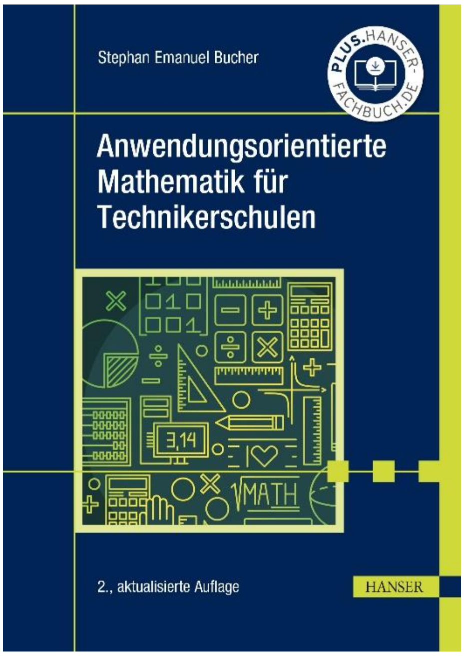

Leseprobe

zu

Anwendungsorientierte Mathematik für Technikerschulen

von Stephan Emanuel Bucher

Print-ISBN: 978-3-446-47869-5
E-Book-ISBN: 978-3-446-47875-6

Weitere Informationen und Bestellungen unter
https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch/artikel/9783446478695
sowie im Buchhandel

Vorwort

Das Buch entstand im Laufe der Unterrichtstätigkeit des Autors an der Inovatech, einer Höheren Fachschule für Technik. Technikerstudenten sind Praktiker mit einer ersten Berufserfahrung. Das Schwergewicht wird deshalb im Unterricht, wo immer möglich, auf die kürzeste Verbindung von der Theorie zur praktischen Anwendung gelegt; auf Beweise, die Diskussion exotischer Spezialfälle und theoretische Spitzfindigkeiten wird weitgehend verzichtet, manchmal vielleicht vom Standpunkt der „reinen Lehre“ aus betrachtet bis hart an die Grenze des Vertretbaren. Auch wird darauf Wert gelegt, den Studierenden jeweils eine Methode zu präsentieren, die immer anwendbar ist – wir sind der Ansicht, dass sich der Technikerstudent nicht mit verschiedenen Methoden für die gleiche Problemlösung belasten sollte.

Mathematik-Lehrbücher für Techniker gibt es im deutschen Sprachraum schon eine ganze Menge. Wir beginnen bei den Grundlagen, haben aber bewusst auch anspruchsvolle Beispiele und Anwendungen eingeschlossen, die nicht zum Standardrepertoire für Techniker gehören. Es geht uns dabei darum, den Studierenden die Breite der Anwendbarkeit der vermittelten Mathematik aufzuzeigen und sie darauf hinzuweisen, dass alles überall noch weitergeht.

Damit, und indem wir entsprechende Stichworte und Anknüpfungspunkte geben, möchten wir interessierte Leser dazu ermutigen, selbständig ihre Kenntnisse zu erweitern und zu vertiefen. Sehr viel Information kann im Internet (speziell auf Youtube) gefunden werden, und es gibt ausgezeichnete weiterführende Werke im Buchhandel (siehe Literaturverzeichnis).

Die vorliegende 2. Auflage wurde in zahlreichen Einzelheiten erweitert und angepasst. Bei Herleitungen und Berechnungen haben wir darauf geachtet, alle wichtigen Schritte und Konzepte aufzuzeigen. Wir hoffen deshalb, dass das Buch auch beim Selbststudium von Nutzen sei. Fundierte Kritik und Verbesserungsvorschläge nehmen wir gerne entgegen.

Der Mathematik-Unterricht an den Technikerschulen umfasste bisher 4 Semester, und dafür ist das Buch ausgelegt. Im neuen Rahmenlehrplan ist vorgesehen, dass die praktischen Anwendungen der Mathematik im Rahmen der einzelnen technischen Fächer (Elektrotechnik, Maschinenelemente, Antriebstechnik, usw.) unterrichtet werden, und er enthält einen nicht unwesentlichen Anteil an selbstständigem „angeleiteten“ Studium. Das Buch kann daran angepasst werden, denn die praktischen Anwendungen sind als solche ersichtlich; sie können im Unterricht übersprungen werden und der Studierende hat die Möglichkeit, sie für sich „angeleitet“ durchzuarbeiten.

