie  $E_F$  und der sog. Energielücke  $\Delta_0$ , die für metallische Supraleiter wie Nb oder Pb in der Größenordnung von 1 meV ist.  $E_F$  ist in der Größenordnung 1 eV. Man hat dann einen Anteil  $a$  von etwa  $10^{-3}$ . Nehmen wir  $n = 10^{23}/\text{cm}^3$  und  $\xi_{GL} \approx 100$  nm an, dann haben wir etwa  $10^5$  Cooper-Paare, die wir durch die Fluktuation in den normalleitenden Zustand bringen müssen. Die Kondensationsenergie pro Paar ist ebenfalls in der Größenordnung von 1 meV. Der obige Prozess kostet damit eine Energie  $E_c$  von gut  $10^2$  eV. Die Thermodynamik sagt uns, dass die Wahrscheinlichkeit für diesen Vorgang proportional zum Boltzmann-Faktor  $\exp(-E_c/k_B T)$  ist. Nehmen wir eine Temperatur von 1 K. Dann ist  $k_B T \approx 0,08$  meV und das Verhältnis  $E_c/k_B T$  etwa  $10^6$ . Der Boltzmann-Faktor beträgt dann etwa  $\exp(-10^6)$ !

Es sei hier angemerkt, dass eine genaue Analyse der Fluktuationseffekte, die zum Auftreten eines endlichen Widerstands in einem dünnen supraleitenden Draht führen, wesentlich komplizierter ist als gerade eben dargestellt [28, 29]. Jedoch erhält man auch hier die exponentielle Abhängigkeit von der Kondensationsenergie innerhalb eines Kohärenzvolumens. Diese Abhängigkeit wurde durch Messung des Widerstands sehr dünner einkristalliner Zinndrähte (sog. Whisker) nahe  $T_c = 3,7$  K getestet [30, 31]. Innerhalb eines Millikelvins fiel der Widerstand exponentiell um sechs Größenordnungen. Extrapoliert man dieses Verhalten zu tieferen Temperaturen, dann wird die Wahrscheinlichkeit für das kurzfristige Zusammenbrechen der Supraleitung so verschwindend gering, dass wir getrost vom Widerstand null sprechen können.

Für Hochtemperatursupraleiter ist die Kondensationsenergie pro Paar in etwa eine Größenordnung höher als bei Nb oder Pb, allerdings ist das Volumen  $V_c$  wesentlich kleiner. Die Ginzburg-Landau-Kohärenzlänge ist hier anisotrop. Sie beträgt in zwei Raumrichtungen in etwa 1–2 nm und ist in der dritten Raumrichtung kleiner als 0,3 nm. Bei tiefen Temperaturen haben wir hier mitunter weniger als zehn Cooper-Paare im Volumen  $V_c$ . Der Boltzmann-Faktor ist dann bei  $T = 1$  K immerhin von der Größenordnung  $\exp(-10^2)$ .

Fluktuationseffekte sind bei Hochtemperatursupraleitern in der Tat häufig nicht vernachlässigbar und führen zu einer Reihe interessanter Erscheinungen, insbesondere im Zusammenhang mit Flusswirbeln. Wir werden hierauf in den Kap. 4 und 5 genauer eingehen.

## 1.5 Quanteninterferenzen

### Abstract

Wir haben im vorangegangenen Abschn. gesehen, dass uns die Annahme einer makroskopischen Materiewelle mit wohldefinierter Phase zu den zentralen Erscheinungen der Supraleitung – dem Verschwinden des elektrischen Widerstands, dem idealen Diamagnetismus sowie der Fluxoidquantisierung – führt. Die Frage ist jetzt, ob sich die Kohärenz der Materiewelle im Supraleiter direkt nachweisen lässt. In der Optik manifestiert sich der Wellencharakter von Licht sehr elegant durch Beugungserscheinungen bzw. Interferenz. Jeder kennt die Interferenzstreifen, die beispielsweise Laserlicht beim Durchgang durch einen Einzelspalt oder einem Doppelspalt auf einem Schirm hinter dem Spalt erzeugt. Wir werden in diesem Abschnitt sehen, dass analoge Erscheinungen auch im Supraleiter beobachtet werden können, wobei ein wichtiges Bauelement der Supraleitung – der **Josephson-Kontakt** – eine zentrale Rolle spielen wird. Zur Hinführung auf die Thematik wollen wir zunächst (Abschn. 1.5.1) einige klassische Interferenzerscheinungen rekapitulieren, wobei wir sowohl auf **räumliche** wie auch auf **zeitliche Interferenzen** eingehen werden. In Abschn. 1.5.2 werden wir uns den Josephson-Kontakten zuwenden und die zur Beschreibung relevanten »**Josephson-Gleichungen**« auf der Basis allgemeiner Prinzipien herleiten. In diesem Abschnitt werden wir auch Methoden zur Herstellung von Josephson-Kontakten kennenlernen. Im Anschluss (Abschn. 1.5.3) werden wir Experimente zur Beobachtung der zeitlichen Interferenz von Materiewellen ansprechen. Der Abschn. 1.5.4 wird sich zunächst ausführlich mit der räumlichen Interferenz der kohärenten Materiewellen im Supraleiter beschäftigen. Abschließend werden

wir zur Vertiefung ein Interferometer beschreiben, das die Interferenz einzelner Elektronenwellen nutzt.

### 1.5.1 Allgemeines zu Interferenzen

Zum Thema »**räumliche Interferenz**« dürfte die Beugung von Lichtwellen an einem Einzelspalt oder einem Doppelspalt allgemein bekannt sein. Etwas weitergehend betrachten wir an dieser Stelle zunächst ein spezielles optisches Interferometer – das **Sagnac-Interferometer**, das in Abb. 1.19 schematisch dargestellt ist. Ein Laserstrahl wird durch einen halbdurchlässigen Spiegel so aufgespalten, dass er in beiden Richtungen eine Ringstrecke durchläuft, die durch drei weitere Spiegel realisiert wird. Wenn die beiden Teilwellen mit der gleichen Phasenlage konstruktiv miteinander interferieren, dann erreichen die beiden Teilwellen mit der gleichen Phase den Detektor und ein großes Signal kann nachgewiesen werden. Das Interessante am Sagnac-Interferometer ist, dass es auf eine Rotation des Messaufbaus empfindlich ist. Rotiert der Aufbau z. B. im Uhrzeigersinn, dann laufen die Spiegel dem links herumlaufenden Strahl entgegen, aber dem rechts herumlaufenden Strahl davon. Der rechts herumlaufende Strahl muss also bis zur Auskopplung in den Detektor eine größere Wegstrecke zurücklegen als der links herumlaufende und als Resultat entsteht ein Gangunterschied zwischen den Teilstrahlen am Detektor. Das nachgewiesene Signal wird kleiner. Mit immer weiterwachsender Rotationsgeschwindigkeit des Messaufbaus wird das Signal schließlich zwischen einem Maximalwert und einem Minimalwert periodisch variieren. Diese Abhängigkeit des Detektorsignals von der Rotationsgeschwindigkeit des Aufbaus erlaubt, das Sagnac-Interferometer als Gyroskop zum Nachweis von Drehbewegungen einzusetzen. Bei Supraleitern werden wir mit dem dc SQUID ein analoges Interferometer kennenlernen, das aber auf Änderungen des magnetischen Flusses anstelle von Änderungen von Drehbewegungen empfindlich ist.

Man kann die Wellennatur auch durch »**zeitliche Interferenz**« beobachten. Stellen wir uns vor, dass zwei Wellen unterschiedlicher Frequenz interferieren und beobachten an einem bestimmten Ort, z. B. bei  $x = 0$ , die Gesamtamplitude aus beiden Teilwellen. Immer dann, wenn die beiden Wellen in Phase sind, ist die Amplitude der Welle gleich der Summe der Amplituden der beiden Teilwellen. Die Gesamtamplitude ist gleich der Differenz der Amplituden der beiden Teilwellen, wenn diese außer Phase sind. Wir beobachten also,

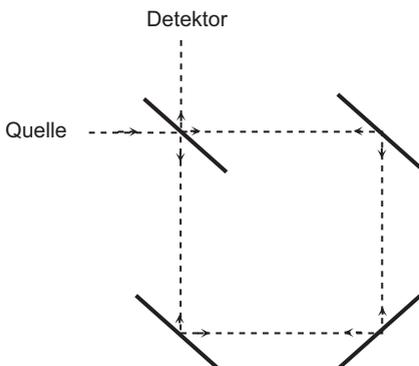


Abb. 1.19 Das optische Sagnac-Interferometer.

dass die Amplitude der Gesamtwelle periodisch mit der Zeit oszilliert, wobei die Frequenz gerade durch die Differenz der Oszillationsfrequenzen der beiden Teilwellen gegeben ist. Bei supraleitenden Josephson-Kontakten wird uns die zeitliche Interferenz in Form von **Josephson-Wechselströmen** begegnen.

Zur genaueren Erklärung müssen wir zunächst den Josephson-Effekt im Detail diskutieren.

### 1.5.2 Josephson-Ströme und die Josephson-Gleichungen

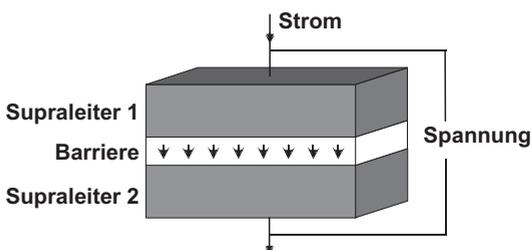
Denken wir uns zunächst zwei Supraleiter, die wir in Form einer Sandwichstruktur zusammenbringen. Die Anordnung ist in Abb. 1.20 schematisch gezeichnet. Zwischen den beiden Supraleitern sei eine nichtsupraleitende Barriere, z. B. ein Isolator. Wenn die Barriere sehr dünn (Größenordnung: wenige Nanometer) wird, können Elektronen von einem Supraleiter zum anderen gelangen, obwohl sich eine nichtleitende Schicht zwischen den beiden Metallen befindet. Die Ursache ist der quantenmechanische Tunneleffekt: Die Wellenfunktion, die die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Elektrons beschreibt, »leckt« etwas aus dem metallischen Bereich heraus. Bringen wir ein zweites Metall in diese Zone, dann kann das Elektron von Metall 1 zum Metall 2 »tunneln«, und wir können einen Strom über die Sandwichanordnung schicken. Dieser Tunneleffekt ist ein sehr grundlegendes Phänomen in der Quantenmechanik. Es ist beispielsweise auch beim Alphazerfall von Atomkernen sehr wichtig.

Durch die tunnelnden Elektronen bzw. Cooper-Paare werden die beiden Supraleiter miteinander gekoppelt und man kann einen schwachen Suprastrom – den Josephson-Strom – über die Barriere schicken. Dieser Strom wurde von Brian D. Josephson erstmals 1962 in einer theoretischen Arbeit beschrieben [32]. Der Josephson-Strom hat eine Reihe ganz erstaunlicher Eigenschaften, die unmittelbar mit der Phase der makroskopischen Wellenfunktion des supraleitenden Zustands verknüpft sind. Josephson erhielt für seine Entdeckung 1973 den Nobelpreis.

Wir werden sehen, dass der Josephson-Strom proportional zum Sinus der Differenz der Phasen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  der makroskopischen Wellenfunktionen der beiden Supraleiter ist. Genauer gesagt, gilt:

$$I_s = I_c \cdot \sin\gamma \quad (1-25)$$

wobei  $\gamma$  die sog. **eichinvariante Phasendifferenz** ist:



**Abb. 1.20** Sandwichanordnung von zwei durch eine dünne Barriere getrennten Supraleitern.

$$\gamma = \varphi_2 - \varphi_1 - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_1^2 \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (1-26)$$

Hierbei ist das Wegintegral über das Vektorpotenzial über die Barriere hinweg von Supraleiter 1 zum Supraleiter 2 zu nehmen.

Die Gl. (1-25) ist die **erste Josephson-Gleichung**. Die Konstante  $I_c$  wird als kritischer Strom bezeichnet. Geteilt durch die Fläche des Kontakts ergibt sich die kritische Stromdichte  $j_c$ . Sie liegt bei tiefen Temperaturen typischerweise im Bereich von  $10^2$  bis  $10^4$  A/cm<sup>2</sup>.

Wenn wir eine Gleichspannung  $U$  an das Sandwich anlegen können, wie in Abb. 1.20 gezeichnet, dann wächst, wie wir weiter unten im Detail sehen werden, die eichinvariante Phasendifferenz mit der Zeit an und wir beobachten einen hochfrequenten Wechselstrom, dessen Frequenz durch

$$f_J = \frac{U}{\Phi_0} = U \cdot \frac{2e}{h} \quad (1-27)$$

gegeben ist. Im Josephson-Wechselstrom sehen wir die zeitliche Interferenz der Wellenfunktionen der beiden Supraleiter. Der genaue Zusammenhang zwischen eichinvarianter Phasendifferenz  $\gamma$  und angelegter Spannung  $U$  wird durch die **zweite Josephson-Gleichung**

$$\dot{\gamma} = \frac{2\pi}{\Phi_0} U \quad (1-28)$$

beschrieben, die wir ebenso wie die erste Josephson-Gleichung im Detail herleiten werden.

