Mit eLearning
#besser lernen

Brückenkurs Mathematik

3., aktualisierte Auflage

Michael Ruhrländer

Pearson

Zugangscode

Falls Sie beim Kauf Ihres eBooks keinen Zugangscode erhalten haben, kontaktieren Sie uns bitte über die folgende Seite und halten Sie Ihre Rechnung/Bestellbestätigung bereit:
https://www.pearson.de/ebook-zugangscode

Setzen wir das in die zweitletzte Gleichung ein, so ergibt sich

$$-2y - 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow y = 0\,.$$

Und ebenso für die erste Gleichung

$$-x + 0 + 0 = 0 \Rightarrow x = 0\,,$$

d. h., wir erhalten eine eindeutige Lösung, nämlich

$$(x, y, z) = (0, 0, 0)\,,$$

die sogenannte **Nulllösung**. Die Nulllösung ist für alle homogenen lineare Gleichungssysteme eine gültige Lösung, d. h.

Homogene LGSe haben immer mindestens eine Lösung.

Diesen Sachverhalt sieht man vielleicht leichter ein, wenn man das homogene LGS in Gleichungsform betrachtet:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 3y & - & 2z & = & 0 \\ 5x & + & y & + & 4z & = & 0 \end{array}$$

Wählt man

$$x = y = z = 0\,,$$

so ergibt sich ohne großes Nachrechnen, dass diese Wahl das Gleichungssystem löst. ■

Als letztes Beispiel in diesem Abschnitt betrachten wir ein homogenes LGS, das unendlich viele Lösungen hat.

Learn a little

...do a little

Beispiel 3.21 **Homogenes lineare Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen**

Wie nehmen das LGS aus Beispiel 3.18 und setzen die rechte Seite gleich null

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -8 & 9 & 0 \end{array}\right].$$

Wie schon im vorherigen Beispiel erwähnt, ändern die im Gauß-Verfahren eingesetzten Umformungen die rechte Seite nicht, sodass wir ohne weiteres Nachrechnen die Stufenform aus dem obigen Beispiel übernehmen können

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -8 & 9 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Aus der letzten Zeile folgt die Gleichung

$$0 \cdot z = 0\,,$$

die für beliebiges z erfüllt ist. Wir setzen wieder $z = t$, wobei t eine beliebige reelle Zahl sein kann und setzen diesen Wert in die vorletzte Gleichung ein

$$-5y + 7t = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{5}t\,.$$

Nun werden die beiden gefundenen Werte für z und y in die erste Gleichung eingesetzt

$$x - 3(\frac{7}{5}\,t) + 2t = 0 \Rightarrow x - \frac{21}{5}\,t + \frac{10}{5}\,t \Rightarrow x = \frac{11}{5}\,t\,.$$

Wir erhalten das Ergebnis, dass die Variablen x, y, z beliebig viele Werte annehmen können. Wir haben also für das homogene lineare Gleichungssystem eine Lösungsmenge mit unendlich vielen Lösungen gefunden, da t als beliebige reelle Zahl unendlich viele unterschiedliche Werte annehmen kann. Die Lösungsmenge schreibt man in folgender Form auf:

$$\mathbb{L} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y, z) = \left(\frac{11}{5}\,t, \frac{7}{5}\,t, t\right); t \in \mathbb{R}\right\}$$

■

Wir fassen die Ergebnisse der letzten Beispiele nochmals zusammen.

Merke

Lösungsverhalten linearer Gleichungssysteme

- Ein inhomogenes LGS besitzt entweder genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen oder überhaupt keine Lösung.
- Ein homogenes LGS besitzt entweder genau eine Lösung, nämlich die Nulllösung

  $$x = y = z = 0,$$

  oder unendlich viele Lösungen.