Als gute Ergänzung zum Selbststudium empfehlen wir die Webseite von Barbara Flütsch (*https://www.sos-mathe.ch/*) mit zahlreichen (gelösten) Aufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit aus allen für uns relevanten Gebieten.

An Taschenrechner werden keine besonderen Anforderungen gestellt; fast alle der im Kurs zu lösenden Probleme sind mit einem TI-30 eco RS zu bewältigen, der einfach und intuitiv zu bedienen ist. Besser geeignet für Techniker ist der etwas anspruchsvollere TI-30X Pro, der quadratische und kubische Gleichungen sowie Gleichungssysteme mit zwei und drei Unbekannten löst, Integrale numerisch auswertet und, neben statistischen Berechnungen und Regressionen, sogar einen beschränkt brauchbaren numerischen Gleichungslöser enthält. Mit programmierbaren Rechnern sind viele unserer Studierenden überfordert – im Unterricht kann dazu keine Unterstützung geleistet werden – und die kompliziertere Bedienung wirkt sich als Nachteil aus.

Immer häufiger wird im Alltag für Berechnungen direkt der PC eingesetzt, was die Dokumentation und Wiederverwendung umfangreicher Berechnungsvorgänge ermöglicht. Wir bevorzugen dafür Mathcad, für tabellenorientierte Anwendungen Excel, und stellen dazu auch Beispiele zur Verfügung.

Ich danke dem Hanser Verlag und seinen Mitarbeitern, insbesondere der Lektorin Frau Natalia Silakova und Ihrer Kollegin Christina Kubiak für ihre sehr engagierte, umsichtige und professionelle Unterstützung und Beharrlichkeit während der nicht immer einfachen Vorbereitungszeit.

Zum Schluss möchte ich mich bei der Schulleitung der Inovatech dafür bedanken, dass sie Vorschlägen gegenüber stets aufgeschlossen ist und eine Atmosphäre des Vertrauens schafft, in der der Dozent bei der Vermittlung der Lehrinhalte Freiheit genießt und nicht über Gebühr administrativ belastet wird.

Rickenbach im Frühjahr 2024 *Stephan Bucher*

Inhalt

Vorwort **5**

1 Grundlagen **15**

1.1 Die Zahlen 15
1.2 Arithmetische Grundoperationen 16
1.3 Rechenregeln 16
1.3.1 Reihenfolge der Operanden 16
1.3.2 Vorzeichen 17
1.3.3 Reihenfolge der Operationen 17
1.3.4 Addition und Subtraktion von Klammerausdrücken 18
1.3.5 Multiplikation von Klammerausdrücken 18
1.4 Bruchrechnen 19
1.4.1 Begriffe 19
1.4.2 Addition von Brüchen; das kleinste gemeinsame Vielfache 19
1.4.3 Kürzen 21
1.4.4 Multiplikation von Brüchen 21
1.4.5 Division von Brüchen 22
1.4.6 Umwandlung von Dezimalbrüchen in Brüche 22
1.5 Potenzen und Wurzeln 23
1.5.1 Potenzen 23
1.5.2 Quadratische binomische Ausdrücke 24
1.5.3 Höhere Potenzen binomischer Ausdrücke 24
1.5.4 Wurzeln 26
1.6 Logarithmen 27
1.6.1 Begriff 27
1.6.2 Rechenregeln 27
1.6.3 Wechsel der Basis 27
1.6.4 Die Bedeutung der Logarithmen 28
1.7 Zahlensysteme 30
1.7.1 Unser Dezimalsystem 30
1.7.2 TI-30X Pro 31
1.7.3 Darstellung von Zahlen in Computern 32
1.8 Übungsaufgaben 34
1.8.1 Zu Abschnitt 1.3 34
1.8.2 Zu Abschnitt 1.4 35