Die Frequenz des Josephson-Wechselstroms ist also zur angelegten Gleichspannung proportional und die Proportionalitätskonstante ist das Flussquant  $\Phi_0$ . Es ergibt sich ein Zahlenwert von ca. 483,6 GHz pro mV angelegter Spannung. Dieser hohe Wert und die Tatsache, dass die Oszillationsfrequenz mit der angelegten Spannung durchgestimmt werden kann, machen Josephson-Kontakte interessant als Oszillatoren für Frequenzen im hohen Gigahertzbereich oder sogar im Terahertzbereich. Umgekehrt erlaubt die Tatsache, dass mit Gl. (1-27) Spannung und Frequenz durch die beiden fundamentalen Naturkonstanten  $h$  und  $e$  verknüpft sind, das Volt über die Frequenz des Josephson-Wechselstroms zu definieren und Josephson-Kontakte als Spannungsstandards zu verwenden. Wir werden auf die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten von Josephson-Kontakten in den Kap. 6 und 7 eingehen.

Betrachten wir nun die Eigenschaften des Josephson-Stroms etwas genauer im Bild der makroskopischen Wellenfunktion. Wie im oben beschriebenen Fall einzelner Elektronen können wir uns auch hier vorstellen, dass die kohärente Materiewelle aus dem Supraleiter herausleckt und damit die beiden supraleitenden Bereiche koppelt.

Wegen der großen Bedeutung des Josephson-Effekts wollen wir die zugrunde liegenden Josephson-Gleichungen auf zwei verschiedene Arten herleiten.

In der **ersten Herleitung**, die auf Richard Feynman zurückgeht [33], betrachten wir zwei schwach gekoppelte quantenmechanische Systeme und lösen näherungsweise die Schrödinger-Gleichung für dieses Problem. Wir vernachlässigen dabei für den Moment Magnetfeldeffekte.

Die beiden *getrennten* Systeme sollen durch die beiden Wellenfunktionen  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  beschrieben werden. Es gilt dann gemäß der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung für die zeitliche Änderung der beiden Wellenfunktionen

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar} E_1 \Psi_1 \quad (1-29a)$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar} E_2 \Psi_2 \quad (1-29b)$$

Wenn eine schwache Kopplung der Systeme vorliegt, so wird die zeitliche Änderung von  $\Psi_1$  auch durch  $\Psi_2$  beeinflusst werden und ebenso die von  $\Psi_2$  durch  $\Psi_1$ . Diese Situation können wir dadurch erfassen, dass wir in den Gleichungen (1-29a) und (1-29b) eine zusätzliche Kopplung einführen:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar} (E_1 \Psi_1 + K \Psi_2) \quad (1-30a)$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = \frac{-i}{\hbar} (E_2 \Psi_2 + K \Psi_1) \quad (1-30b)$$

In unserem Fall bedeutet die Kopplung, dass Cooper-Paare zwischen den Supraleitern 1 und 2 ausgetauscht werden können. Die Stärke des Austausches, der symmetrisch ist, wird durch die Konstante  $K$  festgelegt.

Eine Besonderheit der beiden schwach gekoppelten Supraleiter gegenüber anderen Zweizustandssystemen in der Quantenmechanik (z. B.  $H_2^+$ -Molekül) besteht darin, dass  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  makroskopisch mit einer großen Zahl von Teilchen besetzte Zustände beschreiben. Wir können dann das Quadrat der Amplitude als Teilchendichte  $n_s$  für die Dichte der Cooper-Paare auffassen. Wir dürfen also schreiben:

$$\Psi_1 = \sqrt{n_{s1}} e^{i\varphi_1}; \quad \Psi_2 = \sqrt{n_{s2}} e^{i\varphi_2} \quad (1-31)$$

Hierbei sind  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  die Phasen der Wellenfunktionen  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$ .

Wenn wir diese Wellenfunktionen in Gl. (1-30a) und (1-30b) einsetzen, so erhalten wir:

$$\frac{\dot{n}_{s1}}{2\sqrt{n_{s1}}} e^{i\varphi_1} + i\sqrt{n_{s1}} e^{i\varphi_1} \cdot \dot{\varphi}_1 = -\frac{i}{\hbar} \{E_1 \sqrt{n_{s1}} e^{i\varphi_1} + K \sqrt{n_{s2}} e^{i\varphi_2}\} \quad (1-32a)$$

$$\frac{\dot{n}_{s2}}{2\sqrt{n_{s2}}} e^{i\varphi_2} + i\sqrt{n_{s2}} e^{i\varphi_2} \cdot \dot{\varphi}_2 = -\frac{i}{\hbar} \{E_2 \sqrt{n_{s2}} e^{i\varphi_2} + K \sqrt{n_{s1}} e^{i\varphi_1}\} \quad (1-32b)$$

Die Trennung von Real- und Imaginärteil liefert:

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{n}_{s1}}{\sqrt{n_{s1}}} = \frac{K}{\hbar} \sqrt{n_{s2}} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (1-33a)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{n}_{s2}}{\sqrt{n_{s2}}} = \frac{K}{\hbar} \sqrt{n_{s1}} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (1-33b)$$

$$i\sqrt{n_{s1}} \dot{\varphi}_1 = -\frac{i}{\hbar} \{E_1 \sqrt{n_{s1}} + K \sqrt{n_{s2}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\} \quad (1-34a)$$

$$i\sqrt{n_{s2}} \dot{\varphi}_2 = -\frac{i}{\hbar} \{E_2 \sqrt{n_{s2}} + K \sqrt{n_{s1}} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\} \quad (1-34b)$$

Wenn wir nun noch bedenken, dass für den Austausch der Cooper-Paare zwischen 1 und 2 immer  $\dot{n}_{s1} = -\dot{n}_{s2}$  sein muss, und der Einfachheit halber zwei gleiche Supraleiter vorzusetzen (d. h.,  $n_{s1} = n_{s2}$ ), so erhalten wir aus den Gl. (1-33a) und (1-33b) die Differentialgleichung

$$\dot{n}_{s1} = \frac{2K}{\hbar} n_{s1} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = -\dot{n}_{s2} \quad (1-35)$$

Die zeitliche Änderung der Teilchendichte in 1 multipliziert mit dem Volumen  $V$  von 1 ergibt die Änderung der Teilchenzahl und damit den Teilchenstrom durch den Kontakt. Den elektrischen Strom  $I_s$  erhält man durch Multiplikation des Teilchenstroms mit der Ladung  $2e$  jedes einzelnen Teilchens. Damit haben wir:

$$I_s = I_c \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (1-36)$$

mit

$$I_c = \frac{2K \cdot 2e}{\hbar} \cdot V \cdot n_s = \frac{4\pi K}{\Phi_0} \cdot V \cdot n_s \quad (1-37)$$

Dies ist die erste Josephson-Gleichung, wenn wir das Vektorpotenzial  $\vec{A}$  gleich null setzen. Wir hatten ja Magnetfeldeffekte außer Acht gelassen, so dass dieser Schritt in Ordnung ist. Beim Übergang von  $\dot{n}_s$  zum Strom im Kontakt müssen wir außerdem daran denken, dass die beiden Supraleiter mit einer Stromquelle verbunden sind, die durch Nachlieferung oder Abnahme der Ladungen dafür sorgt, dass  $n_s$  in den Supraleitern konstant bleibt.

Aus den Gl. (1-34a) und (1-34b) erhalten wir eine Differentialgleichung für die zeitliche Änderung der Phasendifferenz. Es wird mit  $n_{s1} = n_{s2}$  und  $E_2 - E_1 = eU$ :

$$\frac{d}{dt}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{2eU}{\hbar} = \frac{2\pi}{\Phi_0} U \quad (1-38)$$

Dies ist die zweite Josephson-Gleichung für  $\vec{A} = 0$ . Demnach wächst für eine zeitlich konstante Spannung  $U = \text{const.}$  die Phasendifferenz linear mit der Zeit an:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\Phi_0} U \cdot t + \varphi(t=0) \quad (1-39)$$

Das bedeutet aber, dass in dem Kontakt entsprechend der ersten Josephson-Gleichung ein Wechselstrom auftritt, dessen Frequenz  $f$  durch Gl. (1-27) gegeben ist.

Die **zweite Ableitung** der Josephson-Gleichungen, die wir hier betrachten wollen, geht in Teilen auf L. D. Landau zurück [34]. Sie benutzt lediglich sehr **allgemeine Symmetrie- und Invarianzprinzipien** und hebt damit den großen Gültigkeitsbereich des Josephson-Effekts hervor.

Überlegen wir zunächst qualitativ, wie Suprastromdichte und Phase innerhalb eines homogen supraleitenden Drahts zusammenhängen<sup>18</sup>. Der Strom soll in  $z$ -Richtung fließen. Es liegt nahe, dass wir die Suprastromdichte als  $j_{s,z} = 2e \cdot n_s v_z$  schreiben. Wir hatten diese Beziehung ja schon bei der Ableitung der Fluxoidquantisierung benutzt.

<sup>18</sup> Diese qualitative Überlegung geht etwas unsanft mit der Quantenmechanik um, liefert aber das richtige Ergebnis.

Eliminieren wir jetzt  $v_z$  unter Verwendung des kanonischen Impulses, Gl. (1-5), so erhalten wir  $j_{s,z} = \frac{q}{m} \cdot n_s (p_{kan,z} - qA_z)$  oder, wenn wir  $\vec{p}_{kan} = \hbar\vec{k}$  benutzen,  $j_{s,z} = \frac{q}{m} \cdot n_s \cdot (\hbar k_z - qA_z)$ .

Wir betrachten eine Materiewelle der Form  $\Psi = \Psi_0 e^{i\varphi} = \Psi_0 e^{i\vec{k}\vec{x}}$  und schreiben anstelle von  $k_z$  den Ausdruck  $\varphi' \equiv \frac{d\varphi}{dz}$  (Differentiation der Phase  $\varphi = \vec{k}\vec{x}$  nach  $z$  ergibt gerade  $k_z$ ). Damit erhalten wir

$$j_{s,z} = \frac{q}{m} \cdot n_s \cdot (\hbar\varphi' - qA_z) \tag{1-40}$$

Nun definieren wir

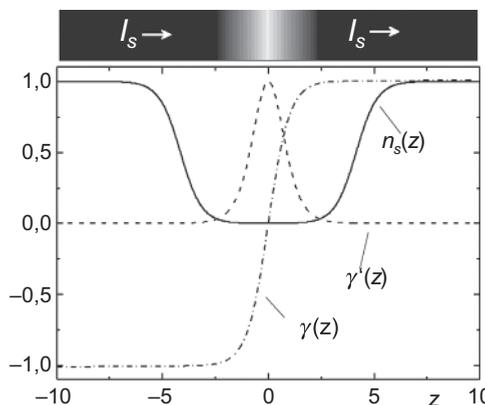
$$\gamma(z) = \varphi(z) - \frac{q}{\hbar} \int_0^z A_z dz \tag{1-41}$$

und erhalten

$$j_{s,z} = \frac{q\hbar}{m} \cdot n_s \cdot \gamma' \tag{1-42}$$

Was passiert, wenn unser supraleitender Draht eine dünne Schwachstelle enthält, an der die Cooper-Paar-Dichte stark reduziert ist? Diese Geometrie ist in Abb. 1.21 schematisch dargestellt.

Der Strom, den wir durch den Draht schicken, muss überall den gleichen Wert haben. Wenn wir annehmen, dass die Suprastromdichte über den Drahtquerschnitt konstant ist, dann muss in Gl. (1-42) das Produkt  $n_s \gamma'$  überall den gleichen Wert haben. Wenn aber an der Schwachstelle  $n_s$  stark reduziert ist, dann muss  $\gamma'(z)$  dort wesentlich größer sein als im Rest des Drahts. Wenn aber  $\gamma'(z)$  an der Schwachstelle ein scharfes Maximum aufweist, dann ändert sich  $\gamma(z)$  dort sehr schnell von einem Wert  $\gamma_1$  auf einen deutlich größeren Wert  $\gamma_2$ .



**Abb. 1.21** Zur Ableitung der Josephson-Gleichungen: Wir betrachten einen dünnen supraleitenden Draht mit einer Schwachstelle bei  $z = 0$ , an der die Cooper-Paar-Dichte  $n_s$  stark reduziert ist. Die Stromerhaltung fordert  $n_s(z) \cdot \gamma'(z) = const.$ , was zu einer Spitze in  $\gamma'(z)$  und zu einer Stufe in  $\gamma(z)$  führt. Im Beispiel haben wir zur Illustration folgende »Testfunktionen« verwendet:  $n_s(z) = 1/\gamma'(z) = 1/[1.001 - \tanh^2(z)]$ ,  $const. = 0,001$ . Für  $\gamma(z)$  erhält man  $\gamma(z) = \tanh(z) + 0,001 \cdot z$ . Im Bereich der Schwachstelle ändert sich  $\gamma(z)$  sehr schnell von  $-1$  auf  $1$ .

Mittels Gl. (1-41) können wir den Phasensprung an der Barriere als

$$\gamma = \gamma(z_2) - \gamma(z_1) = \varphi(z_2) - \varphi(z_1) - \frac{q}{\hbar} \int_{z_1}^{z_2} A_z dz \quad (1-43)$$

darstellen, wobei  $z_1$  eine Koordinate in Supraleiter 1 vor der Barriere und  $z_2$  eine Koordinate in Supraleiter 2 hinter der Barriere bezeichnen. Die Gl. (1-43) hat genau die Form der Gl. (1-26).