Aufgaben zu Kapitel 3

1. Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a. $\dfrac{1}{1+x} = 1$ **b.** $\dfrac{1}{1+x} = 0$

c. $\dfrac{a^2-1}{x-a} + \dfrac{a^2+1}{x+a} = a^2 + \dfrac{a^4}{x^2-a^2}, a \geq 2$ **d.** $\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{1-x} = 2$

e. $\dfrac{x^2-1}{(x+1)(x+2)} = 1$ **f.** $\dfrac{x-8}{x-9} = \dfrac{x-5}{x-7}$

g. $\dfrac{1}{2x-x^2} + \dfrac{x-4}{x^2+2x} + \dfrac{2}{x^2-4} = 0\,.$

2. Schreiben Sie als Summe zweier Quadrate:

a. $9x^2 + 6x + 2$ **b.** $x^2 + px + q \quad \text{mit} \quad 4q \geq p^2\,.$

3. Ermitteln Sie die Lösungen folgender Gleichungen:

a. $2x^2 - 7x + 5 = 0$ **b.** $2x^2 - 7x - 5 = 0$ **c.** $x^6 + 5x^3 - 36 = 0$

d. $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ **e.** $x^4 - 3x^2 - 2x = 0\,.$

4. Zerlegen Sie mit Polynomdivision:

a. $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$ **b.** $\dfrac{a^3+b^3}{a+b}$

c. $\dfrac{a^3-b^3}{a-b}$ **d.** $\dfrac{a^4-b^4}{a-b}\,.$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

a. $\sqrt{x+4} = x+2$ **b.** $\sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{5x-4}$

c. $\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2-1}$ **d.** $3^{3x-5} = 9^{x+3}$

e. $\sqrt[3]{a^{5-2n}}\,\sqrt[4]{a^{2n-4}} = \sqrt[6]{a^x}, \quad a > 0\,.$

6. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung $2^x + 2^a = 2^{x+a}$ lösbar?

7. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:

a. $\ln 5^x = \ln 2^x + 2$ **b.** $\dfrac{1}{2}\ln x^2 + \dfrac{1}{3}\ln x^3 = 2e$

c. $2\log_2(x-1) = \log_2(x+1) + 3\,.$

8. Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmenge folgender Ungleichungen:

a. $\dfrac{1}{x-1} \geq 2$ **b.** $\dfrac{4}{2x-3} > 5$ **c.** $ax < x + a + 1, \quad a \in \mathbb{R}$

d. $\dfrac{x-2}{x+3} > 6$ **e.** $(x+1)\,(x+2) > 0$ **f.** $\dfrac{x}{a+2} - \dfrac{1}{a-2} < \dfrac{1}{a^2-4}, \quad a \neq \pm 2\,.$

9. Bestimmen Sie die Definitions und Lösungsmengen folgender Betragsgleichungen:

a. $|x-3| = |x+5|$ **b.** $\left|x^2-9\right| = \left|x^2-4\right|$

c. $\left|9+8x-x^2\right| = 6x+1$ **d.** $\left|x^3-3\right| = 5\,.$

10. Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen folgender Betragsungleichungen:

a. $|x-3| < 1$

b. $|(x-9)\,(x-4)| < x-2$ (Teichnen Sie zur Überprüfung die Graphen der beiden Funktionen $y = |(x-9)\,(x-4)|$ und $y = x-2$.)

c. $|x-2| < x^2$

d. $\left|x^3-3\right| > 5\,.$

11. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{10}$, $x - y = 5\,.$

12. Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme an:

a.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 &= 9 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 6x_1 + 2x_2 + 10x_3 &= 20 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 4x_1 \qquad\;\; + 4x_3 - 2x_4 &= 40 \\ 3x_1 + x_2 \qquad\qquad - 12x_4 &= 18 \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 + 8x_4 &= 62 \\ x_2 + x_3 \qquad\quad &= 4\,. \end{aligned}$$

