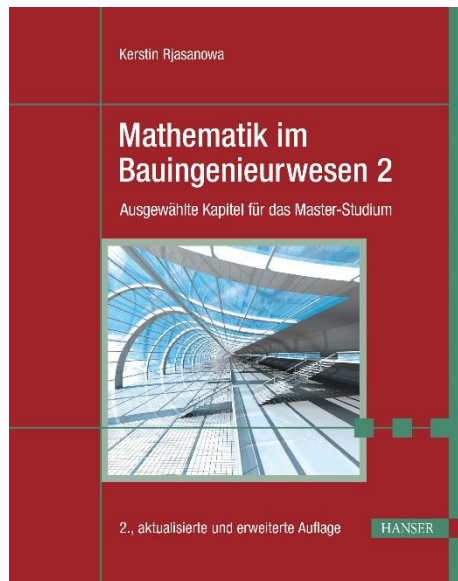


# HANSER



## Leseprobe

zu

## Mathematik im Bauingenieurwesen 2

von Kerstin Rjasanowa

Print-ISBN: 978-3-446-48099-5

E-Book-ISBN: 978-3-446-48112-1

Weitere Informationen und Bestellungen unter

<https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446480995>

sowie im Buchhandel

© Carl Hanser Verlag, München

# Vorwort

*„Jede Wissenschaft ist so weit Wissenschaft, wie Mathematik in ihr ist.“*

Immanuel Kant (1724–1804)

Mit Einführung der Bachelor- und Masterstudiengänge an den deutschen Hochschulen haben sich gleichzeitig neue Anforderungen für deren inhaltliche Gestaltung ergeben. Das vorliegende Buch, das auf der Basis meiner Vorlesungen in Mathematik im Masterstudiengang Bauingenieurwesen an der Hochschule Kaiserslautern entstanden ist, trägt dieser aktuellen Entwicklung Rechnung. Kapitel 1 beschäftigt sich mit Funktionen mehrerer Veränderlicher sowie deren Differenzialrechnung und Integralrechnung, die u. a. die Ermittlung von Extremwerten bzw. die Berechnung von Momenten für Flächen und Volumina auch bei inhomogener Dichteverteilung ermöglicht. Gleichzeitig ist es Voraussetzung für das Kapitel 2, das Grundlagen für das Lösen gewöhnlicher Differenzialgleichungen bzw. von Systemen gewöhnlicher Differenzialgleichungen enthält. Die Fallstudien hierzu zeigen, dass viele physikalische Modelle im Bauingenieurwesen auf Differenzialgleichungen führen, deren Lösung somit eine zentrale Rolle spielt. In Kapitel 3 werden Grundbegriffe der Finanzmathematik wie Zinsrechnung, Wirtschaftlichkeits- und Investitionsrechnung, Abschreibungs- und Rentenrechnung vermittelt, auf denen betriebswirtschaftliche Kenntnisse basieren. Diese gewinnen in zunehmendem Maß Bedeutung bei der Planung, Realisierung und Erhaltung von Bauvorhaben, beim Management von Immobilien oder bei der erfolgreichen Leitung von Unternehmen auch im Baubereich. Kapitel 4 ist der Statistik gewidmet, deren Gegenstand die Analyse und zahlenmäßige Erfassung zufälliger, d. h., nicht vorhersehbarer, Experimente ist. Diese hat im Bauingenieurwesen zunehmend Eingang gefunden, z. B. bei der Aus- und Bewertung von Messungen, bei der Vorhersage von Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse, die als Grundlage für die Bemessung von Bauwerken benutzt werden, oder sogar bei der Bewertung von Immobilien.

Die Darstellung der Inhalte orientiert sich am Vorgänger „Mathematik für Bauingenieure 1 – Grundlagen für das Bachelor-Studium“, was das Studium dieses Buches erleichtern soll. Eine zielgerichtete, mathematisch korrekte und für das Bauingenieurwesen geeignete Darlegung steht dabei im Mittelpunkt. Kleingedruckte Ergänzungen wie z. B. Beweise erhöhen das mathematische Verständnis, sind aber für die Anwendung der Ergebnisse nicht zwingend erforderlich. Die überwiegende Mehrheit der Beispiele zur Illustration getroffener Aussagen bzw. zur Lösung praktischer Probleme ist aus dem Erfahrungsbereich Bauingenieurwesen entnommen. Fallstudien am Ende der Kapitel enthalten dafür typische Situationen, die Ableitung geeigneter mathematischer Modelle und die Lösung mit den dargestellten Methoden. Besonderer Wert ist auf eine strukturierte Gestaltung des mathematischen Textes gelegt. Zahlreiche Schlagwörter auf der Marginalienspalte erhöhen die Übersicht, gestatten bessere logische Nachvollziehbarkeit und helfen beim Nachschlagen. Die farbliche Gestaltung, insbesondere das Unterlegen resultierender Formeln und Ergebnisse sowie zahlreiche Grafiken und Bilder, dienen ebenfalls einem vertiefenden Verständnis. Ein ausführliches Sachwortverzeichnis soll die Arbeit mit dem Buch erleichtern.

Für die gewissenhafte Durchsicht des Buches danke ich sehr Herrn Dr. S. Steidel vom ITWM Fraunhofer in Kaiserslautern, Herrn R. Berweiler von der Universität Koblenz, Herrn Prof. Dr. J. Schanzenbach von der HS Kaiserslautern sowie Herrn T. Seel, z. Zt. Master-Student im Studiengang Bauingenieurwesen der HS Kaiserslautern. Ein Dankeschön gilt ebenfalls vielen Studierenden des Studienganges Bauingenieurwesen der Hochschule Kaiserslautern, die Kontrollrechnungen der Übungsaufgaben vornahmen und so mithalfen, die angegebenen Lösungen zu verifizieren. Bei Herrn Ph. Thorwirth vom Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag bedanke ich mich herzlich für die Unterstützung beim Entstehen des vorliegenden Buches und die gute Zusammenarbeit mit dem Verlag.

Die vorliegende 2., aktualisierte und erweiterte Auflage des Buches „Mathematik im Bauingenieurwesen 2 – Ausgewählte Kapitel für Ingenieure im Masterstudium“ enthält einige inhaltliche Ergänzungen, vorwiegend in Kapitel 1 (Verallgemeinerung der hinreichenden Bedingungen für lokale Extrema bei Funktionen beliebig vieler Veränderlicher, Substitution in Doppelintegralen, Erweiterung der Schlussfolgerungen aus dem Satz von Green) und Kapitel 3 (Effektivzins und Kurs eines Wertpapiers) sowie zahlreiche neue Anwendungsbeispiele in den Kapiteln 1, 3 und 4. Damit wird die Auswahl der mathematischen Inhalte im Masterstudium abgerundet und durch die vollständig durchgerechneten und, wo möglich, mit Illustrationen versehenen Anwendungen noch besser motiviert. Die im Jahr 2023 erschienene neue Auflage der Aufgabensammlung „Mathematik im Bauingenieurwesen – Aufgaben und Lösungswege“ enthält weitere und zum Teil neue Aufgaben zu den hier vorgestellten Einsiegen in die Kapitel der Höheren Mathematik „Funktionen mehrerer Veränderlicher“, „Gewöhnliche Differenzialgleichungen“ sowie Finanzmathematik und Statistik mit besonderem Bezug zum Bauingenieurwesen.

Bei Herrn Frank Katzenmayer und Frau Christina Kubiak, Carl Hanser Verlag, München, bedanke ich mich für die Anregung zur Neuauflage dieses Buches sowie für die aufmerksame Durchsicht.