Wenn wir die Ortsabhängigkeit  $n_s(z)$  vorgeben, dann ist der Suprastrom über die Barriere eine Funktion des Phasensprungs  $\gamma$ , also  $I_s = I_s(\gamma)$ . Nun sollte eine Änderung einer Phasendifferenz um  $2\pi$  aber zur gleichen Wellenfunktion und damit zum gleichen Wert für den Suprastrom über die Barriere führen. Wir können damit  $I_s$  als eine Summe von Sinus- und Cosinustermen (eine Fourier-Reihe) darstellen:

$$I_s(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{cn} \sin(n\gamma) + \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{I}_{cn} \cos(n\gamma) \quad (1-44)$$

Hierbei sind die  $I_{cn}$  und  $\tilde{I}_{cn}$  die Entwicklungskoeffizienten der Funktion  $I_s(\gamma)$ . Man beachte, dass mikroskopische Details, wie etwa die Beschaffenheit der Barriere oder die Temperaturabhängigkeit der Cooper-Paar-Dichte, in diesen Entwicklungskoeffizienten stecken. Die Periodizität von  $I_s(\gamma)$  ist aber hiervon unabhängig.

Nun benutzen wir das Prinzip der Zeitumkehrinvarianz: Viele Grundvorgänge in der Natur sind reversibel. Wenn wir einen solchen Vorgang mit der Kamera aufnehmen und den Film dann rückwärts anschauen, dann sehen wir ebenfalls einen physikalisch möglichen Prozess<sup>19</sup>. Wir verlangen nun, dass der Josephson-Strom diesem Prinzip folgt. Wenn wir die Zeit umkehren, dann fließt der Strom rückwärts, wir haben also einen Strom  $-I_s$ . Die makroskopischen Wellenfunktionen oszillieren wie  $\exp(-i\omega t)$ . Drehen wir hier die Zeit um, dann sehen wir, dass wir auch das Vorzeichen der Phase der Wellenfunktion umkehren müssen. Verlangen wir also, dass der Josephson-Strom unter Zeitumkehr invariant bleibt, dann haben wir die Bedingung  $I_s(\gamma) = -I_s(-\gamma)$ , was alle Cosinusglieder in Gl. (1-44) ausschließt.

Der Suprastrom über die Barriere wird also bei Zeitumkehrinvarianz durch

$$I_s(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{cn} \sin(n\gamma) \quad (1-45)$$

beschrieben. Sehr häufig – aber nicht notwendig – ist es so, dass diese Reihe sehr schnell konvergiert, d. h. die Entwicklungskoeffizienten  $I_{cn}$  sehr schnell kleiner werden. Wir können dann die Reihe auf das erste Glied beschränken und erhalten die erste Josephson-Gleichung.

Es sei hier aber angemerkt, dass es Situationen gibt, bei denen beispielsweise der erste Entwicklungskoeffizient  $I_{c1}$  verschwindet. Dann erhalten wir eine Beziehung zwischen Suprastrom und Phasendifferenz  $\gamma$ , die eine Periode von  $\pi$  anstelle von  $2\pi$  hat.

<sup>19</sup> Dies gilt nicht für irreversible Prozesse: Ein zu Boden fallendes Wasserglas zerbricht in viele Scherben und das Wasser verteilt sich über den Boden. Der umgekehrte Prozess – das Wasser und die Scherben springen auf den Tisch und bilden ein intaktes, mit Wasser gefülltes Glas – kommt dagegen nur im Film vor.

Um zur zweiten Josephson-Gleichung zu gelangen, leiten wir Gl. (1-43) nach der Zeit ab. Wir erhalten:

$$\dot{\gamma} = \dot{\phi}(z_2) - \dot{\phi}(z_1) - \frac{q}{\hbar} \int_{z_1}^{z_2} \dot{A}_z dz \quad (1-46)$$

Nach den Gesetzen der Elektrodynamik gibt das Integral über die zeitliche Ableitung des Vektorpotenzials gerade die durch ein zeitlich veränderliches Magnetfeld über die Barriere induzierte Spannung an. Die Zeitableitung der Differenz  $\phi(z_2) - \phi(z_1)$  ergibt mit  $\Psi \propto \exp(-i\omega t) = \exp(-iEt/\hbar)$  die Differenz  $[E(z_2) - E(z_1)]/\hbar$  zwischen den beiden supraleitenden Bereichen rechts und links der Barriere, die wir als  $q \cdot U_{21}$ , mit der Spannungsdifferenz  $U_{21}$ , schreiben können. Wir haben also

$$\dot{\gamma} = \frac{q}{\hbar}(U_{21} + U_{ind}) = \frac{q}{\hbar}U_{gesamt} \quad (1-47)$$

Mit  $q = 2e$  folgt daraus die zweite Josephson-Gleichung, siehe Gl. (1-28).

Die zweite Ableitung der Josephson-Gleichungen war sehr allgemein. Sie hat angenommen, dass eine **makroskopische Welle mit definierter Phase**  $\varphi$  vorliegt und dass das System **zeitumkehrinvariant** ist. Die Gl. (1-40)–(1-47) sind ebenfalls »**eichinvariant**«.

Die Eichinvarianz ist ein sehr grundlegendes Prinzip. In den Kraft- und Feldgleichungen der Elektrodynamik treten nur die elektrischen und magnetischen Felder, aber nicht die zugehörigen Potentiale – das Vektorpotenzial  $\vec{A}$  und das skalare Potenzial  $\phi$  – auf. Aus Letzterem erhält man durch Gradientenbildung das (negative) elektrische Feld. Wie bereits erwähnt, gilt  $\text{rot}\vec{A} = \vec{B}$ . Nun ist aber das magnetische Feld quellenfrei, d. h., es gilt  $\text{div}\vec{B} = 0$ . Damit kann man zu  $\vec{A}$  einen Vektor  $\vec{V}(x, y, z, t)$  hinzuaddieren, der aus dem Gradienten einer Funktion  $\chi(x, y, z, t)$  gebildet wurde. Dies entspricht einer anderen »Eichung« für  $\vec{A}$ . Die Rotation von  $\vec{V}$  verschwindet immer, und damit bleibt das Magnetfeld unbeeinflusst. Um auch das elektrische Feld bei dieser Transformation unverändert zu lassen, muss aber vom skalaren Potenzial gleichzeitig die Größe  $\chi(x, y, z, t)$  abgezogen werden. Die Schrödinger-Gleichung verlangt schließlich, dass die Phase  $\varphi$  der Wellenfunktion in  $\varphi + \frac{2\pi}{\phi_0}\chi$  »umzueichen« ist. Die Eichinvarianz der Gl. (1-40)–(1-47) lässt sich durch explizites Einsetzen dieser Beziehungen zeigen.

Gleichungen, die eichinvariant sind, haben in der Physik oft eine fundamentale Aussagekraft und sind nicht leicht durch mikroskopische Details zu beeinflussen. Wir können also erwarten, dass die Josephson-Gleichungen sehr allgemein für viele verschiedene Barrierentypen und Supraleiter gelten.

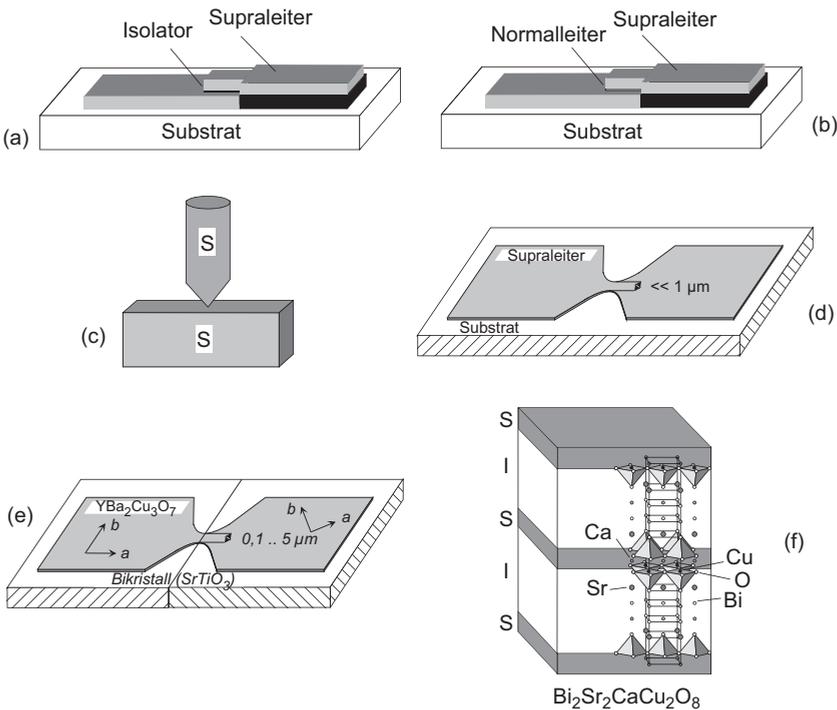
#### Methoden 1.4 Herstellung von Josephson-Kontakten

In Abb. 1.22 sind einige Kontakttypen schematisch dargestellt. Beim Supraleiter-Isolator-Supraleiter (SIS)-Kontakt (Abb. 1.22a) darf die isolierende Barriere nur 1–2 nm dick sein. Die Supraleiter-Normalleiter-Supraleiter (SNS)-Kontakte (Abb. 1.22b) können mit sehr viel größerer Dicke des Normalleiters arbeiten, einfach weil die Cooper-Paare in ein normalleitendes Metall sehr viel tiefer eindringen können als in eine Oxidschicht. Die Abklingtiefe der Cooper-Paar-Konzentration im Normalmetall hängt dabei unter

anderem von der freien Weglänge der Elektronen ab. Bei sehr großer freier Weglänge (geringem Störgrad) können normalleitende Schichtdicken bis zu einigen Hundert Nanometern verwendet werden. Ein wesentlicher Unterschied zwischen den Oxid- und den Normalleiterkontakten liegt in ihrem Flächenwiderstand (Normalwiderstand $\times$ Fläche der Barriere). Bei den Oxidkontakten hat man in der Regel Flächenwiderstände im Bereich von  $10^{-4}$  bis  $10^{-3}$   $\Omega\text{cm}^2$ , bei den SNS-Kontakten dagegen ca.  $10^{-8}$   $\Omega\text{cm}^2$  und darunter. Neben SIS- und SNS-Kontakten verwendet man auch häufig solche mit komplizierterer Barrierenstruktur, z. B. die sog. SINIS-Kontakte.

Besonders einfach sind die Punktkontakte (Abb. 1.22c). Bei ihnen wird lediglich eine Spitze gegen eine Fläche gedrückt. Der Auflagedruck bedingt die Brückenfläche. Damit lassen sich sehr leicht die gewünschten Kontakteigenschaften herstellen und gegebenenfalls nachjustieren.

Die Filmbrücke (Abb. 1.22d) besteht lediglich aus einer engen Einschnürung, die aufgrund ihres sehr kleinen Querschnittes den Austausch von Cooper-Paaren begrenzt. Man muss hierzu Breiten von weniger als ca.  $3\xi_{GL}$  (in der Praxis deutlich unterhalb von  $1\ \mu\text{m}$ ) reproduzierbar herstellen, was den Einsatz moderner Strukturierungsmethoden wie der Elektronenstrahlolithographie erfordert.



**Abb. 1.22** Schematische Darstellung von Möglichkeiten zur Herstellung einer schwachen Kopplung zwischen zwei Supraleitern. (a) SIS-Kontakt mit einer Oxidschicht als Barriere; (b) SNS-Kontakt mit normalleitender Barriere; (c) Punktkontakt; (d) dünne Brücke; (e)  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ -Korngrenzenkontakt; (f) intrinsischer Josephson-Kontakt in  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ .

Bei den Hochtemperatursupraleitern können aufgrund der sehr kleinen Kohärenzlängen Korngrenzen als Bereiche schwacher Kopplung verwendet werden [35, 36]. So kann man einen Dünnsfilm, z. B. aus  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ , auf ein »Bikristallsubstrat« aufbringen, das aus zwei definiert zueinander verdrehten einkristallinen Bereichen besteht. Die Korngrenze des Substrats überträgt sich dabei in den Dünnsfilm, der ansonsten einkristallin (epitaktisch) aufwächst (Abb. 1.22e). Einschnürungen mit einer Breite von einigen Mikrometern oder weniger helfen dabei, den kritischen Strom des Korngrenzen-Josephson-Kontakts auf ein gewünschtes Maß einzustellen. Auch an Stufen im Substrat oder an den Rändern von epitaktisch auf ein Substrat aufgebrachtene Pufferschichten lassen sich definiert Korngrenzen erzeugen. Die Stärke der Josephson-Kopplung kann durch den Korngrenzenwinkel sehr stark variiert werden.

Einige Hochtemperatursupraleiter, wie z. B.  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ , bilden sogar allein aufgrund ihrer Kristallstruktur intrinsisch Josephson-Kontakte aus (Abb. 1.22f): Die Supraleitung beschränkt sich hier auf nur ca. 0,3 nm dicke Schichten aus Kupferoxid. Zwischen diesen Schichten liegen Wismutoxid- und Strontiumoxidebenen, die isolierend sind. Solche Materialien bilden damit natürliche Stapel von SIS-Josephson-Kontakten, wobei jeder Kontakt lediglich eine Dicke von 1,5 nm – dem Abstand zwischen zwei benachbarten Kupferoxidschichten – hat [37].