Zusammenfassung

- **Gleichungen** bestehen aus zwei Termen, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden werden.
- Die **Definitionsmenge** einer Gleichung mit Variablen besteht aus allen reellen Zahlen, die die Variablen annehmen dürfen.
- Die **Äquivalenzumformungen** ändern die Lösungsmenge einer Gleichung nicht.
- **Wurzelgleichungen** werden oftmals nicht äquivalent umgeformt. Die so gefundenen Lösungen müssen mit der Definitionsmenge der Ursprungsgleichung abgeglichen werden.
- **Quadratische Gleichungen** werden durch die p-q-Formel oder mithilfe des Satzes von Vieta gelöst.
- Bei Gleichungen höherer Ordnung kann man oftmals eine ganzzahlige Lösung in der Menge aller Teiler des konstanten Koeffizienten finden.
- Hat man eine Lösung gefunden, so lässt sich die Gleichung durch **Polynomdivision** in eine Gleichung niedriger Ordnung vereinfachen.
- Enthält eine Gleichung Beträge, so werden die Lösungen durch Fallunterscheidungen ermittelt.
- Für Ungleichungen gibt es Äquivalenzumformungen, die die Lösungsmenge nicht verändern.
- Bei speziellen Umformungen wird die Ordnungsrelation der Ungleichung umgedreht.
- **Betragsungleichungen** werden durch Fallunterscheidungen gelöst.
- Bei **Gleichungssystemen** sucht man Lösungen, die jede einzelne Gleichung erfüllen.
- Gleichungssysteme kann man mit dem Einsetzungs-, dem Gleichsetzungs- oder dem Eliminationsverfahren lösen.
- Bei linearen Gleichungssystemen kommt häufig ein spezielles Eliminationsverfahren, der sogenannte **Gauß-Algorithmus** zum Einsatz.
- **Inhomogene lineare Gleichungssysteme** haben entweder keine oder eine einzige Lösung oder unendliche viele Lösungen.
- **Homogene lineare Gleichungssysteme** haben entweder die Nulllösung als einzige Lösung oder unendlich viele Lösungen.

Lernziele

In diesem Kapitel lernen Sie,

- wie man reelle Funktionen definiert und durch ihre Graphen veranschaulicht,
- was Nullstellen und Symmetrien bei reellen Funktionen bedeuten,
- wann eine Funktion periodisch oder monoton ist,
- was die Verkettung von Funktionen bedeutet,
- was die Umkehrabbildung einer Funktion ist und dass streng monotone Funktionen umkehrbar sind,
- dass es einen Algorithmus zur Herleitung der Umkehrfunktion gibt,
- was Zahlenfolgen sind, wie man den Grenzwert von Zahlenfolgen berechnet und wie man den Grenzwert einer Funktion an einer Stelle x_0 definiert,
- wie man das Verhalten einer Funktion im Unendlichen durch Grenzwertberechnung untersuchen kann,
- dass es Rechenregeln für die Grenzwerte von Funktionen gibt,
- was eine stetige Funktion ist,
- wie man Polynome definiert und dass ein Polynom n-ten Grades höchstens n Nullstellen hat,
- wie man das Hornerschema zur Berechnung von Funktionswerten von Polynomen einsetzen kann,
- dass der Vietasche Wurzelsatz hilft, Nullstellen von Polynomen zu finden,
- dass gebrochenrationale Funktionen aus dem Quotienten zweier Polynome bestehen, und wie man die Null- und Polstellen von gebrochenrationalen Funktionen berechnet,
- wie man gebrochenrationale Funktionen zerlegen kann,
- wie man mithilfe von Asymptoten das Verhalten von gebrochenrationalen Funktionen im Unendlichen untersuchen kann,
- wie man die trigonometrischen Funktionen definiert und was die hauptsächlichen Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen sind,
- welche Beziehungen es zwischen den trigonometrischen Funktionen gibt,
- wie man Exponential- und Logarithmusfunktionen definiert und welche hauptsächlichen Eigenschaften diese haben.