Kaiserslautern, im Sommer 2024

Kerstin Rjasanowa

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>11</b>
1.1	Der Begriff der Funktion mehrerer Veränderlicher . . . . .	11
1.2	Grenzwerte, Stetigkeit, partielle Ableitungen . . . . .	14
1.3	Gradient, partielles und totales Differenzial, Fehlerrechnung . . . . .	18
1.4	Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	22
1.4.1	Definition lokaler Extrema . . . . .	22
1.4.2	Notwendige Bedingungen für die Existenz lokaler Extrema . . . . .	23
1.4.3	Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema bei Funktionen zweier Veränderlicher . . . . .	24
1.4.4	Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema, Verallgemeinerung . . . . .	26
1.5	Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . . .	28
1.5.1	Integration über ebene Bereiche . . . . .	29
1.5.2	Kurvenintegrale . . . . .	40
1.5.3	Der Satz von Green . . . . .	45
1.6	Anwendungen an Beispielen . . . . .	50
1.6.1	Ermittlung des Widerstandsmomentes . . . . .	50
1.6.2	Vermessung eines Dreiecks . . . . .	51
1.6.3	Wasserrinne mit Trapez-Querschnitt . . . . .	52
1.6.4	Torsionswiderstand eines Drahtes . . . . .	54
1.6.5	Flächenmomente 2. Grades eines Kreissektors . . . . .	57
1.6.6	Kurve, Masse, Schwerpunkt, Arbeit . . . . .	58
<b>2</b>	<b>Differenzialgleichungen</b>	<b>61</b>
2.1	Einführung . . . . .	61
2.2	Definitionen . . . . .	63
2.3	Differenzialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	64
2.4	Trennung der Variablen . . . . .	65
2.5	Lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	66
2.6	Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	68
2.6.1	Sätze über die Lösungen . . . . .	69
2.6.2	Allgemeine Lösung von homogenen Differenzialgleichungen 2. Ordnung . . . . .	71
2.6.3	Homogene Differenzialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	73
2.6.4	Allgemeine Lösung inhomogener Differenzialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	74
2.7	Lineare Systeme von Differenzialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	79
2.7.1	Definitionen, Beispiele . . . . .	79
2.7.2	Lineare homogene Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	83

2.8	Anwendungen an Beispielen . . . . .	87
2.8.1	Mechanische Schwingung . . . . .	87
2.8.2	Ausströmgeschwindigkeit einer Flüssigkeit . . . . .	89
2.8.3	Gleichung einer Seilkurve . . . . .	90
2.8.4	Knickkraft nach Euler . . . . .	92
2.8.5	Biegelinie eines Balkens . . . . .	94
2.8.6	Absenkung des Grundwasserspiegels mit einem vollkommenen Brunnen . . . . .	96
2.8.7	Schwingungssystem . . . . .	98
<b>3</b>	<b>Finanzmathematik</b>	<b>101</b>
3.1	Zinsen . . . . .	101
3.1.1	Lineare Verzinsung . . . . .	101
3.1.2	Regelmäßige Zahlungen . . . . .	103
3.1.3	Geometrische Verzinsung . . . . .	105
3.1.4	Unterjährige Verzinsung . . . . .	109
3.1.5	Stetige Verzinsung . . . . .	112
3.1.6	Zusammenfassung . . . . .	114
3.2	Tilgungsrechnung . . . . .	115
3.2.1	Tilgungsprozess . . . . .	115
3.2.2	Annuitätentilgung . . . . .	116
3.2.3	Ratentilgung . . . . .	119
3.2.4	Zinsschuldtilgung . . . . .	121
3.2.5	Zusammenfassung . . . . .	121
3.3	Investitionsrechnung . . . . .	122
3.3.1	Kapitalwertmethode . . . . .	123
3.3.2	Methode des internen Zinsfußes . . . . .	124
3.4	Abschreibungen . . . . .	127
3.4.1	Abschreibungsprozess . . . . .	127
3.4.2	Lineare Abschreibung . . . . .	128
3.4.3	Geometrisch degressive Abschreibung . . . . .	128
3.4.4	Übergang degressive - lineare Abschreibung . . . . .	130
3.4.5	Arithmetisch degressive Abschreibung . . . . .	131
3.4.6	Zusammenfassung . . . . .	133
3.5	Berechnung des effektiven Zinssatzes . . . . .	134
3.6	Rentenrechnung . . . . .	136
3.6.1	Konstante Rente . . . . .	136
3.6.2	Geometrisch wachsende Rente . . . . .	141

3.6.3	Arithmetisch wachsende Rente . . . . .	145
3.6.4	Zusammenfassung . . . . .	150
3.7	Anwendungen an Beispielen . . . . .	151
3.7.1	Die Zinsen von August dem Starken . . . . .	151
3.7.2	Die Kredite des Herrn Schuldenreich . . . . .	151
3.7.3	Der Bauunternehmer B. Rauchgeld . . . . .	153
3.7.4	Abschreibung einer Hochtechnologiemaschine . . . . .	154
3.7.5	Investition in ein Mietshaus . . . . .	156
3.7.6	Rentenzahlung angesagt? . . . . .	158
3.7.7	Das Verhängnis zu leichter Klausuren . . . . .	159
3.7.8	Die kurzen Überlegungen des Bauingenieurs B. Ruchstein . . . . .	159
3.7.9	Effektivzins eines Wertpapiers . . . . .	160
<b>4</b>	<b>Statistik</b>	<b>163</b>
4.1	Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . .	163
4.1.1	Kombinatorik . . . . .	163
4.1.2	Zufällige Ereignisse . . . . .	166
4.1.3	Definition der Wahrscheinlichkeit . . . . .	168
4.1.4	Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit . . . . .	169
4.1.5	Bedingte und totale Wahrscheinlichkeit . . . . .	172
4.2	Zufallsvariablen . . . . .	175
4.2.1	Zufallsvariablen und Verteilungsfunktion . . . . .	175
4.2.2	Diskrete Verteilungen . . . . .	177
4.2.3	Stetige Verteilungen . . . . .	186
4.2.4	Grenzverteilungssätze . . . . .	200
4.3	Beschreibende Statistik . . . . .	205
4.3.1	Häufigkeitsverteilungen . . . . .	205
4.3.2	Maßzahlen einer Stichprobe . . . . .	209
4.4	Schließende Statistik . . . . .	214
4.4.1	Stichprobenfunktionen . . . . .	214
4.4.2	Statistische Schätzverfahren . . . . .	217
4.4.3	Statistische Testverfahren . . . . .	231
4.4.4	Der $\chi^2$ -Anpassungstest . . . . .	239
4.5	Anwendungen an Beispielen . . . . .	242
4.5.1	Prof. Dr.-Bet. Pech-Strahne und der Druckversuch . . . . .	242
4.5.2	Trifft die Studentin Corinna Schnupf den Studenten Baldrian Huster? . . . . .	244
4.5.3	Das Selbststudium von Anders Putscher . . . . .	245

4.5.4	Hochwasserabfluss . . . . .	246
4.5.5	Beurteilung der Dicke von Betondeckungen . . . . .	246
4.5.6	Beurteilung der Nutzungssicherheit von Bauwerken . . . . .	248
4.5.7	Bewertung von Grundstücken . . . . .	249
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>253</b>
<b>Sachwortverzeichnis</b>		<b>255</b>

# 1 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Oft sind physikalische Größen nicht nur von einer, sondern mehreren Einflussgrößen abhängig. Beispielsweise wird das Volumen eines Quaders von drei Kantenlängen bestimmt. Die Verlängerung eines Stabes infolge einer Krafteinwirkung ist nach dem Gesetz von Hooke abhängig von dieser Kraft, der Länge des Stabes, seinem Querschnitt und seinem Elastizitätsmodul. Solche Abhängigkeiten werden durch Funktionen mehrerer Veränderlicher beschrieben. Funktionen zweier Veränderlicher können graphisch veranschaulicht werden. Der Begriff des Grenzwertes und der Stetigkeit wird erklärt. Partielle Ableitungen sind Grenzwerte der Differenzenquotienten bezüglich einer der Veränderlichen. Der Gradient wird zur Charakterisierung des Wachstums einer Funktion und zur Berechnung des totalen Differenzials benutzt. Damit ist z. B. die Bestimmung maximaler absoluter und relativer Messfehler bei Vorgabe der Toleranzen der Messgrößen möglich. Eine wichtige Rolle spielt die Ermittlung von Extremwerten von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Flächen- und Volumenintegrale sind i. Allg. Integrale von Funktionen mehrerer Veränderlicher, mit denen z. B. die Berechnung von Momenten bei inhomogener Dichteverteilung erfolgt.