Diese ganz unterschiedlichen Realisierungen von Josephson-Kontakten sind nur eine kleine Auswahl aus der Gesamtheit aller Möglichkeiten. Jeder Kontakttyp hat seine Vor- und Nachteile, und je nach konkreter Problemstellung können ganz verschiedene Typen zum Einsatz kommen.

### 1.5.3 Zeitliche Quanteninterferenz: Beobachtung des Josephson-Wechselstroms

Es stellt sich die Frage, wie gleichartig die Josephson-Effekte in unterschiedlich hergestellten Josephson-Kontakten sind, insbesondere was die Proportionalität der Oszillationsfrequenz der Josephson-Wechselströme und der angelegten Spannung betrifft, vgl. Gl. (1-27). Der Proportionalitätsfaktor  $\Phi_0$ , dessen Inverses auch als »Josephson-Konstante«  $K_J = 2e/h \approx 483,5979 \text{ GHz/mV}$  bezeichnet wird<sup>20</sup>, wurde für ganz unterschiedliche Realisierungen von Josephson-Kontakten bestimmt. Ein Beispiel ist der direkte Vergleich eines Josephson-Kontakts aus Indium, dessen »Schwachstelle« durch eine sehr dünne Einschnürung (»Mikrobrücke«) realisiert war, und eines Josephson-Kontakts aus Niob, dessen Barriere durch eine dünne Goldschicht gegeben war [38]. Die für die beiden Kontakte gemessenen Josephson-Konstanten waren gleich, bei einer Unsicherheit von maximal  $2 \cdot 10^{-16}$ ! Diese Genauigkeit konnte mittlerweile sogar in den Bereich von  $10^{-19}$  gesteigert werden. Auch an den Hochtemperatursupraleitern konnte  $2e/h$  durch die Analyse von Shapiro-Stufen hochgenau bestimmt werden [39]. Der gefundene Zahlenwert stimmte dabei innerhalb eines Messfehlers von maximal  $5 \cdot 10^{-6}$  mit der Josephson-Konstanten in metallischen

<sup>20</sup> Der hier angegebene Zahlenwert wurde 1990 als Josephson-Konstante  $K_{J,90}$  definiert und war bis 2019 damit der exakte Wert. Die Definition wurde 2019 auf  $K_J = 483,597848416984 \text{ GHz/V}$  erweitert.

Supraleitern überein. Josephson-Kontakte lassen sich damit sehr gut als Spannungsstandard verwenden [40].

Wie kann man die Josephson-Wechselströme experimentell nachweisen?

Eine sehr direkte Methode liegt in der Beobachtung der von den oszillierenden Josephson-Strömen erzeugten elektromagnetischen Strahlung, deren Frequenz im Mikrowellenbereich liegt. Machen wir uns zunächst klar, von welcher Größenordnung die vom Kontakt abgestrahlte Mikrowellenleistung bestenfalls sein kann.

Wir nehmen dazu an, am Kontakt liege eine Spannung von  $100 \mu\text{V}$  an, was einer Abstrahlungsfrequenz von etwa  $48 \text{ GHz}$  entspricht. Der kritische Suprastrom  $I_c$  des Kontakts sei  $100 \mu\text{A}$ . Die in den Kontakt gesteckte Gleichstromleistung beträgt dann  $10^{-8} \text{ W}$  und die abgestrahlte Leistung liegt sicher weit unterhalb dieses Werts.

Die Schwierigkeit eines direkten Nachweises lag lange Zeit weniger in der geringen Leistung dieser Strahlung als vielmehr darin, dass es schwierig ist, die Hochfrequenzleistung aus dem winzigen Tunnelkontakt in eine entsprechende Hochfrequenzleitung auszukoppeln. Die erste Bestätigung des Josephson-Wechselstroms erfolgte deshalb auch auf indirekte Weise [41]. Bringt man einen solchen Kontakt in das hochfrequente Wechselfeld eines schwingenden Mikrowellenhohlraumes, so beobachtet man in der Strom-Spannungs-Kennlinie charakteristische äquidistante Stufen konstanter Spannung (vgl. Abschn. 6.3). Ihr Abstand auf der Spannungsachse  $\Delta U$  ist durch die Beziehung

$$\Delta U_s = \Phi_0 \cdot f_{\text{HF}} \quad (1-48)$$

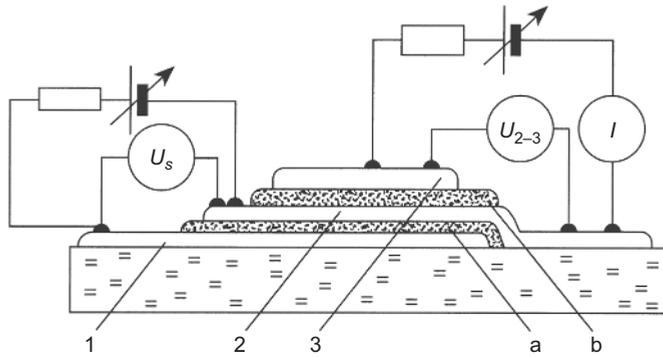
gegeben, wobei  $f_{\text{HF}}$  die Frequenz des Hochfrequenzfeldes ist. Diese »Shapiro-Stufen« entstehen aus der Überlagerung von Josephson-Wechselstrom und Mikrowellenfeld. Immer dann, wenn die Frequenz des Josephson-Wechselstroms einem ganzzahligen Vielfachen der Mikrowellenfrequenz entspricht, gibt die Überlagerung einen zusätzlichen Josephson-Gleichstrom, der die Treppenstruktur der Kennlinie verursacht.

Ein erster mehr direkter Nachweis des Josephson-Wechselstroms gelang Ivar Giaever<sup>21</sup> 1965 [42]. Giaever benutzte hierbei eine Sandwichanordnung aus zwei übereinandergelegten Tunnelkontakten (Abb. 1.23).

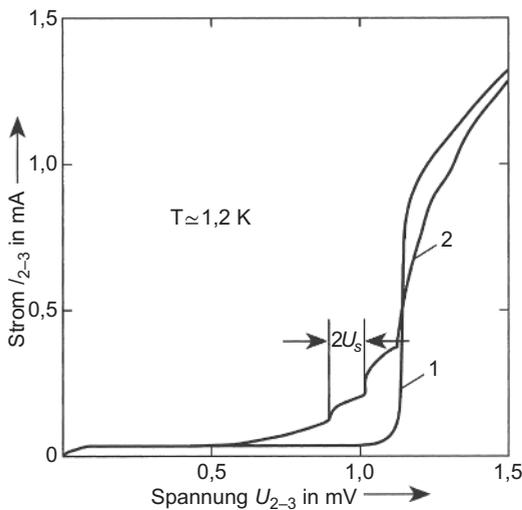
Der Nachweis der ausgekoppelten Leistung erfolgte in dem zweiten Tunnelkontakt über die Veränderung der Charakteristik des Tunnelstroms für Einzelelektronen durch ein eingestrahktes Hochfrequenzfeld, eben das Hochfrequenzfeld, das in dem Josephson-Kontakt erzeugt wird. Die Elektronen können mit dem Hochfrequenzfeld dadurch wechselwirken, dass sie Photonen mit der Energie  $E = hf_{\text{HF}}$  aufnehmen oder abgeben. Es ergeben sich wiederum charakteristische Strukturen in der Kennlinie des Einzelelektronentunnelstroms [43].

Wir werden in Abschn. 3.1.3 sehen, dass Einzelelektronen bei Abwesenheit des Hochfrequenzfeldes erst ab einer Spannung  $(\Delta_1 + \Delta_2)/e$  in großer Zahl zwischen den beiden Supraleitern tunneln können. Hierbei sind  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  die »Energieslücken« der beiden Supraleiter, deren Größe vom verwendeten Material abhängt. Mit anderen Worten, sie müssen beim Tunnelprozess eine Mindestenergie von  $eU = \Delta_1 + \Delta_2$  aufnehmen. Die Strom-Spannungs-Kennlinie weist dann bei einer Spannung  $(\Delta_1 + \Delta_2)e$  eine sehr scharfe Stufe auf, wie in Abb. 1.24 gezeigt.

<sup>21</sup> Für seine Experimente mit supraleitenden Tunnelkontakten wurde Giaever zusammen mit B. D. Josephson und L. Esaki 1973 der Nobelpreis verliehen.



**Abb. 1.23** Anordnung zum Nachweis des Josephson-Wechselstroms nach Giaever. 1, 2 und 3 sind Sn-Schichten, *a* und *b* sind Oxidschichten. Die Dicken von *a* und *b* sind so gewählt, dass 1 und 2 einen Josephson-Kontakt bilden und zwischen 2 und 3 keine Josephson-Ströme möglich sind (nach [42]).



**Abb. 1.24** Kennlinie des Kontaktes 2–3 aus Abb. 1.23. Kurve 1 ohne Spannung an Kontakt 1–2, Kurve 2 mit 0,055 mV an Kontakt 1–2. Nach [42]; © 1965 American Physical Society.

Im Hochfrequenzfeld kann ein von Photonen unterstützter (engl. photon-assisted) Tunnelprozess schon bei einer Spannung  $U_s = (\Delta_1 + \Delta_2) - hf_{HF}$  einsetzen. Nimmt ein Elektron beim Tunnelprozess mehrere Photonen auf, was bei hoher Photonendichte – anders ausgedrückt, bei hoher Leistung des Hochfrequenzfeldes – auftreten kann, so erhält man Strukturen in der Kennlinie mit dem charakteristischen Intervall der Spannung  $U_s$ :

$$\Delta U_s = \frac{hf_{HF}}{e} \quad (1-49)$$

Man beachte, dass beim Einelektronentunneln die Elementarladung  $e$  des Einzelelektrons auftritt.

Man erhält am Kontakt 2–3 eine typische Einelektronenkennlinie, wenn man diesen Tunnelkontakt in der üblichen Weise ausmisst, ohne am Kontakt 1–2' eine Spannung zu

haben (Kurve 1 in Abb. 1.24). Das entscheidende Experiment besteht nun darin, dass man an den Josephson-Kontakt 1–2 eine kleine Spannung  $U_s$  anlegt. Tritt dabei in diesem Kontakt der erwartete hochfrequente Wechselstrom auf, so sollte er wegen der relativ guten Ankopplung im Kontakt 2–3 die bekannte Struktur der Tunnelkennlinie hervorrufen. Die Kurve 2 in Abb. 1.24 gibt eine solche Kennlinie wieder. Dabei lag am Kontakt 1–2, dem Generator des Hochfrequenzfeldes, eine Spannung  $U_s$  von 0,055 mV an. Die Frequenz des Josephson-Wechselstroms ist dann  $f_j = 2eU_s/h$ , und die hochfrequenzinduzierten Strukturen auf der Kennlinie des Kontaktes 2–3 sollten die Spannungsabstände  $\Delta U_s = hf_j/e = 2 \cdot U_s$  haben. Für die in Abb. 1.24 dargestellten Kurven ergibt das also  $\Delta U_{2,3} = 0,11$  mV, was von Giaever beobachtet wurde.

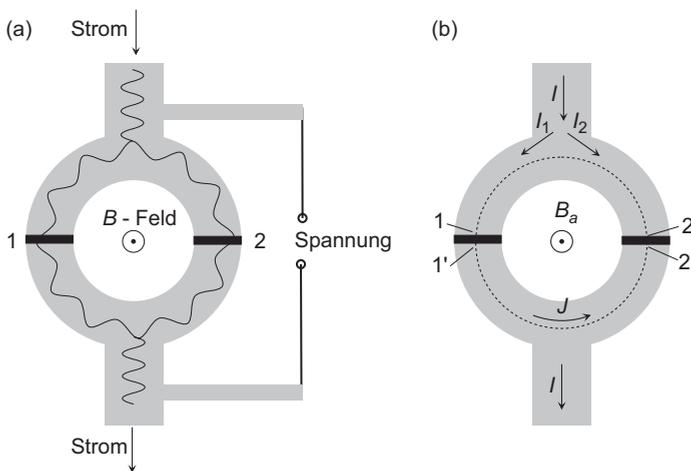
Auch der unmittelbare Nachweis des Josephson-Wechselstroms durch Auskoppeln der Leistung gelang kurze Zeit später [44]. Heute sind die Nachweismethoden elektromagnetischer Strahlung so verbessert, dass es keinerlei Schwierigkeiten macht, den Josephson-Wechselstrom bis in den Terahertzbereich auszukoppeln.

## 1.5.4 Räumliche Quanteninterferenzen im Magnetfeld

### 1.5.4.1 Der supraleitende Quanteninterferenzdetektor

In den Josephson-Wechselströmen manifestiert sich die makroskopische Wellenfunktion als eine *zeitliche* Interferenz der Materiewellen in den beiden supraleitenden Elektroden. Wie sieht es nun mit der *räumlichen* Interferenz aus, etwa in Analogie zum optischen Doppelspaltexperiment oder zum Sagnac-Interferometer?