Reelle Funktionen

4

ÜBERBLICK

Übersicht

Oftmals steht man vor der Aufgabe, den Elementen einer Menge auf klare Weise Elemente einer anderen zuzuordnen, z.B. wenn man im Supermarkt jedem Produkt einen Preis zuordnen will. Eine solche eindeutige Vorschrift nennt man **Funktion**. Sind die Elemente, die man zuordnen will, und auch die Ergebnisse der Zuordnung reelle Zahlen, so spricht man von einer **reellen Funktion**. Eine Funktion f kann man sich als eine Maschine vorstellen: Man nehme eine Zahl x und stecke diese in die Maschine. Die Maschine arbeitet und wirft dann eine (und nur *eine*!) Zahl y als Output wieder heraus. Und bei gleichem Input x kommt auch immer der gleiche Output y heraus.

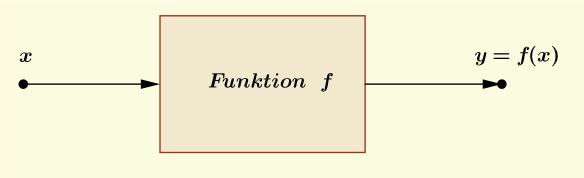

Abbildung 4.1 Die Funktionsmaschine f

Möchte man wissen, welcher Input x das Ergebnis y produziert hat, so schreibt man $y = f(x)$. Bevor wir die »ordentliche« Definition von Funktionen hinschreiben noch ein kleines Beispiel. Die Vorschrift f soll darin bestehen, das jeweils Doppelte des Input zu generieren. Einer Zahl x wird also die Zahl $2x$ zugeordnet, und das schreibt man dann kurz als

$$f(x) = 2x.$$

4.1 Allgemeine Funktionseigenschaften

Definition von Funktionen

Wir beginnen mit der Definition einer reellen Funktion.

Definition

Seien $\mathbb{D}$, $\mathbb{W}$ Teilmengen von $\mathbb{R}$. Unter einer **reellen Funktion f** versteht man eine Vorschrift, die jedem Element x aus $\mathbb{D}$ **genau ein** Element $y = f(x)$ aus $\mathbb{W}$ zuordnet. Man schreibt

$$f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{W}.$$

Beachte: Zur Definition einer Funktion gehören neben der Funktionsvorschrift f auch die Mengen $\mathbb{D}$ und $\mathbb{W}$.

- Die Zahl x nennt man **unabhängige Variable** oder **Argument**.
- Die Zahl y heißt **abhängige Variable** oder **Funktionswert**.
- Die Menge $\mathbb{D}$ ist der **Definitionsbereich** und die Menge $\mathbb{W}$ der **Wertebereich** von f.
- Die Menge
$$f(\mathbb{D}) = \{f(x) \in \mathbb{W} \colon x \in \mathbb{D}\}$$
wird als **Bildbereich** von f bezeichnet.
- Die Menge
$$G_f = \{(x, y) \colon x \in \mathbb{D} \quad \text{und} \quad y = f(x)\}$$
nennt man den **Graphen** oder die **Kurve** von f. Um den Graphen einer Funktion darzustellen, wählen wir ein (x, y)-Koordinatensystem, tragen dort eine Reihe von x-Werten und die zugehörigen Funktionswerte $y = f(x)$ ein und verbinden die Punkte (x, y) durch eine Linie.

Wir schauen uns ein Beispiel an.

Learn a little …do a little

Beispiel 4.1 **Quadratische Funktion**

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon\ [-2, 2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$$

Diese Funktion hat folgende Eigenschaften.

- Die Vorschrift f besagt, dass jeder Zahl x ihr Quadrat zugeordnet werden soll.
- Der Definitionsbereich von f ist das abgeschlossene Intervall $[-2, 2]$, also eine Teilmenge der reellen Zahlen.