## Bezeichnungen

$\mathbb{R}^n$   $n$ -dimensionaler Vektorraum

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$

Vektor, Stelle

$X(x_1, x_2, \dots, x_n)$

zugehöriger Punkt

$\vec{OX} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$

zugehöriger Ortsvektor

## 1.1 Der Begriff der Funktion mehrerer Veränderlicher

Die Veränderlichen, die eine physikalische Größe beeinflussen, werden in einem Vektor zusammengefasst. Der Definitionsbereich für Funktionen mehrerer Veränderlicher ist damit eine Teilmenge des Vektorraums  $\mathbb{R}^n$  oder der  $\mathbb{R}^n$  selber. Jetzt kann der Funktionsbegriff als eindeutige Zuordnung aus dem  $\mathbb{R}^n$  in die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  erklärt werden. Die graphische Veranschaulichung ist für Funktionen zweier Veränderlicher durch eine Oberfläche im Raum möglich. Isolinienbilder dienen ebenfalls der Darstellung der Funktionswerte – ähnlich wie die Höhenlinien auf einer Landkarte.

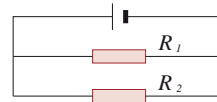


Bild 1.1 Parallele Widerstände

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Ist jeder Stelle  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in D$  durch eine Vorschrift  $f$  *eindeutig* eine Zahl  $z = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$  zugeordnet, so heißt  $f$  **Funktion von  $n$  unabhängigen Veränderlichen**  $x_1, x_2, \dots, x_n$  auf dem Definitionsbereich  $D_f = D$ . Dabei ist  $z$  die **abhängige Veränderliche**.

### Definition 1.1

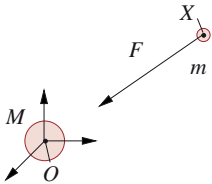
### Beispiel 1.2

1. Sind zwei Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  im Stromkreis parallel geschaltet (siehe Bild 1.1), so errechnet sich ihr Gesamt Widerstand  $R$  aus dem **Gesetz von Ohm**

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{zu} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

## Funktionen mehrerer Veränderlicher



Bild 1.2 Gravitationskraft  $F$ 

$R$  ist *abhängig* von den beiden Widerständen  $R_1$  und  $R_2$ , also eine Funktion zweier Veränderlichen  $R = R(R_1, R_2)$ .

2. Die Gravitationskraft  $F$  zwischen zwei Körpern mit den Massen  $M$  und  $m$  berechnet sich nach dem **Gravitationsgesetz von Newton** zu

$$F = -\frac{\gamma m M}{|x|^2} \frac{x}{|x|},$$

wobei  $\gamma$  die Gravitationskonstante und  $x = \overrightarrow{OX} = (x_1, x_2, x_3)^\top$  der Ortsvektor des Schwerpunktes des Körpers mit der Masse  $m$  im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem mit dem Ursprung  $O$  im Schwerpunkt des Körpers mit der Masse  $M$  ist (siehe Bild 1.2). Die Kraft  $F$  ist ein dreidimensionaler Vektor, dessen Richtung durch den Einheitsvektor  $-x/|x|$  gegeben ist und dessen Betrag  $\gamma m M/|x|^2$  ist. Komponentenweise lautet diese Gleichung

$$F_i = -\frac{\gamma m M}{|x|^3} x_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Das bedeutet, dass die Kraftkomponenten  $F_1, F_2, F_3$  jeweils abhängig von  $x_1, x_2, x_3$  sind und daher Funktionen dreier Veränderlicher darstellen:

$$F_i = F_i(x_1, x_2, x_3).$$

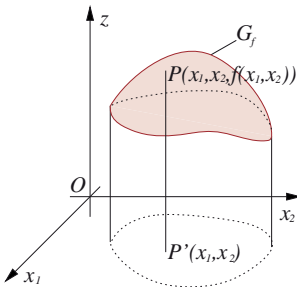
### Definition 1.3

Der **natürliche Definitionsbereich** einer Funktion  $f$  ist diejenige Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , für die die Zuordnung  $f$  erklärt ist.

### Natürlicher Definitionsbereich

### Beispiel 1.4

1. Die Funktion  $f(x_1, x_2) = -4x_1 - 2x_2 + 4$  hat den natürlichen Definitionsbereich  $D_f = \mathbb{R}^2$ , da *jeder* Stelle  $(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$  durch diese Vorschrift eine reelle Zahl zugeordnet werden kann.
2. Die Funktion  $R(R_1, R_2) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  hat als natürlichen Definitionsbereich  $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(R_1, R_2)^\top : R_1 = -R_2\}$ , da der Nenner in der Funktionsvorschrift für  $R_1 = -R_2$  null wird und somit der Bruch nicht erklärt ist. Der für das physikalische Gesetz relevante Definitionsbereich ist allerdings lediglich  $\{(R_1, R_2)^\top : R_1 > 0 \wedge R_2 > 0\}$ , da Widerstände positiv sind.
3. Die Funktionen  $F_i(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\gamma m M}{|x|^3} x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , haben als natürlichen Definitionsbereich  $D_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)^\top\}$ , da der Nenner in den Funktionsvorschriften genau dann null ist, wenn  $|x| = 0$  gilt, also  $x = (0, 0, 0)^\top$  ist. In diesem Fall fallen die Schwerpunkte der Körper mit den Massen  $M$  und  $m$  zusammen.

Bild 1.3 Graph einer Funktion  $z = f(x_1, x_2)$ 

### Graphische Darstellung

Die wesentlichen Unterschiede von Funktionen einer bzw. mehrerer Veränderlicher bestehen bereits für die Fälle  $n = 1$  und  $n = 2$ . Für Funktionen mit mehr als zwei Veränderlichen kann verallgemeinert werden. Daher werden im Folgenden vorwiegend Funktionen zweier Veränderlicher studiert.

Die gleichzeitige graphische Darstellung von Definitionsbereich und Funktionswerten ist nur für Funktionen von bis zu zwei Veränderlichen möglich, da andernfalls mehr als drei Dimensionen dafür benötigt werden. Im Folgenden werden Möglichkeiten der graphischen Darstellung von Funktionen zweier Veränderlicher erläutert.

Im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem mit den Achsen  $x_1, x_2, z$  und dem Koordinatenursprung  $O$  wird der Definitionsbereich

$D_f$  durch eine Teilmenge der  $(x_1, x_2)$ -Ebene dargestellt. Jeder Stelle  $(x_1, x_2)^\top$  des Definitionsbereiches mit dem zugehörigen Punkt  $P'$  kann mit der Funktion  $z = f(x_1, x_2)$  ein Punkt  $P$  mit dem Ortsvektor  $(x_1, x_2, z)^\top \in \mathbb{R}^3$  zugeordnet werden. Der Punkt  $P'$  ist die **Projektion** des Punktes  $P$  auf die  $(x_1, x_2)$ -Ebene. Die Menge aller zugeordneten Punkte  $P$  bildet i. Allg. eine Oberfläche im Raum  $\mathbb{R}^3$  (siehe **Bild 1.3**).

Die Menge der Punkte  $G_f = \{(x_1, x_2, z) : (x_1, x_2)^\top \in D_f, z = f(x_1, x_2)\}$  heißt **Graph** der Funktion  $f$ .

### Definition 1.5

### Graphen von Funktionen

### Beispiel 1.6

1. Der Graph der Funktion  $f(x_1, x_2) = -4x_1 - 2x_2 + 4$  (vergleiche **Beispiel 1.4**) ist eine Ebene mit der Gleichung  $z = -4x_1 - 2x_2 + 4$  (siehe **Bild 1.4**). Ihre Achsenabschnittsgleichung lautet  $x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{z}{4} = 1$ .
2. Der Graph der Funktion  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  heißt **Kreisparaboloid** (siehe **Bild 1.5**). Für  $x_2 = 0$  folgt aus der Funktionsgleichung  $f(x_1, 0) = x_1^2$ . Die Menge der zugeordneten Punkte  $P$  ist eine Normalparabel in der  $(x_1, z)$ -Ebene. Analog folgt für  $x_1 = 0$  aus der Funktionsgleichung  $f(0, x_2) = x_2^2$ . Die Menge der zugeordneten Punkte  $P$  ist eine Normalparabel in der  $(x_2, z)$ -Ebene. Für  $z = c, c \geq 0$ , folgt aus der Funktionsgleichung  $c = x_1^2 + x_2^2$ . Die Menge der zugeordneten Punkte  $P$  in der Ebene  $z = c$  parallel zur  $(x_1, x_2)$ -Ebene ist jeweils ein Kreis mit dem Mittelpunkt  $(0, 0, c)$  und dem Radius  $\sqrt{c}$ .