Betrachten wir dazu die in Abb. 1.25 gezeichnete Struktur. Sie besteht aus einem supraleitenden Ring, in den zwei Josephson-Kontakte eingebaut sind. Der Ring befindet sich in einem parallel zur Flächennormalen orientierten Magnetfeld  $\vec{B}_a$ . Über den Ring fließt ein



**Abb. 1.25** Ringstruktur zur Erzeugung räumlicher Interferenzen der supraleitenden Wellenfunktion: (a) schematische Darstellung der Welle, (b) Bezeichnungen zur Herleitung der Quanteninterferenz.

Transportstrom  $I$  und wir können durch Messung des Spannungsabfalls über den Josephson-Kontakten bestimmen, wie groß der maximale Suprastrom ist, den wir über die Ringstruktur schicken können. Wir werden sehen, dass dieser maximale Suprastrom  $I_c$  als Funktion des magnetischen Flusses durch den Ring oszilliert, ganz ähnlich wie dies die Lichtintensität – genauer die Lichtamplitude – beim Doppelspaltexperiment auf dem Leuchtschirm oder beim Sagnac-Interferometer als Funktion der Rotationsfrequenz macht.

In Abschn. 1.3 hatten wir einen supraleitenden Ring im Magnetfeld betrachtet und gefunden, dass der magnetische Fluss durch den Ring in ganzzahligen Vielfachen des Flussquants  $\Phi_0$  auftritt. Man konnte zwar ein beliebiges Magnetfeld  $\vec{B}_a$  an den Ring anlegen und damit einen beliebigen angelegten Fluss  $\Phi_a$  durch den Ring erzeugen; im Ring fließt dann aber ein Kreisstrom  $J$ . Er erzeugt einen magnetischen Fluss  $\Phi_{ind} = LJ$  so, dass der Gesamtfluss ein ganzzahliges Vielfaches von  $\Phi_0$  ergibt:  $\Phi_{ges} = \Phi_a + LJ$ . Der Ringstrom rundet also gewissermaßen  $\Phi_a$  zum nächsten ganzzahligen Wert von  $\Phi_{ges}/\Phi_0$  auf oder ab. Offensichtlich muss  $LJ$  hierfür maximal den Wert  $\Phi_0/2$  erreichen.

Durch das Einfügen der beiden Josephson-Kontakte ändert sich dieses Bild. An den beiden Josephson-Kontakten kann die Phase der supraleitenden Wellenfunktion Sprünge  $\gamma_1$  bzw.  $\gamma_2$  aufweisen, die bei der Integration des Phasengradienten um den Ring herum (Integral  $\oint \vec{k} d\vec{x}$ ) mitberücksichtigt werden müssen. Die Phasensprünge sind über die erste Josephson-Gleichung, siehe Gl. (1-25), mit dem Strom über die Kontakte verknüpft.

Wir leiten nun die Abhängigkeit  $I_c(\Phi_a)$  im Detail ab und benutzen hierfür die Bezeichnungen aus Abb. 1.25b.

Wir nehmen zunächst an, dass die Breite der Josephson-Kontakte wesentlich kleiner ist als der Ringdurchmesser.

Der Strom  $I$ , der über die beiden Arme des Rings fließt, teilt sich auf in die Ströme  $I_1$  und  $I_2$ . Die Stromerhaltung verlangt:

$$I = I_1 + I_2 \quad (1-50)$$

Wir können die Ströme  $I_1$  und  $I_2$  auch mittels des im Ring fließenden Kreisstroms  $J$  ausdrücken. Es gilt ganz allgemein:

$$I_1 = \frac{I}{2} - J; \quad I_2 = \frac{I}{2} + J \quad (1-51)$$

Der Strom  $I_1$  fließt durch Josephson-Kontakt 1, der Strom  $I_2$  durch Josephson-Kontakt 2. Daher gilt auch

$$I_1 = I_c \sin \gamma_1; \quad I_2 = I_c \sin \gamma_2 \quad (1-52)$$

wobei wir die kritischen Ströme  $I_c$  der beiden Josephson-Kontakte der Einfachheit halber als identisch angenommen haben. Wir haben jetzt also

$$\frac{I}{2} + J = I_c \sin \gamma_1 \quad (1-53a)$$

$$\frac{I}{2} - J = I_c \sin \gamma_2 \quad (1-53b)$$

Nun benötigen wir eine Beziehung, die die eichinvarianten Phasendifferenzen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  mit dem angelegten Magnetfeld verbindet. Wir gehen dabei ganz analog zur Herleitung der Fluxoidquantisierung, vgl. Gl. (1-11) vor, integrieren aber den Wellenvektor  $\vec{k}$  nicht wie bei

Gl. (1-7) über den ganzen Ring, sondern getrennt über die untere und obere Ringhälfte, d. h. von 1' nach 2' bzw. von 2 nach 1 in Abb. 1.25b. Wir erhalten:

$$\int_{1'}^{2'} \vec{k} d\vec{r} = \mu_0 \lambda_L^2 \int_{1'}^{2'} \vec{j}_s d\vec{r} + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{1'}^{2'} \vec{A} d\vec{r} \quad (1-54a)$$

$$\int_2^1 \vec{k} d\vec{r} = \mu_0 \lambda_L^2 \int_2^1 \vec{j}_s d\vec{r} + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_2^1 \vec{A} d\vec{r} \quad (1-54b)$$

Hierbei haben wir bereits die Definition, vgl. Gl. (1-10), der London-Eindringtiefe sowie  $\Phi_0 = h/q = h/2e$  verwendet.

Das Integral  $\int_{1'}^{2'} \vec{k} d\vec{r}$  ergibt gerade die Differenz der Phase  $\varphi_2$  der Wellenfunktion der unteren Ringhälfte  $\Psi_2 \propto \exp(i\vec{k}\vec{r}) = \exp(i\varphi_2)$  an den Orten 2' und 1'  $\int_{1'}^{2'} \vec{k} d\vec{r} = \varphi_2(2') - \varphi_2(1')$ . Ganz analog gibt das Integral  $\int_2^1 \vec{k} d\vec{r} = \varphi_1(1) - \varphi_1(2)$ . Nun addieren wir die Gl. (1-54a) und (1-54b) und finden:

$$\varphi_2(2') - \varphi_1(2) - [\varphi_2(1') - \varphi_1(1)] = \mu_0 \lambda_L^2 \left( \int_{1'}^{2'} \vec{j}_s d\vec{r} + \int_2^1 \vec{j}_s d\vec{r} \right) + \frac{2\pi}{\Phi_0} \oint_{C'} \vec{A} d\vec{r} \quad (1-55)$$

Hierbei schließt das Integral über die Kurve C' die Barrieren der beiden Josephson-Kontakte nicht mit ein. Wäre dies der Fall, so würde das Integral über den kompletten Ring laufen und wir könnten es unter Verwendung des stokeschen Satzes in den magnetischen Fluss durch den Ring umschreiben. Dies können wir aber dadurch erreichen, dass wir die Integrale über die entsprechenden Wegstücke auf beiden Seiten der Gl. (1-55) hinzuaddieren. Damit haben wir:

$$\oint_{C'} \vec{A} d\vec{r} + \int_{2'}^2 \vec{A} d\vec{r} + \int_1^1 \vec{A} d\vec{r} = \oint_C \vec{A} d\vec{r} = \int_F \vec{B} d\vec{f} = \Phi \quad (1-56)$$

Auf der linken Seite der Gl. (1-55) ergibt aber der Term  $\varphi_2(2') - \varphi_1(2) + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{2'}^2 \vec{A} d\vec{r}$  gerade die eichinvariante Phasendifferenz  $\gamma_2$  über den Josephson-Kontakt 2. Ganz analog ergibt der Ausdruck  $\varphi_2(1') - \varphi_1(1) - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_1^1 \vec{A} d\vec{r}$  die eichinvariante Phasendifferenz  $\gamma_1$  über den Josephson-Kontakt 1.

Wir erhalten also:

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \mu_0 \lambda_L^2 \left( \int_{1'}^{2'} \vec{j}_s d\vec{r} + \int_2^1 \vec{j}_s d\vec{r} \right) + \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi \quad (1-57)$$

Der magnetische Fluss  $\Phi$  ergibt sich wie beim massiven Kreisring als die Summe aus angelegtem Fluss  $\Phi_a$  und dem Eigenfeld durch die Kreisströme  $J$ ,  $\Phi = \Phi_a + LJ$ . Die Beiträge über die Stromdichten sind ihrerseits dem Kreisstrom  $J$  proportional und können dem Term  $LJ$  zugeschlagen werden<sup>22</sup>. Wir erhalten schließlich die gesuchte Beziehung

<sup>22</sup> Hierdurch erhöht sich die Ringinduktivität etwas. Man nennt diesen Beitrag auch die »kinetische Induktivität«  $L_{kin}$ , die zur durch die Geometrie bestimmten Induktivität  $L$  hinzuaddieren ist. Man hat also  $L_{gesamt} = L + L_{kin}$ . Da aber der Beitrag  $L_{kin}$  meist sehr klein ist, wollen wir hier nicht weiter zwischen  $L_{gesamt}$  und  $L$  unterscheiden.

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi = \frac{2\pi}{\Phi_0} (\Phi_a + LJ) \quad (1-58)$$

Mittels der Gl. (1-53a), (1-53b) und (1-58) können wir den maximalen Suprastrom über den Ring als Funktion des angelegten Felds bzw. Flusses bestimmen.

Nehmen wir hierzu zunächst an, dass wir den Beitrag des Terms  $LJ$  zum magnetischen Fluss vernachlässigen können. Der Kreisstrom  $J$  kann sicher nicht größer als der kritische Strom  $I_c$  der Josephson-Kontakte werden. Damit ist der vom Term  $LJ$  erzeugte Fluss kleiner als  $LI_c$ . Wir verlangen, dass dieser Fluss deutlich kleiner ist als ein halbes Flussquant und erhalten damit die Bedingung  $2LI_c/\Phi_0 \ll 1$ . Die Größe  $2LI_c/\Phi_0$  nennt man auch Induktivitätsparameter  $\beta_L$ ,

$$\beta_L = \frac{2LI_c}{\Phi_0} \quad (1-59)$$

Wenn wir den durch den Ringstrom erzeugten magnetischen Fluss vernachlässigen, haben wir  $\Phi = \Phi_a$ . Wir eliminieren jetzt mittels Gl. (1-58)  $\gamma_2$  aus Gl. (1-53) und finden durch Addition der Gl. (1-53a) und (1-53b)

$$I = I_c \cdot \left[ \sin \gamma_1 + \sin \left( 2\pi \frac{\Phi_a}{\Phi_0} + \gamma_1 \right) \right] \quad (1-60)$$

Es ist jetzt günstig, statt  $\gamma_1$  die Variable  $\delta = \gamma_1 + \pi \frac{\Phi_a}{\Phi_0}$  zu benutzen. Wir können dann Gl. (1-60) zu

$$I = I_c \cdot \left[ \sin \left( \delta - \pi \frac{\Phi_a}{\Phi_0} \right) + \sin \left( \delta + \pi \frac{\Phi_a}{\Phi_0} \right) \right] \quad (1-61)$$

umformen. Unter Verwendung der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus bekommen wir den Ausdruck

$$I = 2I_c \cdot \sin \delta \cdot \cos \left( \pi \frac{\Phi_a}{\Phi_0} \right) \quad (1-62)$$

Wenn wir den Fluss  $\Phi_a$  und den Strom  $I$  vorgeben, dann wird sich  $\delta$  so einstellen, dass Gl. (1-62) erfüllt ist. Dies gelingt bei wachsendem Strom höchstens, bis  $\sin \delta$  je nach Stromrichtung und Vorzeichen des Cosinusfaktors gleich  $+1$  oder gleich  $-1$  ist. Der maximale Suprastrom, der über die Anordnung geschickt werden kann, ist damit durch

$$I_{s,max} = 2I_c \cdot \left| \cos \left( \pi \frac{\Phi_a}{\Phi_0} \right) \right| \quad (1-63)$$

gegeben.  $I_{s,max}$  wird für einen magnetischen Fluss maximal, der einem ganzzahligen Vielfachen eines Flussquants entspricht. Der Cosinusfaktor wird dann gleich eins, und wir erhalten  $I_{s,max} = 2I_c$ , was der maximale Suprastrom ist, den die parallele Anordnung der beiden Josephson-Kontakte tragen kann. Wir haben dann  $\sin \gamma_1 = \sin \gamma_2 = 1$ . Der Kreisstrom  $J$ , den wir durch Subtraktion der Gl. (1-53a) und (1-53b) als

$$J = \frac{I_c}{2} (\sin \gamma_1 - \sin \gamma_2) \quad (1-64)$$

erhalten können, verschwindet in diesem Fall. Wenn  $\Phi_a$  den Wert  $(n + 1/2) \Phi_0$ , mit  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , annimmt, dann verschwindet  $I_{s,max}$ . Der Kreisstrom  $J$  ist jetzt maximal und je nach Wert von  $n$  gleich  $+I_c$  oder gleich  $-I_c$ .

Der maximale Suprastrom über die Ringstruktur oszilliert also periodisch als Funktion des angelegten magnetischen Felds, wobei die Periode des vom Feld erzeugten magnetischen Flusses ein Flussquant ist. Dieser Effekt, der 1965 von Mercereau und Mitarbeitern erstmals nachgewiesen wurde [45], ist das Analogon zur Lichtbeugung am Doppelspalt und bildet die Grundlage zur Verwendung solcher Ringstrukturen als supraleitendes Quanteninterferometer (engl. **d**irect **c**urrent **S**uperconducting **Q**uantum **I**nterference **D**evice, dc SQUID). Man beachte, dass SQUIDS ein angelegtes Magnetfeld kontinuierlich messen können.