1.8.3 Zu Abschnitt 1.5 . . . 36
1.8.4 Zu Abschnitt 1.6 . . . 38

2 Gleichungen . . . 39

2.1 Begriffe . . . 39
2.2 Das Umformen von Gleichungen . . . 40
2.2.1 Begriff . . . 40
2.2.2 Äquivalenzumformungen . . . 40
2.2.3 Nichtäquivalente Umformungen . . . 40
2.3 Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten . . . 41
2.3.1 Lösungsverfahren . . . 41
2.3.2 Angewandte Aufgaben . . . 41
2.4 Systeme linearer Gleichungen mit mehreren Unbekannten . . . 42
2.4.1 Grundlagen . . . 42
2.4.2 Lösung durch Substitution . . . 43
2.4.3 Lösung mit Matrizenrechnung . . . 43
2.4.4 Lösung eines Gleichungssystems mit der Determinantenmethode . . . 45
2.4.5 Praxisbeispiel . . . 47
2.5 Quadratische Gleichungen . . . 49
2.5.1 Allgemeine Lösungsformel . . . 49
2.5.2 Der Satz von Vieta . . . 50
2.6 Nichtlineare Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten . . . 51
2.6.1 Lösungsverfahren . . . 51
2.6.2 Anwendungsbeispiel: elastischer Stoß . . . 52
2.6.3 Anwendungsbeispiel: Koordinatenbestimmung . . . 53
2.7 Wurzelgleichungen . . . 54
2.8 Exponentialgleichungen . . . 57
2.8.1 Lösungsmethodik . . . 57
2.9 Das numerische Lösen von Gleichungen mit dem TI-30X Pro . . . 59
2.9.1 Algebraische Gleichungen höheren Grades . . . 59
2.9.2 „Unlösbare“ Gleichungen . . . 59
2.10 Zins- und Investitionsrechnung . . . 62
2.10.1 Zinsrechnung . . . 62
2.10.2 Investitionsrechnung . . . 62
2.11 Ungleichungen . . . 65
2.11.1 Definition . . . 65
2.11.2 Das Lösen von Ungleichungen . . . 66
2.11.3 Lineare Ungleichungen . . . 66
2.11.4 Nichtlineare Ungleichungen . . . 67
2.12 Übungsaufgaben . . . 70
2.12.1 Zu Abschnitt 2.2 . . . 70
2.12.2 Zu Abschnitt 2.3 . . . 70
2.12.3 Zu Abschnitt 2.4 . . . 74
2.12.4 Zu Abschnitt 2.5 . . . 77

2.12.5 Zu Abschnitt 2.6 ... 79
2.12.6 Zu Abschnitt 2.7 ... 79
2.12.7 Zu Abschnitt 2.8 ... 80
2.12.8 Zu Abschnitt 2.9 ... 80
2.12.9 Zu Abschnitt 2.10 ... 81

3 Trigonometrie ... 82

3.1 Winkel ... 82
3.2 Die Winkelfunktionen ... 83
3.2.1 Definition am rechtwinkligen Dreieck ... 83
3.2.2 Umrechnungen, Darstellung am Einheitskreis ... 84
3.2.3 TI-30X Pro ... 86
3.3 Berechnungen am Dreieck ... 87
3.3.1 Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck ... 87
3.3.2 Dreiecksfläche ... 87
3.3.3 Der Sinussatz ... 88
3.3.4 Der Kosinussatz ... 89
3.4 Weitere Formeln ... 89
3.4.1 Additionstheoreme ... 89
3.4.2 Winkelfunktionen für doppelte und halbe Winkel ... 90
3.4.3 Halbwinkelformeln aus den Dreiecksseiten ... 91
3.4.4 Kosinusfunktion aus den Dreieckseiten ... 92
3.5 Das Lösen goniometrischer Gleichungen ... 92
3.6 Anwendungen ... 99
3.6.1 Klassische Vermessungsaufgaben ... 99
3.6.2 Vermessung beim Tunnelbau ... 102
3.6.3 Schallmessortung ... 103
3.7 Anhang: Flächenberechnung bei Polygonen (Vielecken) ... 106
3.8 Übungsaufgaben ... 107
3.8.1 Zu Abschnitt 3.2 ... 107
3.8.2 Zu Abschnitt 3.3 ... 108
3.8.3 Zu Abschnitt 3.4.1 ... 109
3.8.4 Zu Abschnitt 3.5 ... 109

4 Funktionen ... 110

4.1 Der Funktionsbegriff ... 110
4.2 Lineare Funktionen ... 111
4.2.1 Ganzrationale Funktionen: Begriff und allgemeine Eigenschaften ... 111
4.2.2 Eigenschaften linearer Funktionen ... 111
4.2.3 Anwendungsbeispiel: Schnittpunkt ... 114
4.2.4 Graphische Darstellung linearer Gleichungssysteme ... 115
4.2.5 Lineare Ungleichungen in 2 Variablen ... 116
4.2.6 Systeme linearer Ungleichungen in 2 Variablen ... 117
4.2.7 Lineare Optimierung ... 118