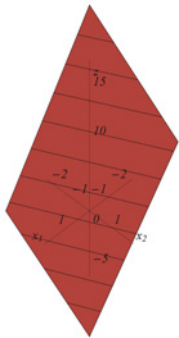


Bild 1.4  $f(x_1, x_2) = -4x_1 - 2x_2 + 4$

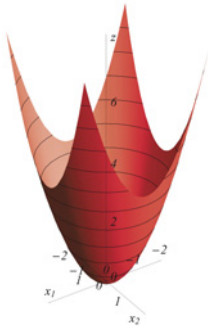


Bild 1.5  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

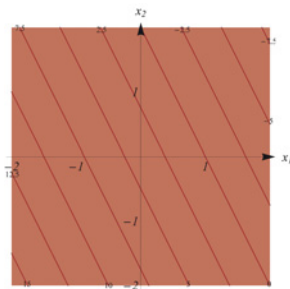


Bild 1.6 Isolinien  $c = -4x_1 - 2x_2 + 4$

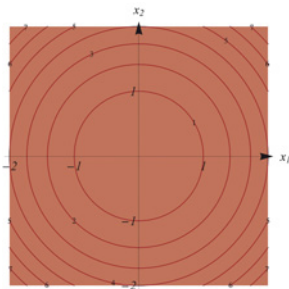


Bild 1.7 Isolinien  $c = x_1^2 + x_2^2$

**Definition 1.7**

Ist  $f(x_1, x_2)$  eine Funktion zweier Veränderlicher mit dem Definitionsbereich  $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ , so heißen die Punktmenge  
 $I_c = \{(x_1, x_2, z) : (x_1, x_2)^\top \in D_f, z = f(x_1, x_2) = c\}$   
**Isolinien** von  $f$  mit der Höhe  $c$ .

**Isolinien****Beispiel 1.8**

1. Die Funktion  $f(x_1, x_2) = -4x_1 - 2x_2 + 4$  (vergleiche **Beispiel 1.4 und 1.6**) hat als Isolinien Geraden (siehe **Bild 1.6**). Für die konstante Höhe  $z = f(x_1, x_2) = c$  folgt aus der Funktionsgleichung

$$c = -4x_1 - 2x_2 + 4.$$

Umstellen nach  $x_2$  liefert die Geradengleichung

$$x_2 = -2x_1 + 2 - \frac{c}{2}.$$

Diese Geraden sind parallel (sie haben alle dienselbe Steigung  $-2$ ) und schneiden die  $x_2$ -Achse im Punkt  $(0, 2 - c/2)$ .

2. Die Funktion  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  (vergleiche **Beispiel 1.6**) hat für die konstante Höhe  $z = f(x_1, x_2) = c$  als Isolinien Kreise mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung und dem Radius  $\sqrt{c}$  (siehe **Bild 1.7**).

## 1.2 Grenzwerte, Stetigkeit, partielle Ableitungen

Der Begriff des Grenzwertes und der Stetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher basiert – wie auch bei Funktionen einer Veränderlichen – auf der Konvergenz von Folgen von Argumenten gegen eine Stelle des Definitionsbereiches. Partielle Ableitungen sind die Grenzwerte von Differenzenquotienten bezüglich einer der Veränderlichen. Für Funktionen zweier Veränderlicher ist die geometrische Interpretation ihrer partiellen Ableitungen möglich.

### Grenzwerte

**Abstand**

In [3] wurde bereits der Begriff der Länge eines Vektors erklärt, der in diesem Abschnitt ebenfalls Anwendung findet. Der **Abstand** zweier Punkte  $X$  und  $Y$ , die den Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^n$  entsprechen, ist die Länge des Vektors  $\overrightarrow{XY}$ , also die Zahl

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

1. Eine Funktion  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die jeder natürlichen Zahl  $k$  ein Element  $a_k \in \mathbb{R}^n$  zuordnet, heißt **Folge** im  $\mathbb{R}^n$ . Sie wird mit  $\{a_k\}$  bezeichnet.
2. Die Folge  $\{a_k\} \in \mathbb{R}^n$  **konvergiert** gegen die Stelle  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , wenn gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k - \bar{x}| = 0.$$

Die Stelle  $\bar{x}$  heißt **Grenzwert** der Folge  $\{a_k\}$ , der wie folgt bezeichnet wird

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \bar{x}.$$

### Beispiel 1.10

1. Betrachtet wird die Folge mit den Gliedern  $a_k = (2^{2-k}, 2^{1-k})^\top$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (siehe **Bild 1.8**). Die ersten Folgenglieder lauten  $(2, 1)^\top$ ,  $(1, 0.5)^\top$ ,  $(0.5, 0.25)^\top$ , ... Es wird gezeigt, dass diese Folge gegen die Stelle  $\bar{x} = (0, 0)^\top$  konvergiert. Nach **Definition 1.9** wird  $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k - \bar{x}|$  berechnet. Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k - \bar{x}| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(2^{2-k} - 0)^2 + (2^{1-k} - 0)^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{2^{2(2-k)} + 2^{2(1-k)}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(2^2 \cdot 2^{-2k} + 2^2) 2^{-2k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{20} / 2^k = 0. \end{aligned}$$

2. Betrachtet wird die Folge mit den Gliedern  $a_k = (\sin(k\pi/2), 1/k^2)^\top$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (siehe **Bild 1.9**). Die ersten Folgenglieder sind  $(1, 1)^\top$ ,  $(0, 1/4)^\top$ ,  $(-1, 1/9)^\top$ ,  $(0, 1/16)^\top$ ,  $(1, 1/25)^\top$ , ...

Die Punkte, die diesen Folgengliedern entsprechen, liegen abwechselnd auf den Geraden  $x_1 = 1$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = -1$ . Es gibt keinen Punkt  $\bar{x}$  in der Ebene so, dass der Abstand der Folgenglieder zu diesem Punkt gegen null konvergiert. Welcher Punkt auch immer gewählt wird, der Abstand derjenigen (unendlich vielen) Folgenglieder zu diesem Punkt, die auf den Geraden liegen, auf denen dieser Punkt sich nicht befindet, ist stets mindestens so groß wie der Abstand dieses Punktes zu den Geraden selbst.

### Definition 1.9

### Folgen und Grenzwert

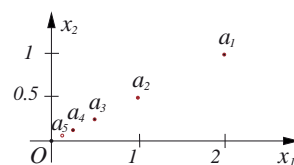


Bild 1.8 Folge  $a_k = (2^{2-k}, 2^{1-k})^\top$

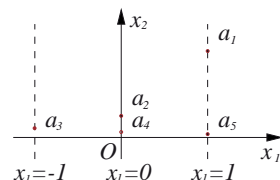


Bild 1.9 Folge  $a_k = (\sin(k\pi/2), 1/k^2)^\top$

Eine Funktion  $f$  mit dem Definitionsbereich  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$  hat für  $x \rightarrow \bar{x}$  den **Grenzwert**  $c \in \mathbb{R}$ :

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = c, \quad x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n,$$

wenn für *jede* gegen  $\bar{x}$  konvergente Folge  $\{a_k\}$  gilt

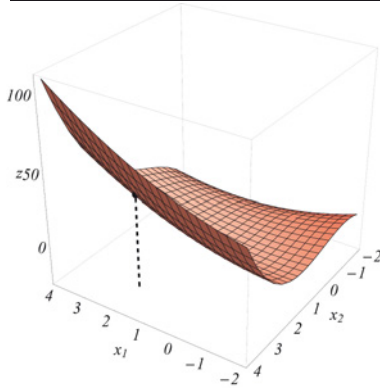
$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = c.$$

### Beispiel 1.12

Der Grenzwert der Funktion  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^3$  für  $x \rightarrow \bar{x} = (2, 3)^\top$  ist zu ermitteln (siehe **Bild 1.10**).