Wir werden SQUIDS in Abschn. 7.6.4 ausführlich behandeln. Es sei aber schon jetzt gesagt, dass man damit magnetische Flussänderungen von  $10^{-6} \Phi_0$ , mit speziellen SQUIDS sogar noch deutlich weniger, auflösen kann. Wenn die Fläche des SQUID etwa  $1 \text{ mm}^2$  beträgt, dann entspricht dies Feldänderungen  $\Delta B$  von etwa  $10^{-6} \Phi_0 / 1 \text{ mm}^2 \approx 10^{-15} \text{ T}$ , die mit dem SQUID nachweisbar sind!

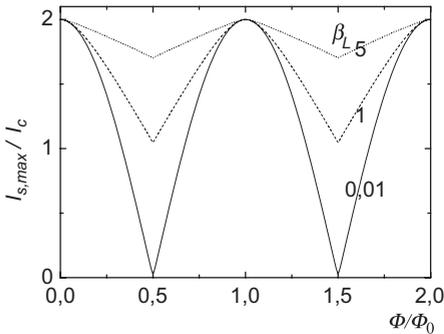
Dieser Wert liegt 11 Größenordnungen unterhalb des Erdmagnetfelds und entspricht etwa dem Feld, das Hirnströme an der Schädeloberfläche produzieren. SQUIDS gehören zu den empfindlichsten Detektoren überhaupt und sehr viele physikalische Größen lassen sich in eine Magnetfeld- bzw. Flussmessung umwandeln. SQUIDS sind damit sehr vielfältig einsetzbar.

Wir können hier auch nochmals kurz die Analogie zum Sagnac-Interferometer ansprechen. Wenn das SQUID bei konstantem äußeren Feld in Rotation um eine Achse parallel zur Flächennormalen des Rings versetzt wird, dann ergibt sich eine Phasenverschiebung von  $\frac{2m}{\hbar} \cdot 2\pi R^2 \cdot \Omega = 4\pi^2 R^2 \frac{2m}{\hbar} \cdot \Omega$  im Interferometer, wobei  $\Omega$  die Winkelgeschwindigkeit und  $2m$  die Masse eines Cooper-Paars ist. Hierbei haben wir ein kreisförmiges SQUID mit Radius  $R$  angenommen.  $I_{s,max}$  oszilliert damit mit einer Periode, die vom Verhältnis  $m/h$  abhängt. Auf die Äquivalenz eines rotierenden Supraleiters und eines von außen angelegten Magnetfelds wies Fritz London bereits 1950 hin [46]. Ein ähnlicher Rotationseffekt kann aber auch mit anderen kohärenten Materiewellen beobachtet werden, z. B. bei superfluidem Helium [47]. Da die Masse der Heliumatome aber wesentlich größer ist als die Masse der Cooper-Paare, ist dort die Empfindlichkeit auf Rotationen wesentlich größer als beim SQUID.

Diskutieren wir nun kurz die Näherungen, die uns zu Gl. (1-63) geführt haben.

Wir haben zunächst angenommen, dass die kritischen Ströme  $I_c$  der beiden Josephson-Kontakte identisch sind. Ohne diese Annahme würden wir finden, dass  $I_{s,max}$  zwischen  $I_{c1} + I_{c2}$  und  $|I_{c1} - I_{c2}|$  variiert, wobei die Periode ebenfalls ein Flussquant ist. Wir haben also keine qualitative Änderung gegenüber Gl. (1-63). Auch die Berücksichtigung einer endlichen Induktivität ändert nichts an der Oszillationsperiode. Der maximale Wert von  $I_{s,max}$  ist ebenfalls nach wie vor  $I_{c1} + I_{c2}$ . Allerdings nähert sich das Minimum von  $I_{s,max}(\Phi)$  immer mehr dem Maximalwert an. Dieser Effekt ist in Abb. 1.26 für drei verschiedene Werte des Induktivitätsparameters  $\beta_L$  gezeigt.

Für große Werte des Induktivitätsparameters  $\beta_L$  fällt die relative Durchmodulation wie  $1/\beta_L$  ab. Um dies zu erkennen, müssen wir uns in Erinnerung rufen, dass beim massiven supraleitenden Ring ein Abschirmstrom von maximal  $J = \Phi_0 / 2L$  genügt, um den angelegten Fluss auf den nächsten ganzzahligen Wert von  $\Phi_0$  zu ergänzen. Wenn wir dieses Prinzip auf das SQUID anwenden, dann braucht der Ringstrom nicht größer als



**Abb. 1.26** Modulation des maximalen Suprastroms eines supraleitenden Quanteninterferometers als Funktion des magnetischen Flusses durch den Ring. Die Kurven sind für drei verschiedene Werte des Induktivitätsparameters  $\beta_L$  aufgetragen.

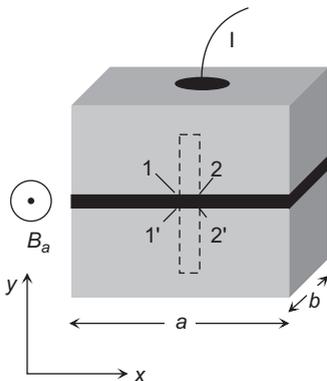
eben  $\Phi_0/2L$  zu werden. Für große Induktivitäten ist dieser Ringstrom kleiner als  $I_c$  und  $I_{s,max}$  geht auf den Wert  $2(I_c - J)$  zurück. Wir haben damit eine relative Durchmodulation  $2I_c - 2(I_c - J)/2I_c = J/I_c = \Phi_0/(2LI_c) = 1/\beta_L$ . Der Effekt der Quanteninterferenz wird also mit wachsender Induktivität immer geringer.

Man kann, unter Einschluss thermischer Fluktuationseffekte, zeigen, dass die optimale Empfindlichkeit des SQUIDs auf Flussänderungen für  $\beta_L \approx 1$  erreicht wird. Dies limitiert aber bei vorgegebenem kritischem Strom auch die Fläche des SQUID-Rings, da die Induktivität mit dem Umfang des Rings immer mehr anwächst. Man möchte also zum einen eine möglichst große Fläche, damit bereits eine kleine Feldänderung zu einer großen Flussänderung führt. Auf der anderen Seite darf diese Fläche nicht zu groß werden, weil sonst die Induktivität zu groß wird. Dieser Konflikt hat zu einer Reihe sehr spezieller SQUID-Geometrien geführt, die weitab von einer einfachen Ringstruktur wie in Abb. 1.25 liegen. Wir werden diese in Abschn. 7.6.4 besprechen.

#### 1.5.4.2 Quanteninterferenz im Josephson-Kontakt

Schließlich wollen wir uns fragen, wie sich die endliche Größe der Josephson-Kontakte äußert. Wir werden sehen, dass auch der kritische Strom der Kontakte selbst vom Magnetfeld bzw. dem magnetischen Fluss durch den Kontakt abhängt, ganz in Analogie zur Lichtbeugung am Einzelspalt.

Betrachten wir zunächst die in Abb. 1.27 schematisch dargestellte Geometrie eines räumlich ausgedehnten Josephson-Kontakts. Dieser Kontakt sei von einem Magnetfeld in  $z$ -Richtung parallel zur Barrierschicht durchdrungen.



**Abb. 1.27** Geometrie des räumlich ausgedehnten Josephson-Kontakts.

Wir suchen eine Gleichung, die die Abhängigkeit der eichinvarianten Phasendifferenz  $\gamma$  vom angelegten Magnetfeld beschreibt. Beim supraleitenden Ring der Abb. 1.25 hatten wir gesehen, dass die Differenz der beiden Phasen  $\gamma_2 - \gamma_1$  der als punktförmig angenommenen Josephson-Kontakte proportional zum zwischen diesen Kontakten eingeschlossenen magnetischen Fluss war.

Ganz analog zur Herleitung dieses Zusammenhangs betrachten wir den in Abb. 1.27 gestrichelt eingezeichneten Integrationsweg, auf dem wir den Wellenvektor der supraleitenden Wellenfunktion integrieren wollen. Entlang der  $x$ -Koordinate erstreckt sich der Weg vom Punkt  $x$  bis zum Punkt  $x + dx$ , wobei  $dx$  eine infinitesimal kleine Wegstrecke ist. In  $y$ -Richtung erstreckt sich der Weg tief ins Innere der beiden Supraleiter, von denen wir annehmen wollen, dass sie wesentlich dicker sind als die London-Eindringtiefe.

Völlig analog zur Gl. (1-57) finden wir

$$\gamma(x + dx) - \gamma(x) = \mu_0 \lambda_L^2 \left( \int_1^2 \vec{j}_s d\vec{r} + \int_2^1 \vec{j}_s d\vec{r} \right) + \frac{2\pi}{\Phi_0} \Phi_I \quad (1-65)$$

wobei  $\Phi_I$  den vom Integrationsweg eingeschlossenen Gesamtfluss bezeichnet. Außerhalb einer Schicht  $\lambda_L$  sind die Abschirmströme in den supraleitenden Elektroden exponentiell klein, so dass wir die beiden Integrale über die Supraströmdichten vernachlässigen können. Wir nehmen außerdem an, dass die Supraströme und Magnetfelder zwar in  $x$ -Richtung, aber nicht in  $y$ -Richtung variieren. Für den magnetischen Fluss schreiben wir dann:

$$\Phi_I = B \cdot t_{eff} \cdot dx \quad (1-66)$$

Die »effektive Dicke«  $t_{eff}$  finden wir durch Integration des Magnetfelds entlang  $y$ . Da das Magnetfeld exponentiell mit einer charakteristischen Länge  $\lambda_L$  in den beiden Supraleitern abklingt, liefert diese Integration

$$t_{eff} = \lambda_{L,1} + \lambda_{L,2} + t_b \quad (1-67)$$

Hierbei sind  $\lambda_{L,1}$  und  $\lambda_{L,2}$  die London-Eindringtiefen in die beiden Supraleiter, die nicht notwendig identisch sein müssen. Die Dicke der Barrierschicht bezeichnen wir als  $t_b$ . Sie ist im Allgemeinen deutlich kleiner als  $\lambda_{L,1}$  und  $\lambda_{L,2}$  und kann daher meist vernachlässigt werden.

Mit diesen Annahmen und Bezeichnungen erhalten wir aus Gl. (1-65) die Differentialgleichung

$$\gamma' \equiv \frac{d\gamma}{dx} = \frac{2\pi}{\Phi_0} B \cdot t_{eff} \quad (1-68)$$

die den gesuchten Zusammenhang darstellt.

Wir nehmen weiter an, dass wir das von den Josephson-Strömen produzierte Eigenfeld vernachlässigen können. Diese Annahme ist letztlich eine Bedingung für die räumliche Ausdehnung des Kontakts in  $x$ - und  $y$ -Richtung. In Abschn. 6.4 werden wir sehen, dass wir verlangen müssen, dass die Kantenlängen  $a$  und  $b$  des Kontakts die sog. Josephson-Eindringtiefe

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\Phi_0}{4\pi\mu_0 j_c l_{eff}}} \quad (1-69)$$

nicht überschreiten dürfen, wobei  $j_c$  die als räumlich homogen angenommene kritische Suprastromdichte ist, und die Länge  $l_{eff}$  gleich  $t_{eff}$  ist, falls die supraleitenden Elektroden wie hier angenommen wesentlich dicker sind als  $\lambda_L$ . Die Josephson-Eindringtiefe beträgt typischerweise einige Mikrometer, kann aber auch bis auf die Millimeterskala anwachsen, falls die kritische Suprastromdichte sehr klein ist.

Unter obiger Annahme ist das Magnetfeld  $B$  gleich dem von außen angelegten Feld  $B_a$ . Wir können dann die Gl. (1-68) integrieren und erhalten

$$\gamma(x) = \gamma(0) + \frac{2\pi}{\Phi_0} B_a t_{eff} x \quad (1-70)$$

Die eichinvariante Phasendifferenz wächst also linear mit der  $x$ -Koordinate an. Wenn wir diese Funktion  $\gamma(x)$  in die erste Josephson-Gleichung einsetzen, dann erhalten wir für die Ortsabhängigkeit der Suprastromdichte über die Barrierenschicht

$$j_s(x) = j_c \cdot \sin \left[ \gamma(0) + \frac{2\pi}{\Phi_0} B_a t_{eff} x \right] \quad (1-71)$$

Die Suprastromdichte oszilliert also entlang der  $x$ -Koordinate, d. h. senkrecht zum angelegten Feld, wobei die Oszillationsperiode vom angelegten Magnetfeld bestimmt wird.