- Der Wertebereich besteht aus der Menge der reellen Zahlen.
- Den Bildbereich erhalten wir dadurch, dass wir uns fragen, für welche $y \in \mathbb{R}$ es x-Werte gibt, sodass $y = x^2$ ist. Da die Quadratzahlen alle größer oder gleich Null sind und die x-Werte zwischen -2 und 2 liegen, ist

$$f(\mathbb{D}) = \left\{x^2 : x \in [-2, 2]\right\} = [0, 4] .$$

  Wir können festhalten: Der Bildbereich ist immer eine Teilmenge des Wertebereichs.
- Für den Graphen der Funktion stellen wir zunächst eine **Wertetabelle** auf:

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2
$f(x) = x^2$	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4

  Dann tragen wir diese Punkte in ein Koordinatensystem ein und verbinden sie wie in ► Abbildung 4.2.

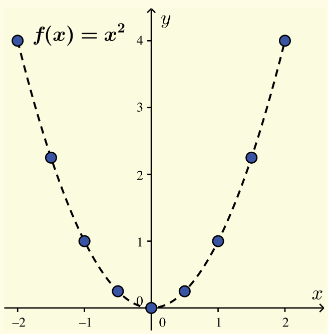

Abbildung 4.2 $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[-2, 2]$

Nullstellen, Symmetrie von Funktionen

Seien $\mathbb{D}, \mathbb{W} \subset \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{D} \to \mathbb{W}$ eine Funktion.

- Ein $x_0 \in \mathbb{D}$ mit $f(x_0) = 0$ heißt **Nullstelle** von f. In einer Nullstelle schneidet oder berührt der Graph der Funktion die x-Achse. Zur Bestimmung der Nullstellen wird die Gleichung $f(x) = 0$ nach x aufgelöst. Falls dies nicht möglich ist, müssen *numerische Näherungsverfahren*, deren Behandlung allerdings über den Rahmen dieses Kurses hinausgeht, eingesetzt werden.
- Die Funktion f heißt **gerade**, wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt:

$$f(x) = f(-x)$$

  Der Graph von f liegt dann **spiegelsymmetrisch zur y-Achse**.

- Die Funktion f heißt **ungerade**, wenn für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt:

$$f(x) = -f(-x)$$

Der Graph von f ist dann **zentralsymmetrisch (punktsymmetrisch) zum Ursprung des Koordinatensystems**.

- Es gibt natürlich Funktionen, die weder gerade noch ungerade sind. Die Funktion

$$f(x) = x + x^2$$

ist z. B. eine solche, denn es gilt

$$f(-x) = -x + (-x)^2 = -x + x^2 \neq \begin{cases} x + x^2 & = f(x) \\ -x - x^2 & = -f(x)\,. \end{cases}$$

Learn a little …do a little

Beispiel 4.2 **Gerade und ungerade Funktionen**

a Die bekanntesten geraden Funktionen sind die Parabel $y = f(x) = x^2$ und die trigonometrische Funktion $y = \cos x$ (►Abbildung 4.3).

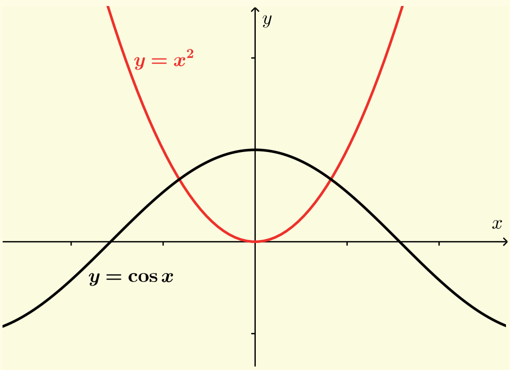

Abbildung 4.3 Graphen von $y = x^2$ und $y = \cos x$

Die Parabel hat eine einzige Nullstelle bei $x_0 = 0$. Der Kosinus hat unendlich viele Nullstellen, nämlich alle ungeraden ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$.

Learn a Little …do a Little

b Dagegen sind die kubische Funktion $y = x^3$ sowie der Sinusfunktion ungerade. ► Abbildung 4.4 zeigt die Graphen der beiden Funktionen.