### Definition 1.11

### Grenzwert einer Funktion

Bild 1.10  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^3$ **Definition 1.13**

Für jede Folge  $\{a_k\} = \{(a_{k1}, a_{k2})^\top\}$ , die gegen  $\bar{x} = (2, 3)^\top$  konvergiert, gilt  
 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k1} = 2$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k2} = 3$ .

Mit den Rechenregeln für Grenzwerte konvergenter Zahlenfolgen (siehe z. B. [3]) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_{k1}, a_{k2}) &= \left( \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k1} \right)^2 + 2 \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k1} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k2} + \left( \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k2} \right)^3 \\ &= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3^3 = 43. \end{aligned}$$

**Stetigkeit**

Eine Funktion  $f$  mit dem Definitionsbereich  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **stetig** an der Stelle  $\bar{x} \in D_f$ , wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}).$$

Die Funktion heißt **stetig**, wenn  $f$  an jeder Stelle des Definitionsbereiches  $D_f$  stetig ist.

**Stetigkeit****Beispiel 1.14**

Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2)^\top \neq (0, 0)^\top, \\ 0, & (x_1, x_2)^\top = (0, 0)^\top \end{cases}$$

(siehe Bild 1.11) ist **stetig** für alle  $(x_1, x_2)^\top \neq (0, 0)^\top$ .

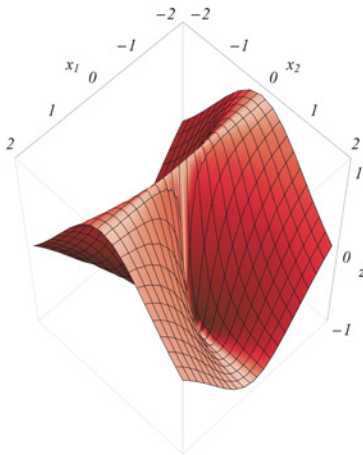
Für  $(x_1, x_2)^\top = (0, 0)^\top$  hingegen ist  $f(x_1, x_2)$  *nicht stetig*. Wird z. B. die Folge mit den Gliedern  $a_k = (1/k, 0)^\top$  gewählt, die gegen die Stelle  $(0, 0)^\top$  konvergiert, so ist der Grenzwert der Folge der zugehörigen Funktionswerte *nicht* der Funktionswert  $f(0, 0) = 0$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1/k^2 - 0}{1/k^2 + 0} = 1 \neq f(0, 0).$$

Auch für die Folge mit den Gliedern  $a_k = (2/k, 1/k)^\top$ , die gegen die Stelle  $(0, 0)^\top$  konvergiert, ist der Grenzwert der Folge der zugehörigen Funktionswerte *nicht* der Funktionswert  $f(0, 0) = 0$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4/k^2 - 1/k^2}{4/k^2 + 1/k^2} = \frac{3}{5} \neq f(0, 0).$$

Offenbar ist der Grenzwert der Folge der Funktionswerte von  $f(x_1, x_2)$  für verschiedene gegen die Stelle  $(0, 0)^\top$  konvergierende Folgen nicht derselbe. Damit hat die Funktion  $f(x_1, x_2)$  an der Stelle  $(0, 0)^\top$  *keinen* Grenzwert und ist daher dort nicht stetig.

Bild 1.11  $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2) / (x_1^2 + x_2^2)$ 

Die Rechenregeln für die Grenzwerte von Folgen bzw. Funktionen sind analog zu denen von Funktionen einer Veränderlichen. Insbesondere sind Summe, Produkt und Quotient (Nennerfunktion ungleich null) stetiger Funktionen ebenfalls wieder stetige Funktionen.

## Partielle Ableitungen

Sei  $f$  eine Funktion mit dem Definitionsbereich  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ . Existiert für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  an einer festen Stelle  $(x_1, \dots, x_n)^\top$  der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i},$$

so heißt er **partielle Ableitung** von  $f$  nach  $x_i$  an der Stelle  $(x_1, \dots, x_n)^\top$  und wird wie folgt bezeichnet:

$$f_{x_i}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n).$$

Die Funktion  $f$  ist dort **partiell differenzierbar** nach  $x_i$ .

### Definition 1.15

### Beispiel 1.16

1. Die Funktion  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^3$  ist an jeder Stelle des  $\mathbb{R}^2$  nach  $x_1$  und nach  $x_2$  partiell differenzierbar. Es ist

$$f_{x_1} = 2x_1 + 2x_2 \quad \text{und} \quad f_{x_2} = 2x_1 + 3x_2^2.$$

2. Die Funktion  $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2^2}$  mit dem Definitionsbereich

$$D_f = \{(x_1, x_2)^\top : 0 < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty\}$$

ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches nach  $x_1$  und nach  $x_2$  partiell differenzierbar. Es ist

$$f_{x_1} = x_2 x_1^{x_2^2 - 1} \quad \text{und} \quad f_{x_2} = x_1^{x_2^2} \ln x_1.$$

3. Die Funktion  $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_2 x_3} + x_3$  mit dem Definitionsbereich  $D_f = \mathbb{R}^3$  ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich partiell differenzierbar nach  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$ . Es ist

$$f_{x_1} = 0 \quad \text{und} \quad f_{x_2} = x_3 e^{x_2 x_3} \quad \text{und} \quad f_{x_3} = x_2 e^{x_2 x_3} + 1.$$

### Differenzierbarkeit und Ableitungen

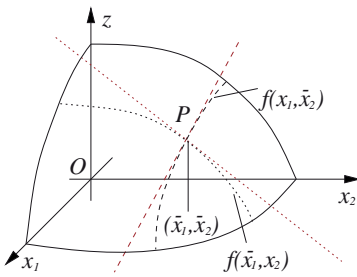
1. Der Grenzwert  $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0}$  in **Definition 1.15** der partiellen Ableitung bezieht sich nur auf die Veränderung der  $i$ -ten Veränderlichen  $x_i$  der Argumente von  $f$ . Alle anderen Argumente sind fest. Die entsprechende partielle Ableitung nach  $x_i$  ist daher gleich der gewöhnlichen Ableitung von  $f$  nach  $x_i$ , wenn alle anderen Argumente als konstant betrachtet werden.

2. Die partielle Ableitung  $f_{x_i}$  an der Stelle  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^\top$  ist gleich der Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion  $f(\bar{x}_1, \dots, x_i, \dots, \bar{x}_n)$  der einen Veränderlichen  $x_i$  an der Stelle  $\bar{x}_i$ .

Für eine Funktion zweier Veränderlicher  $x_1$  und  $x_2$  lauten die Gleichungen der beiden Tangenten (Geraden im Raum)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

### Bemerkung 1.17



**Bild 1.12** Tangenten an den Graphen von  $f$ , Stelle  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T$



**Hermann Amandus Schwarz**  
(\* 25. Januar 1843 in Hermsdorf, Schlesien, † 30. November 1921 in Berlin)

deutscher Mathematiker, Professor für Mathematik in Halle, Zürich, Göttingen, Berlin, Mitglied der preußischen Akademie der Wissenschaften (1882), der Leopoldina (1885) und der Russischen Akademie der Wissenschaften (1897)

Funktionentheorie, Theorie der Minimalflächen, Schwarz-Christoffel-Transformation, Arbeiten zur hypergeometrischen Differentialgleichung, Cauchy-Schwarz-Ungleichung, Spiegelungsprinzip von Schwarz, Alternierendes Verfahren von Schwarz zur Gebietszerlegung bei der Lösung elliptischer partieller Differentialgleichungen

hier: Satz von Schwarz

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix}.$$

Sie spannen die sogenannte **Tangentialebene** auf, die den Graphen der Funktion  $z = f(x_1, x_2)$  im Punkt  $P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, f(\bar{x}_1, \bar{x}_2))$  berührt (siehe **Bild 1.12**).