Wir wollen jetzt den maximalen Suprastrom finden, den wir über den Josephson-Kontakt schicken können. Dazu integrieren wir die Gl. (1-71) über die Fläche des Kontakts:

$$I_s = \int_0^b dy \int_0^a dx \cdot j_c \cdot \sin \left[ \gamma(0) + \frac{2\pi}{\Phi_0} B_a t_{eff} x \right] \quad (1-72a)$$

Wir nehmen nun an, dass die kritische Suprastromdichte  $j_c$  räumlich homogen ist, d. h. nicht von  $x$  und  $y$  abhängt. Wir können dann die Integrationen unmittelbar ausführen und erhalten:

$$I_s = j_c \cdot b \cdot \int_0^a dx \cdot \sin \left[ \gamma(0) + \frac{2\pi}{\Phi_0} B_a t_{eff} x \right] = -j_c \cdot b \cdot \left. \frac{\cos \left[ \gamma(0) + \frac{2\pi}{\Phi_0} B_a t_{eff} x \right]}{\frac{2\pi}{\Phi_0} B_a t_{eff}} \right|_0^a \quad (1-72b)$$

Wenn wir die Integrationsgrenzen einsetzen, erhalten wir

$$I_s = j_c \cdot b \cdot \frac{\cos \gamma(0) - \cos \left[ \gamma(0) + \frac{2\pi}{\Phi_0} B_a t_{eff} a \right]}{\frac{2\pi}{\Phi_0} B_a t_{eff}} \quad (1-72c)$$

Mit der Variablen  $\delta = \gamma(0) + \frac{\pi}{\Phi_0} B_a t_{eff} a$  können wir dies unter Benutzung von  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$  schließlich in die Form

$$I_s = j_c \cdot a \cdot b \cdot \sin \delta \cdot \frac{\sin \left[ \frac{\pi}{\Phi_0} B_a t_{eff} a \right]}{\frac{\pi}{\Phi_0} B_a t_{eff} a} \quad (1-72d)$$

bringen.

Ähnlich wie bei Gl. (1-62) wird sich bei vorgegebenem Strom  $I$  und Magnetfeld  $B_a$  die Größe  $\delta$  so einstellen, dass Gl. (1-72d) erfüllt ist. Dies gelingt, bis  $\sin \delta$  gleich  $\pm 1$  ist, und wir erhalten schließlich die Magnetfeldabhängigkeit des kritischen Stroms des Josephson-Kontakts:

$$I_c(\Phi_K) = I_c(0) \cdot \left| \frac{\sin[\pi \frac{\Phi_K}{\Phi_0}]}{\pi \frac{\Phi_K}{\Phi_0}} \right| \quad (1-73)$$

mit  $\Phi_K = B_a t_{\text{eff}} a$  und  $I_c(0) = j_c \cdot a \cdot b$ .

Die Größe  $\Phi_K$  entspricht gerade dem magnetischen Fluss durch den Josephson-Kontakt.

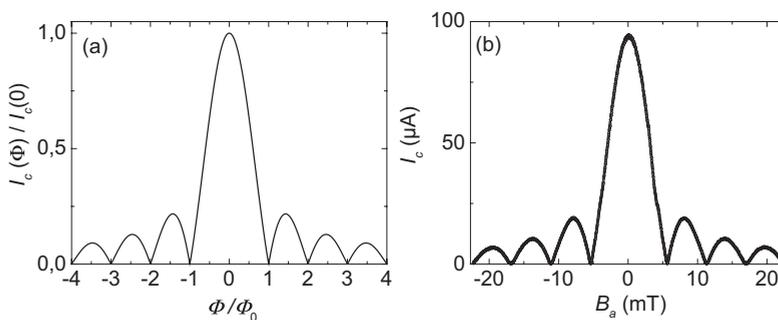
Die Funktion, Gl. (1-73), ist in Abb. 1.28a gezeichnet. Man bezeichnet sie in Analogie zur Lichtbeugung am Spalt auch als »**Spaltfunktion**« oder im Englischen als »**Fraunhofer pattern**«.

Die Abb. 1.28b zeigt die gemessene Abhängigkeit  $I_c(B_a)$  für einen an der PTB Braunschweig hergestellten NbAl-AIO<sub>x</sub>-Nb-Tunnelkontakt. Der Kontakt war 4 μm breit, die Dicken der beiden Nb-Elektroden betragen 100 bzw. 200 nm. Mit einem für Nb-Dünnschichten typischen Wert der London-Eindringtiefe von ca. 80 nm ergibt sich für  $t_{\text{eff}}$  ein Wert von ca. 0,11 μm. Man erwartet daher Nullstellen des kritischen Stroms im Abstand von  $\Delta B_a = \Phi_0 / (a \cdot t_{\text{eff}}) \approx 4,7$  mT, was mit der Beobachtung ( $\Delta B_a = 5,5$  mT) gut übereinstimmt.

Wäre die kritische Stromdichte  $j_c$  inhomogen gewesen, also von den Ortskoordinaten  $x$  und  $y$  abhängig, dann wäre  $I_c(B_a)$  deutlich von der Form der Spaltfunktion abgewichen. Die Messung von  $I_c(B_a)$  dient daher häufig als ein einfacher Test für die Homogenität der Barrierenschicht.

Wie stellt sich die Physik hinter der Spaltfunktion (1-73) dar?

Bei der Lichtbeugung am Spalt erscheinen die Minima in den Interferenzstreifen an den Orten, an denen die durch den Spalt tretenden Wellen destruktiv interferieren. Im Josephson-Kontakt ergibt sich nach Gl. (1-70) durch das Magnetfeld ein Anwachsen der eichinvarianten Phasendifferenz entlang der Barriere und die Suprastromdichte oszilliert in  $x$ -Richtung. An den Nullstellen von  $I_c(\Phi)$  ist die Periode dieser Oszillationen ein ganzzahliges Vielfaches der Kontaktbreite  $a$ . Damit fließen gleich große Anteile des Suprastroms nach beiden Richtungen über die Barriere und das Integral über die Suprastromdichte ist null, ganz egal wie groß der Wert der Anfangsphase  $\gamma(0)$  in Gl. (1-70) ist. Abseits der Nullstellen ist die Periode der Suprastromdichte aber inkommensurabel mit der Kontaktbreite, und der Suprastrom kann einen endlichen Wert annehmen, der durch die Phasenverschiebung  $\gamma(0)$  bis zu einem gewissen Maximalwert einstellbar ist. Dieser Maximalwert wird



**Abb. 1.28** Abhängigkeit des maximalen Josephson-Stroms von einem Magnetfeld parallel zur Barrierenschicht. (a) Theoretische Kurve nach Gl. (1-73), (b) Messung an einem NbAl-AIO<sub>x</sub>-Nb-Tunnelkontakt [48]; Messtemperatur: 4,2 K.

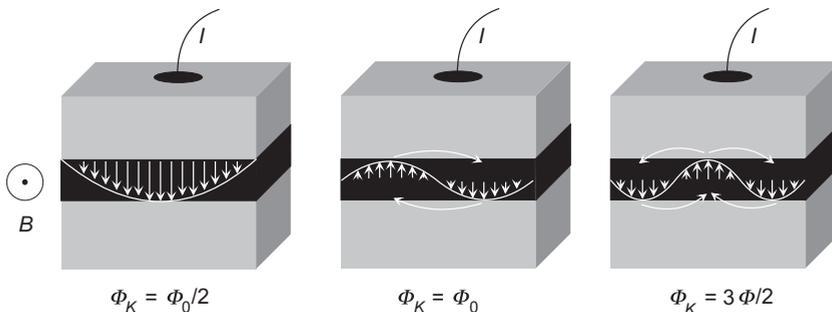
umso kleiner, je kürzer die Periode der Oszillationen der Suprastromdichte ist, da sich in jedem Fall die Suprastrome über eine ganze Periode hinweg wegmitteln.

Die Abb. 1.29 zeigt den Effekt beispielhaft für drei Stromdichteverteilungen bei den Flusswerten  $\Phi_0/2$ ,  $\Phi_0$  und  $3\Phi_0/2$ . Die Phasenlage  $\gamma(0)$  ist für die Werte  $\Phi_0/2$  und  $3\Phi_0/2$  so gewählt, dass der Suprastrom über den Kontakt maximal wird. Beim Fluss  $\Phi_0$  ist der Suprastrom über den Kontakt unabhängig von  $\gamma(0)$  immer null.

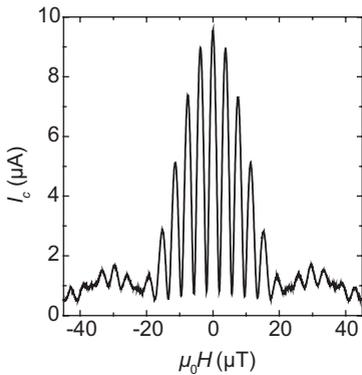
Man beachte außerdem, dass sich der Anteil des Josephson-Stroms, der nicht als Vorwärtsstrom über die Anordnung fließt, als Kreisstrom in den supraleitenden Elektroden schließen muss. Der Effekt ist in Abb. 1.29 durch waagrechte Pfeile angedeutet.

Was passiert schließlich, wenn wir das vom Josephson-Strom hervorgerufene Eigenfeld mitberücksichtigen? Wenn der Effekt des Eigenfelds gering ist, so dass der hierdurch hervorgerufene magnetische Fluss wesentlich geringer ist als  $\Phi_0$ , erhält man nur eine kleine Korrektur zum angelegten Feld. Erreicht aber der magnetische Fluss, der durch die über die Barrierenschicht zirkulierenden Suprastrome hervorgerufen wird, die Größenordnung  $\Phi_0$ , dann können Flusswirbel entstehen, deren Achsen in der Barrierenschicht verlaufen. Diese Flusswirbel, auch Josephson-Flussquanten oder Fluxonen genannt, zeigen eine Reihe sehr interessanter Eigenschaften, die wir in Abschn. 6.4 genauer betrachten werden. Insbesondere kann man auf der Basis sich bewegender Josephson-Flusswirbel Hochfrequenzoszillatoren realisieren, die bei der Verwendung von Josephson-Kontakten für die Mikrowellendetektion verwendet werden (siehe Abschn. 7.6.3).

Kommen wir nochmals zurück auf die Ringstruktur der Abb. 1.25. Wenn wir hier die endliche Ausdehnung der beiden Josephson-Kontakte berücksichtigen, dann überlagert sich die Feldabhängigkeit ihres kritischen Stroms mit der periodischen Modulation des maximalen Suprastroms durch die Ringstruktur. Formal können wir dies dadurch berücksichtigen, dass wir beispielsweise in Gl. (1-62)  $I_c$  durch Gl. (1-72d) ersetzen. Für ein typisches SQUID ist die Fläche  $a \cdot t_{eff}$  der beiden Josephson-Kontakte um mehrere Größenordnungen kleiner als die Fläche des SQUIDs selbst. Der maximale Suprastrom oszilliert auf einer Feldskala von einigen Mikrottesla, während der kritische Strom der Josephson-Kontakte erst in Feldern von ca. 1 mT nennenswert abnimmt. Man kann also mitunter Tausende von Oszillationen mit nahezu gleicher Maximalamplitude  $I_{c1} + I_{c2}$  beobachten. In einigen Fällen wurden aber Strukturen untersucht, bei denen SQUID-Fläche und Ausdehnung



**Abb. 1.29** Variation der Josephson-Suprastromdichte für drei verschiedene Werte des magnetischen Flusses durch den Josephson-Kontakt.



**Abb. 1.30** Magnetfeldabhängigkeit des maximalen Suprastroms einer SQUID-Struktur aus  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ . Die beiden Josephson-Kontakte sind  $9\ \mu\text{m}$  breit, so dass die  $I_c$ -Modulation der Einzelkontakte als Einhüllende der SQUID-Oszillationen sichtbar wird. Nach [49]. Ich danke C. Schneider und J. Mannhart für die Bereitstellung der Originaldaten.

der Josephson-Kontakte vergleichbar waren. Die Abb. 1.30 zeigt ein Beispiel einer Ringstruktur aus  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ , bei der die Fläche  $a \cdot t_{\text{eff}}$  der Josephson-Kontakte lediglich knapp einen Faktor zehn unterhalb der Ringfläche lag [49]. Hier ist deutlich die Überlagerung von SQUID-Modulation und Spaltfunktion zu erkennen.

### Zur Vertiefung 1.2 Elektronenholografie – Interferometrie mit einzelnen Elektronen

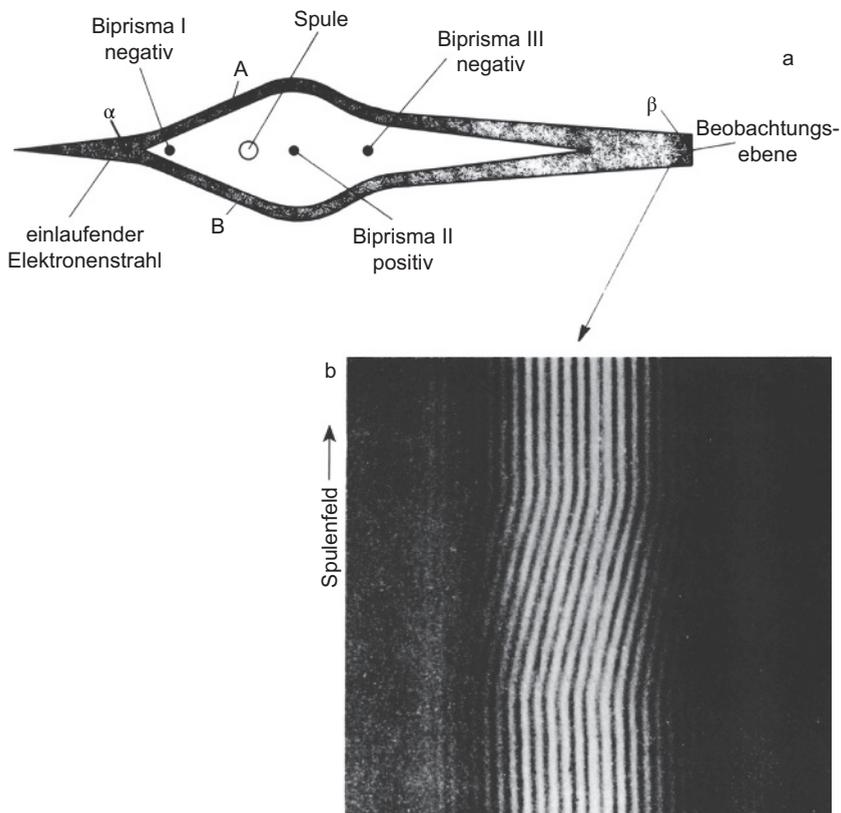
Zum Schluss dieses Kapitels wollen wir auf die Frage eingehen, in welcher Form ähnliche Interferenzerscheinungen für einzelne Elektronen beobachtet werden können.

Wir stellen uns vor, dass die Materiewelle, die ein Einzelelektron beschreibt, in zwei räumlich getrennte kohärente Teile aufgespalten wird, die dann später wieder zur Interferenz gebracht werden. Wenn die von den beiden Teilstrahlen gebildete Fläche von einem Fluss  $\Phi$  durchsetzt wird, dann sollte sich ein Gangunterschied zwischen den beiden Teilstrahlen einstellen. Wir erwarten eine Phasenverschiebung um  $2\pi$  bei einer Flussänderung von  $h/e$ , also dem doppelten bei Supraleitern beobachteten Wert.

Ein derartiges Experiment wurde 1962 mit Elektronenwellen im Vakuum von Möllenstedt und Mitarbeitern durchgeführt [50]. Sie zerlegten einen Elektronenstrahl mittels eines sehr dünnen, negativ geladenen Drahts (einem »Biprisma«) in zwei Teilbündel, die sie auf gegenüberliegenden Seiten um eine winzige Spule (Durchmesser ca.  $20\ \mu\text{m}$ ) herumführten und anschließend durch Verwendung weiterer Biprismen zu einem Interferenzstreifensystem überlagerten. Sie erhielten das bekannte Interferenzmuster des Doppelspalts. Nun wurde das Interferenzstreifensystem bei verschiedenen Magnetfeldern in der Spule aufgenommen. Es ergab sich eine Verschiebung des Streifensystems bei Änderung des Magnetfelds mit der erwarteten Phasenverschiebung von  $2\pi$  bei einer Flussänderung von  $h/e$ . Die Abb. 1.31a zeigt die Anordnung schematisch und eine Aufnahme des Streifensystems (Abb. 1.31b). Dabei wurde der Film während der Änderung des Magnetfelds senkrecht zum Streifensystem bewegt. Man sieht deutlich die Verschiebung des Streifensystems. Sie beträgt für die gesamte Feldänderung in

Abb. 1.31b etwa drei volle Perioden, d. h., dass die Phasendifferenz der Teilbündel in diesem Experiment um etwa  $3 \cdot 2\pi$  durch das Magnetfeld geändert wurde.

Das Besondere des Experiments ist, dass das Magnetfeld sehr gut auf das Innere der Spule beschränkt war. Die rückläufigen Feldlinien wurden bei dem vorliegenden Experiment außerhalb der von den Elektronen gebildeten Schleife durch ein Joch aus magnetischem Material geführt. Die Verschiebung des Interferenzstreifenmusters ergab sich also, obwohl außer den – konstant gehaltenen – elektrostatischen Kräften durch die Biprismen keine Lorentz-Kraft auf die Elektronen ausgeübt wurde. Man hat also einen Effekt, der sich in einem klassischen Teilchenbild nicht erklären lässt: Die Interferenzstreifen änderten sich als Funktion des magnetischen Flusses zwischen den beiden Teilstrahlen, ohne dass zusätzliche Kräfte die Elektronenbahn beeinflusst hätten.



**Abb. 1.31** Zur Phasenänderung von Elektronenwellen durch ein Vektorpotenzial. (a) Strahlengang; (b) Interferenzfigur bei veränderlichem Magnetfeld. Die Biprismen sind metallisierte Quarzfäden. Die Spule mit 20  $\mu\text{m}$  Durchmesser wurde aus Wolframdraht hergestellt (nach [50]).

Dieser nichtklassische Effekt wurde bereits 1959 von Aharonov und Bohm beschrieben [51]. Er wurde in den Folgejahren sehr kontrovers diskutiert, konnte aber durch die Verwendung ringförmiger, mit einem supraleitenden Überzug gekapselter Magnete, die das Magnetfeld vollständig in ihrem Inneren tragen, zugunsten von Bohm und Aharonov entschieden werden [11].

Auf dem hier beschriebenen Prinzip der Elektronenholographie wurden auch die Flusslinien der Abb. 1.10d aufgenommen. Die Quantenmechanik tritt uns in diesem Experiment also gleich zweifach gegenüber: Einerseits wurde die Wellennatur des Elektrons genutzt, um die Abbildung zu erzeugen, andererseits wurde ja gerade der quantisierte magnetische Fluss eines Flusswirbels im Supraleiter nachgewiesen.

Die Beobachtung der Flussquantisierung und der Quanteninterferenzen in Josephson-Kontakten und SQUID-Ringen hat klar gezeigt, dass die wesentliche Eigenschaft des supraleitenden Zustands die Ausbildung einer kohärenten Materiewelle ist. Dabei wurde für die Ladung der supraleitenden Ladungsträger immer der Wert  $2e$  gefunden. Wir werden im Kap. 3 beschreiben, wie diese Cooper-Paarung zustande kommt. Zuvor werden wir uns allerdings den unterschiedlichen supraleitenden Materialien selbst zuwenden.

## Zusammenfassung

In Kap. 1 mussten wir notwendigerweise eine Vielzahl von Begriffen einführen, die in den nachfolgenden Abschnitten immer wieder verwendet werden. Wir geben hier stichwortartig die wichtigsten Begriffe und Sachverhalte an, über deren Bedeutung Sie sich klar sein sollten:

- Dauerstrom, Verschwinden des elektrischen Widerstands,
- Typ-I- und Typ-II-Supraleiter,
- kritische Magnetfelder,
- idealer Diamagnetismus (Meißner-Ochsenfeld-Effekt),
- Shubnikov-Phase,
- Flussschlauch, Flussquantisierung, Fluxoidquantisierung,
- Cooper-Paar,
- London-Eindringtiefe, Ginzburg-Landau-Kohärenzlänge,
- erste und zweite London-Gleichung,
- Josephson-Kontakt, erste und zweite Josephson-Gleichung, Quanteninterferenz.

## Literatur zu Kapitel 1

1. Fulton, T.A. (1968). *Phys. Lett.* 27A (33): 521.
2. Kamerlingh-Onnes, H. (1914). *Comm. Leiden.* 140b, c u. 141b.
3. Tuyn, W. (1929). *Comm. Leiden.* 198 .
4. Kamerlingh-Onnes, H. (1924). *Comm. Leiden Suppl.* 50 a.
5. Meißner, W. u. Ochsenfeld, R. (1933). *Naturwissenschaften* 21: 787.

6. Geim, A. (1998). *Phys. Today*, Sept. 36
7. Cribier, D., Jacrot, B., Madhav Rao, L. et al. (1964). *Phys. Lett.* 9: 106.
8. Eßmann, U. u. Träuble, H. (1967). *Phys. Lett* 24 A: 526 u. *J. Sci. Instrum.* (1966). 43: 344.
9. E.M. Forgan (Univ. Birmingham), S.L. Lee (Univ. St. Andrews), D. McK.Paul (Univ. Warwick), H.A. Mook (Oak Ridge) u. Cubitt, R. (2003) (ILL), Institut Max von Laue-Paul Lang-  
evin.
10. Goa, P.E., Hauglin, H., Baziljevich, M. et al. (2001). *Supercond. Sci. Technol.* 14: 729.
11. Tonomura, A. (1998). »Electron holography«. *Springer Ser. Opt. Sci.* 70 .
12. Matsuda, T., Hasegawa, H., Igarashi, M. et al. (1989). *Phys. Rev. Lett.* 62: 2519
13. Gross, R. u. Koelle, D. (1994). *Rep. Prog. Phys.* 57: 651.
14. Straub, R., Keil, S., Kleiner, R. et al. (2001). *Appl. Phys. Lett.* 78: 3645
15. Doenitz, D., Straub, R., Kleiner, R. et al. (2004). *Appl. Phys. Lett.* 85: 5938.
16. de Lozanne, A. (1999). *Supercond. Sci. Technol.* 12: Seite R43.
17. Oral, A., Barnard, J.C., Bending, S.J. et al. (1998). *Phys. Rev. Lett.* 80: 3610.
18. Kirtley, J.R., Ketchen, M.B., Staviasz, K.G. et al. (1995). *Appl. Phys. Lett.* 66: 1138.
19. Hess, H.F., Robinson, R.B. u. Waszczak, J.V. (1990). *Phys. Rev. Lett.* 64: 2711.
20. Schultz, L., Krabbes, G., Fuchs, G. et al. (2002). *Z. Metallkd* 93: 1057; Abb. 12 aus "Super-  
conducting permanent magnets and their application in magnetic levitation", International  
Journal of Materials Research, vol. 93, no. 10, 2002, pp. 1057–1064, [https://doi.org/10.1515/  
ijmr-2002-0181](https://doi.org/10.1515/ijmr-2002-0181).
21. London, F. (1950). »Superfluids«. Seite I: 152, Wiley.
22. Doll, R. u. Näbauer, M. (1961). *Phys. Rev. Lett.* 7: 51.
23. Deaver Jr., B.S. u. Fairbank, W.M. (1961). *Phys. Rev. Lett.* 7: 43.
24. London, F. u. London, H. (1935). *Z. Phys.* 96: 359.
25. Lock, J.M. (1951). *Proc. R. Soc. London, Ser. A* 208: 391.
26. Jackson, T.J., Riseman, T.M., Forgan, E.M. et al. (2000). *Phys. Rev. Lett.* 84: 4958.
27. Pippard, A.B. (1950). *Proc. R. Soc. London, Ser. A* 203: 210.
28. Langer, J.S. u. Ambegaokar, V. (1967). *Phys. Rev.* 164: 498.
29. McCumber, D.E. u. Halperin, B.I. (1970). *Phys. Rev. B* 1: 1054.
30. Lukens, J.E., Warburton, R.J. u. Webb, W.W. (1970). *Phys. Rev. Lett.* 25: 1180.
31. Newbower, R.S., Beasley, M.R. u. Tinkham, M. (1972). *Phys. Rev. B* 5: 864.
32. Josephson, B.D. (1962). *Phys. Lett.* 1: 251.
33. »Feynman Lectures on Physics«. (1965). Bd. 3, New York: Addison-Wesley Publ. Comp.,
34. Landau, L.D. u. Lifschitz, E.M. (1980). »Lehrbuch der Theoretischen Physik«. Bd. IX, Ber-  
lin: Akademie-Verlag.
35. Gross, R. (1994). »Interfaces in High- $T_c$  Superconducting Systems« (Hrsg. S.L. Shinde u.  
D.A. Rudman), 176. New York: Springer.
36. Hilgenkamp, H. u. Mannhart, J. (2002). *Rev. Mod. Phys.* 74: 485.
37. Kleiner, R., Steinmeyer, F., Kunkel, G. et al. (1992). *Phys. Rev. Lett.* 68: 2394.
38. Tsai, J.S., Jain, A.K. u. Lukens, J.E. (1983). *Phys. Rev. Lett.* 51: 316.
39. Witt, T.J. (1988). *Phys. Rev. Lett.* 61: 1423.
40. McDonald, D.G. (1990). *Science* 247: 177.
41. Shapiro, S. (1963). *Phys. Rev. Lett.* 11: 80.
42. Giaever, I. (1965). *Phys. Rev. Lett.* 14: 904.
43. Dayem, A.H. u. Martin, R.J. (1962). *Phys. Rev. Lett.* 8: 246.
44. Langenberg, D.N., Scalapino, D.J., Taylor, B.N. et al. (1965). *Phys. Rev. Lett.* 15: 294.
45. Jaklevic, R.C., Lambe, J., Mercereau, J.E. et al. (1965). *Phys. Rev.* 140 A: 1628.

46. London, F. (1950). »Superfluids« B and I, »Macroscopic Theory of Superconductivity«. New York: John Wiley & Sons, Inc.
47. Schwab, K., Bruckner, N. u. Packard, R.E. (1997). *Nature* 386: 585.
48. Praktikumsversuch, Physikalisches Institut, Universität Tübingen (2022). Die Probe wurde an der PTB Braunschweig (Dr. Dr. O. Kieler) hergestellt.
49. Schulz, R.R., Chesca, B., Goetz, B. et al. (2000). *Appl. Phys. Lett.* 76: 912.
50. Möllenstedt, G. u. Bayh, W. (1962). *Phys. Bl.* 18: 299.
51. Aharonov, Y. u. Bohm, D. (1959). *Phys. Rev.* 115: 485.