3. Existieren für eine Funktion  $f$  mit dem Definitionsbereich  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$  die partiellen Ableitungen bezüglich jedes Argumentes, so heißt  $f$  auf  $D_f$  **differenzierbar**.
4. Die Rechenregeln für das Bilden der partiellen Ableitungen nach einer bestimmten Veränderlichen sind analog zu denen für Funktionen einer Veränderlichen. Alle anderen Veränderlichen werden dabei als konstant betrachtet.
5. Partielle Ableitungen höherer Ordnung ergeben sich als partielle Ableitungen der partiellen Ableitungen (die ihrerseits Funktionen mehrerer Veränderlicher sind). So ist z. B.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = f_{x_1 x_1}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = f_{x_1 x_2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = f_{x_2 x_1}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = f_{x_2 x_2}. \end{aligned}$$

6. Nach dem **Satz von Schwarz** ist für eine auf ihrem Definitionsbereich  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$   $p$ -mal stetig differenzierbare Funktion  $f$  die Reihenfolge des Differenzierens beim Bilden einer  $q$ -ten partiellen Ableitung mit  $q \leq p$  unerheblich. Insbesondere gilt für zweimal stetig differenzierbare Funktionen  $f$

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j. \quad (1.1)$$

## 1.3 Gradient, partielles und totales Differenzial, Fehlerrechnung

Der Gradient einer differenzierbaren Funktion mehrerer Veränderlicher hat zentrale Bedeutung. Er gibt z. B. die Richtung der steilsten Steigung an. Mit seiner Hilfe kann das totale Differenzial berechnet werden, das bei der näherungsweise Berechnung von Funktionswerten und insbesondere bei der Fehlerrechnung verwendet wird.

## Gradient

Ist eine Funktion  $f$  mit dem Definitionsbereich  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$  an einer Stelle  $x \in D_f$  nach allen  $n$  Veränderlichen partiell differenzierbar, so heißt der Vektor der ersten partiellen Ableitungen von  $f$  **Gradient** von  $f$  an der Stelle  $x$ :

$$\text{grad } f(x) = (f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x))^T.$$

Der Gradient weist in Richtung der steilsten Steigung der Funktion  $f$  an der Stelle  $x$ .

### Beispiel 1.19

Die Funktion

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 10x_1 - x_2^2 + 10x_2 - 40 = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2 + 10$$

(siehe **Bild 1.13**) hat den Gradienten  $\text{grad } f(x_1, x_2) = (-2x_1 + 10, -2x_2 + 10)^T$ . An der Stelle  $x = (4, 4)^T$  ergibt sich z. B.  $\text{grad } f(4, 4) = (2, 2)^T$ , an der Stelle  $x = (3, 6)^T$  ergibt sich  $\text{grad } f(3, 6) = (4, -2)^T$ .

Der Graph der Funktion  $f$  ist ein Kreisparaboloid. Seine Isolinien sind Kreise mit dem Mittelpunkt  $M(5, 5)$ . In **Bild 1.14** sind die Isolinien zusammen mit den beiden Gradienten dargestellt.

## Partielles und totales Differenzial

Das Differenzial  $df$  der an einer festen Stelle  $x = \bar{x}$  differenzierbaren Funktion  $f$  einer Veränderlichen mit der Abweichung  $\Delta x$  ist erklärt als

$$df(\Delta x) = f'(\bar{x})\Delta x,$$

und für den Funktionswert  $f(\bar{x} + \Delta x)$  gilt näherungsweise (siehe [3])

$$f(\bar{x} + \Delta x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\Delta x = f(\bar{x}) + df(\Delta x).$$

Wird bei einer Funktion  $f(x_1, x_2)$  *zweier* Veränderlicher eine Stelle  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T$  betrachtet und wird  $\bar{x}_2$  fixiert, so resultiert die Funktion  $f(x_1, \bar{x}_2)$ , die jetzt nur noch von der *einen* Veränderlichen  $x_1$  abhängt. Für den Funktionswert  $f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2)$  gilt dann

$$f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2) \approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + f_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\Delta x_1 = f(\bar{x}) + df_{x_1}(\Delta x_1),$$

mit dem **partiellen Differenzial** nach der Veränderlichen  $x_1$

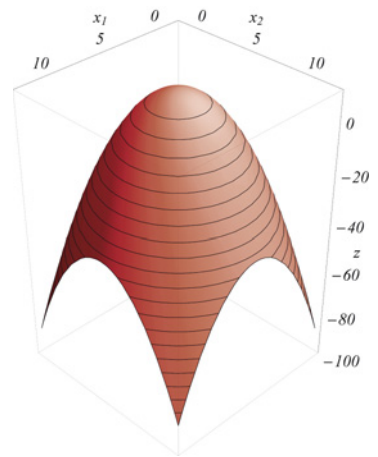
$$df_{x_1}(\Delta x_1) = f_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\Delta x_1 = f_{x_1}(\bar{x})\Delta x_1.$$

Das partielle Differenzial nach der Veränderlichen  $x_1$  gibt näherungsweise den Funktionswertzuwachs der Funktion  $f$  an, wenn von der Stelle  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T$  *nur in Richtung der  $x_1$ -Koordinate* um  $\Delta x_1$  abgewichen wird. Analog ergibt sich bei fixiertem  $\bar{x}_1$  und der Abweichung  $\Delta x_2$

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2 + \Delta x_2) \approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + f_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\Delta x_2 = f(\bar{x}) + df_{x_2}(\Delta x_2)$$

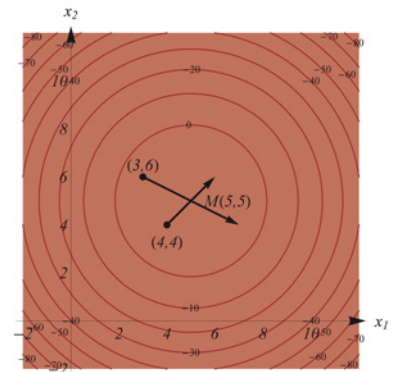
### Definition 1.18

### Gradient an einer Stelle



**Bild 1.13**

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 10x_1 - x_2^2 + 10x_2 - 40$$



**Bild 1.14** Isolinien, Gradienten



mit dem **partiellen Differenzial** nach der Veränderlichen  $x_2$

$$df_{x_2}(\Delta x_2) = f_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\Delta x_2 = f_{x_2}(\bar{x})\Delta x_2.$$

Entsprechend ist für eine Funktion  $f$  mit  $n$  Veränderlichen  $x_1, \dots, x_n$  das partielle Differenzial nach der Veränderlichen  $x_i$  an der Stelle  $\bar{x}$

### Partielles Differenzial

$$df_{x_i} = f_{x_i}(\bar{x})\Delta x_i, \quad \Delta x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

### Definition 1.20 Totales Differenzial

Sei  $f$  eine auf dem Definitionsbereich  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$  differenzierbare Funktion,  $\bar{x} \in D_f$  eine feste Stelle und  $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)^\top$  ein reeller Vektor. Die Funktion des Vektors  $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)^\top$

$$df(\Delta x) = (\text{grad} f(\bar{x}), \Delta x) = f_{x_1}(\bar{x})\Delta x_1 + \dots + f_{x_n}(\bar{x})\Delta x_n \quad (1.2)$$

heißt **totales Differenzial** der Funktion  $f$  an der Stelle  $\bar{x}$ .

### Näherung von Funktionswerten

Das totale Differenzial  $df(\Delta x)$  der Funktion  $f$  an der Stelle  $\bar{x}$  gibt näherungsweise den Zuwachs des Funktionswertes von  $f$  an, wenn von der Stelle  $\bar{x}$  in eine *beliebige* Richtung mithilfe des Vektors  $\Delta x$  abgewichen wird. An der Stelle  $x = \bar{x} + \Delta x$  gilt die Näherungsformel

$$f(x) = f(\bar{x} + \Delta x) \approx f(\bar{x}) + df(\Delta x). \quad (1.3)$$

### Beispiel 1.21

Für die Funktion

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 10x_1 - x_2^2 + 10x_2 - 40 = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2 + 10$$

aus **Beispiel 1.19** mit dem Funktionswert  $f(7, 4) = 5$  soll näherungsweise der Funktionswert an den Stelle  $(7.2, 4.3)^\top$  und  $(7.2, 4.1)^\top$  mithilfe des totalen Differenzials ermittelt werden.

$$\text{Es ist } \bar{x} = (7, 4)^\top, \quad f_{x_1} = -2x_1 + 10, \quad f_{x_2} = -2x_2 + 10.$$

An der Stelle  $(7.2, 4.3)^\top$  ergibt sich mit  $\Delta x = (0.2, 0.3)^\top$  das totale Differenzial  $df(0.2, 0.3) = f_{x_1}(7, 4) \cdot 0.2 + f_{x_2}(7, 4) \cdot 0.3 = (-4) \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.3 = -0.2$ .

Als näherungsweise Funktionswert ergibt sich nach Gleichung (1.3)

$$f(7.2, 4.3) \approx f(7, 4) - 0.2 = 5 - 0.2 = 4.8.$$

Der genaue Funktionswert ist  $f(7.2, 4.3) = 4.67$ .

An der Stelle  $(7.2, 4.1)^\top$  ergibt sich analog mit  $\Delta x = (0.2, 0.1)^\top$

$$df(0.2, 0.1) = f_{x_1}(7, 4) \cdot 0.2 + f_{x_2}(7, 4) \cdot 0.1 = (-4) \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 = -0.6.$$

Damit ist der näherungsweise Funktionswert

$$f(7.2, 4.1) \approx f(7, 4) - 0.6 = 5 - 0.6 = 4.4.$$

Der genaue Funktionswert ist  $f(7.2, 4.1) = 4.35$ .

### Fehlerrechnung

Wie bereits bei Funktionen einer Veränderlichen finden Differenzial und näherungsweise Funktionswertberechnung auch bei Funktionen mehrerer Veränderlicher Anwendung bei der Fehlerrechnung. Dabei wer-

# Sachwortverzeichnis

- Ableitung, 41–43, 61–63, 65, 67, 68, 75–78, 88, 89, 91, 92, 96, 125, 126, 135, 186, 190, 221
  - partielle, 14, 17–19, 25, 50, 51, 53, 54, 63–65, 220
- Abschreibung, 127, 130–132
  - prozentsatz, 128, 129
  - prozess, 127
  - arithmetisch degressive, 127, 131, 132
  - degressive - lineare, 130
  - digitale, 127, 132
  - geometrisch degressive, 128, 130
  - geometrische, 127
  - lineare, 127, 128, 130, 132
- Abstand, 14, 15, 22, 97, 110
  - funktion, 239, 240
- Additivität, 31
- Anfangswertaufgabe, 62, 64
- Annuität, 115, 120
- Arbeit, 43, 44, 58–60
- Ausströmgeschwindigkeit einer Flüssigkeit, 89
- Axiom von Newton, zweites, 61, 87
  
- Barwert, 102, 103, 123, 124, 134–139, 141–143, 146, 148
- Bereich, 29, 31, 34, 36
  1. Art, 32, 33, 35
  2. Art, 32, 33
  - beschränkter ebener, 29–32, 45
  - ebener, 29, 45
- Betrag, 31
- Bewertung von Grundstücken, 249
- Biegelinie, 93–96
- Bogenlänge, 42, 43
- Buchwert, 127, 128, 131, 132
  
- charakteristische Gleichung, 71–75, 91, 93, 95
  
- Definitionsbereich, 11, 12, 17, 22, 24, 27
  - natürlicher, 12
- Determinante, 27, 77
  - Wronski-, 71–73, 77
- Dicke von Betondeckungen, 246
- Differenzial, 19, 20, 41, 43, 44
  - Bogen-, 41, 42
  - partiell, 18–20
  - totales, 18, 20, 21, 51
- Differenzialgleichung, 61, 63, 64, 66, 68, 87, 89, 90, 92, 94, 95
  - explizite, 64
  - gewöhnliche, 63, 65
  - höherer Ordnung, 68
  - homogene, 66, 67, 69–71, 73–76
  - implizite, 64
  - inhomogene, 66, 67, 74–76, 78
  - lineare, 66, 69, 76, 77
  - Ordnung, 63
    - partielle, 63
- differenzierbar, 18
  - partiell, 17
- Doppelintegral, 28, 29, 31, 32, 36–39, 45
  
- Endwert, 101, 102, 104–106, 110, 123, 136, 139, 141, 143, 145–147
- Ereignis, 167, 173, 182, 184, 185, 201
  - feld, 168
  - Differenz, 167
  - disjunkte, 168, 170, 171, 174, 177, 184
  - Elementar-, 168
  - komplementäres, 167, 170, 172, 182, 185, 186
  - Produkt, 167
  - sicheres, 167–169, 177, 179
  - Summe, 167
  - Teil-, 167
  - unabhängige, 173, 174, 178, 184, 185
  - unmögliches, 167–169, 176, 177, 186
  - vollständiges System, 168
  - zufälliges, 166, 172
- Erwartungswert, 179–185, 188–190, 193, 200, 204, 215, 218, 223, 224, 226, 227, 232, 234–237
- Euler-Gleichung, 72, 74
- Extremum
  - lokales, 22
  - lokales, hinreichende Bedingung, 24, 26
  - lokales, notwendige Bedingung, 23
  
- Fehler, 193
  - absoluter, 21, 51, 52
  - relativer, 21, 50–52
  - zufälliger, 176, 227
- Fehlerrechnung, 18
- Flächeninhalt, 31, 33, 46, 47
- Flächenintegral, 36, 37
- Fluss, 44, 45
- Folge, 15, 16, 29
  - konvergente, 15, 16
- Fourier-Ansatz, 71, 72
- Fundamentalsystem, 70–73, 76, 77
- Funktion, 215
  - zweimal stetig differenzierbare, 24–26
  - differenzierbare, 18–20, 22, 23, 186
  - dreier Veränderlicher, 12
  - mehrerer Veränderlicher, 11, 14, 18, 20, 28
  - mehrerer Veränderlicher, Extremwerte, 22
  - mehrerer Veränderlicher, Integralrechnung, 28
  - stetige, 16, 31, 40
  - zweier Veränderlicher, 11, 12, 23
  
- Gebiet, 29
- Gesetz
  - Additions-, 170, 174, 177

- Gravitations- von Newton, 12
- Kontinuitäts-, 97
- von Darcy, 97
- von Hooke, 87, 94
- von Ohm, 11
- von Torricelli, 89
- Weg-Zeit-, 87
- Gradient, 18, 19
- Graph, 12, 13, 17, 19, 23, 47, 126, 186, 199, 215
- Grenzverteilungssatz, 200–202
- Grenzwert, 14–17, 29–31, 112, 138, 139
- Grenzwertsatz, 204
- Guthaben, 101
- Häufigkeit, 206, 207, 210, 212, 239, 240
- Hesse-Matrix, 26
- Histogramm, 206
- Hochwasserabfluss, 246
- Hypothese
  - von Bernoulli, 94
- imaginäre Einheit, 72, 81
- Integralsumme, 30, 31, 40
- Integration
  - ebene Bereiche, 29
- integrierbar, 31
- Investition, 122
- Isolinien, 14, 19
- Kapitalverdopplung, 107
- kaufmännische Diskontierung, 103
- Knickkraft nach Euler, 92, 93
- Kombinationen, 165
  - mit Wiederholung, 166
  - ohne Wiederholung, 165
- Kombinatorik, 163
- konkav, 24
  - streng, 25, 27
- konvex, 24, 25
  - streng, 25–27
- Koordinaten
  - transformation, 36
  - kartesische, 36–38
  - Polar-, 37–39, 57
  - verallgemeinerte Polar-, 39
- Koordinatensystem, 57
  - kartesisches, 12
- kritische Stelle, 24, 219
- Kurvenintegral, 40, 41, 45
  1. Art, 40–42, 59
  2. Art, 40, 41, 43, 44, 59
  2. Art, Wegeunabhängigkeit, 48, 49, 60
- Ladung, 34
- Laufzeit, 137, 142, 144, 146, 148
- linear
  - abhängig, 69
  - unabhängig, 69–73, 76, 77
- Linearität, 31
- Lösung, 64, 65, 67, 71, 73
  - kurve, 64–66, 68
  - allgemeine, 63, 67, 68, 70–75, 77, 78, 88, 89, 91, 95, 96
  - eindeutige, 64, 65, 77
  - komplexe, 72, 88, 93
  - partikuläre, 63, 64, 67, 68, 71–76, 78, 88, 91, 95
  - reelle, 73
  - singuläre, 63, 65, 66
- Masse, 34, 35, 42, 43, 58, 59
- Maximum
  - lokales, 22, 27, 53
  - strenges lokales, 22, 25
- Maximum-Likelihood-Methode, 218, 219, 240, 249, 250
- Methode
  - des internen Zinsfußes, 124
  - Kapitalwert-, 123
- Minimum
  - lokales, 22, 25, 27, 54
  - strenges lokales, 22
- Mittelwertsatz, 32
- Moment, 42, 43, 181, 189
  - methode, 218
  - axiales, 34
  - empirisches, 212, 218
  - empirisches zentrales, 212
  - Flächen, Kreissektor, 57
  - Flächen-, 34, 35, 46–48, 57, 58
  - polares, 34, 38, 39
  - zentrales, 181, 189
- Monotonie, 31
- nachschüssig, 101, 103–105, 136, 140, 143, 147
- Nutzungssicherheit von Bauwerken, 248
- Parameterdarstellung, 40, 41, 43, 44
- Permutationen, 163
  - mit Wiederholung, 164
  - ohne Wiederholung, 164
- Produkt, 31
- Punktmenge
  - offene, 29
  - zusammenhängende offene, 29
- Quantil, 176, 178, 187, 190, 191, 194, 195, 197, 199, 223, 224, 239
- Randbedingung, 62, 91–93, 95–97
- Randwertaufgabe, 62
- Regel
  - von Cramer, 77, 78
- Rendite, 124
- Rente, 136
  - rechnung, 136
  - arithmetisch wachsende, 145
  - arithmetisch wachsende nachschüssige, 147

- arithmetisch wachsende vorschüssige, 145
- dynamische, 136
- ewige, 136, 138, 139, 142, 144, 146
- geometrisch wachsende, 141
- geometrisch wachsende nachschüssige, 143
- geometrisch wachsende vorschüssige, 141
- konstante, 136
- konstante nachschüssige, 139
- konstante vorschüssige, 136
- Zeit-, 136
- Resonanzfall, 76
- Richtungsfeld, 65, 66, 68
- Rückzahlungsperioden, 118, 119, 121
- Sattelpunkt, 24, 25
- Satz
  - Additions-, 171, 172, 182, 184, 186
  - Multiplikations-, 173, 174, 182, 184, 219
  - von Green, 45
- Schätzung, 218
  - Konfidenz-, 222–224, 226, 227, 229, 241
  - Punkt-, 218, 221, 247, 251
- Schätzverfahren
  - statistische, 217
- Schuld
  - Anfangs-, 116, 117, 119, 121
  - Rest-, 115, 116, 118, 119
- Schwerpunkt
  - geometrischer, 34, 35, 43
  - Massen-, 34, 35, 42, 43, 58, 59
- Schwingung, mechanische, 87
- Seilkurve, 90, 92
- Standardabweichung, 181–185, 216, 236
  - empirische, 212
- Statistik, 163
  - beschreibende, 205
  - schließende, 214
- stetig, 186
  - an der Stelle, 16
  - Funktion, 16
- Stetigkeit, 14
- Stichprobe, 205, 206, 211, 213, 214, 217, 220, 221, 224, 231, 232, 234, 238, 246, 250, 251
  - funktion, 214, 222–224, 226, 228, 241
  - Maßzahlen einer, 209
- Strömung
  - stationäre, 97
- Substitution, 36
- System
  - linearer Differenzialgleichungen 1. Ordnung, 79
  - lineares homogenes, 83
  - Schwingungs-, 98
- Test
  - $\chi^2$ -Anpassungs-, 239, 249
  - einseitiger, 231
  - zweiseitiger, 231, 233, 234, 238
- Testen
  - der Varianz, 235, 236
  - des Parameters einer Null-Eins-Verteilung, 237
- Testverfahren
  - statistische, 231
- Tilgung, 115
  - prozess, 115
  - Annuitäten-, 115, 116, 118, 119
  - Raten-, 115, 119, 120
  - Zinsschuld-, 115, 121
- Torsionswiderstand, 54
- Umfang, 181
- Umgebung, 22–24
- Varianz, 179–185, 188–190, 204, 212, 215, 218, 223, 224, 226, 227, 232, 234–236
  - empirische, 211, 215, 225, 228, 247
- Variation der Konstanten, 67, 68, 76–78, 91, 95
- Variationen, 164
  - mit Wiederholung, 165
  - ohne Wiederholung, 164
- Variationskoeffizient, 189, 199, 248
  - empirischer, 212
- Vektorfeld, 40, 41, 44, 49
  - stetig differenzierbares, 46
- Vermessung, 51
- Verteilung, 176, 179, 204, 220, 239, 240, 246, 248
  - $\chi_n^2$ -, 215, 226
  - $t_n$ -, 215, 225
  - Binomial-, 181, 200, 202
  - diskrete, 177, 178
  - Exponential-, 195, 196
  - geometrische, 184, 220
  - Häufigkeits-, 205, 209, 213
  - hypergeometrische, 183, 202
  - Neville-, 198, 200, 247
  - Normal-, 192, 202, 221, 247
  - Poisson-, 185, 196, 200, 249–251
  - Rechteck-, 191, 218
  - Standard-Neville-, 198, 247
  - Standard-Normal-, 193
  - stetige, 186
  - Stichproben-, 216, 217
  - Weibull-, 196
- Verteilungsdichte, 215
- Verteilungsfunktion, 175, 176, 178, 182–185, 189, 191, 192, 195, 196, 198, 202, 205, 214, 217, 222, 224, 226, 229, 231, 234–236, 239
  - empirische, 213
  - stetige, 188, 190
- Verzinsung
  - geometrische, 105, 123, 134, 136
  - jährliche, 106
  - lineare, 101, 102
  - stetige, 112–114
  - taggenaue, 109
  - unterjährige, 109, 111, 112
  - unterjährige geometrische, 140

- unterjährige lineare, 140
- wechselnde, 107
- vollkommener Brunnen, 96
- Vollständigkeitsrelation, 179, 180, 188, 206
- Volumen, 32, 33
- vorschüssig, 101, 103–105, 136, 138, 139, 141, 145
- Wahrscheinlichkeit, 168–171, 176, 177, 182–186, 194, 196, 200, 201, 205, 216, 217, 219, 222, 223, 231, 232, 240
  - diagramm, 177, 178, 182–185
  - bedingte, 172, 173, 197
  - Eigenschaften, 169
  - Intervall-, 179, 187, 203, 239
  - Irrtums-, 222, 224, 225, 227, 231, 233–237, 239–241
  - Sicherheits-, 237
  - totale, 172, 174, 175
  - von Ereignissen, 242
- Wasserrinne, 52
- Wertpapier
  - Effektivzinssatz, 160–162
  - Kapitalwert, 160, 161
  - Kaufpreis, 160, 161
  - Kaufwert, 161
  - Kurs, 160–162
  - Nominalbetrag, 160
  - Nominalzinssatz, 160–162
- Widerstandsmoment, 50
- Zahlungen
  - regelmäßige, 103
- Zinsen, 101, 102, 104, 105, 115, 120, 121, 136
  - Haben-, 101
  - Soll-, 101
- Zinsfaktor, 138, 140, 142, 144, 146, 149
- Zinsfuß
  - interner, 124, 126
- Zinsintensität, 113
  - äquivalente, 113
- Zinsperiode, 101, 102, 105–110, 115, 123, 124, 141
- Zinssatz, 101–103, 105–107, 109, 113, 115, 123, 124, 134, 136, 137, 140, 147
  - äquivalenter unterjähriger, 111
  - effektiver, 103, 110–113, 134, 135, 160
  - Haben-, 135
  - Kalkulations-, 123
  - Soll-, 135
  - unterjähriger, 111
- Zirkulation, 44, 45
- Zufallsvariable, 175, 176, 182–185, 188, 189, 191, 192, 195, 196, 198, 200, 201, 204, 205, 209, 214, 217, 223, 224, 226, 227, 231, 239, 240, 246, 248, 249
  - diskrete, 175, 177–179, 186, 219
  - standardisierte, 189
  - stetige, 175, 186, 187, 190