4.3 Quadratische Funktionen . . . 121
4.3.1 Funktionsgleichung . . . 121
4.3.2 Graphische Darstellung quadratischer Funktionen . . . 121
4.3.3 Nullstellen: Darstellung mit Linearfaktoren . . . 121
4.3.4 Scheitelpunkt . . . 122
4.3.5 Zusammenfassung . . . 123
4.3.6 Geometrische Eigenschaften . . . 123
4.4 Ganzrationale Funktionen höheren Grades . . . 125
4.4.1 Allgemeine Eigenschaften . . . 125
4.4.2 Symmetrien . . . 126
4.4.3 Nullstellen . . . 126
4.5 Anwendung ganzrationaler Funktionen . . . 128
4.5.1 Bewegungen . . . 128
4.5.2 Behältervolumen . . . 129
4.5.3 Parabolspiegel, Parabolantenne . . . 130
4.5.4 Wurfparabel (schiefer Wurf ohne Luftwiderstand) . . . 131
4.5.5 Marktdiagramm . . . 132
4.6 Gebrochenrationale Funktionen . . . 135
4.6.1 Begriff und allgemeine Eigenschaften . . . 135
4.6.2 Asymptoten . . . 135
4.6.3 Beispiele aus der Physik . . . 137
4.7 Potenz- und Wurzelfunktionen . . . 139
4.7.1 Potenzfunktionen . . . 139
4.7.2 Wurzelfunktionen . . . 139
4.7.3 Beispiele . . . 140
4.8 Exponentialfunktionen . . . 143
4.8.1 Allgemeine Eigenschaften . . . 143
4.8.2 Beispiele . . . 144
4.9 Logarithmusfunktionen . . . 148
4.10 Trigonometrische Funktionen . . . 149
4.10.1 Periodizität . . . 149
4.10.2 Funktionen mit Parametern . . . 150
4.10.3 Schwingungen in der Technik . . . 151
4.11 Umkehrfunktionen . . . 153
4.11.1 Begriff . . . 153
4.11.2 Bestimmung der Umkehrfunktion . . . 153
4.11.3 Einige Funktionen und ihre Umkehrungen . . . 154
4.11.4 Temperaturskala . . . 155
4.12 Übungsaufgaben . . . 156
4.12.1 Zu Abschnitt 4.2 . . . 156
4.12.2 Zu Abschnitt 4.3 . . . 158
4.12.3 Zu Abschnitt 4.11.4 . . . 160

5 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik ... 161

5.1 Einführung ... 161
5.2 Zufall und Wahrscheinlichkeit ... 162
5.3 Einfache Kombinatorik ... 168
5.4 Binomialverteilung ... 170
5.4.1 Grundlagen ... 170
5.4.2 Anwendungsbeispiel: Qualitätskontrolle ... 172
5.4.3 Verallgemeinerung: Multinomiale Verteilung ... 175
5.5 Beschreibung einer statistischen Gesamtheit ... 175
5.5.1 Streuung ... 175
5.5.2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen ... 178
5.5.3 Mittelwert und Standardabweichung ... 180
5.5.4 Beschreibung einer Gesamtheit von Daten mit Kenngrößen ... 181
5.6 Die Normalverteilung ... 183
5.6.1 Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung ... 189
5.7 Messdatenauswertung, Datenanalyse ... 191
5.7.1 Resultatangabe und Vertrauensintervall ... 191
5.7.2 Ausgleichsrechnung ... 193
5.7.3 Ausgleichsrechnung mit Excel ... 198
5.7.4 Einfache Tabellenkalkulation mit dem TI-30X Pro ... 200
5.8 Statistische Entscheidungsfindung ... 202
5.8.1 Statistisches Testen ... 202
5.8.2 Prozessbeherrschung ... 204
5.9 Manipulation durch Statistik ... 206
5.10 Elektronische Hilfsmittel ... 207
5.11 Übungsaufgaben ... 208
5.11.1 Zu Abschnitt 5.4 ... 208
5.11.2 Zu Abschnitt 5.5 ... 209
5.11.3 Zu Abschnitt 5.6 ... 209
5.11.4 Zu Abschnitt 5.7 ... 210
5.11.5 Zu Abschnitt 5.8 ... 212

6 Komplexe Zahlen ... 214

6.1 Definition und Grundbegriffe ... 214
6.1.1 Definition ... 214
6.1.2 Die Gauß'sche Zahlenebene ... 215
6.1.3 Komplexe Konjugation ... 215
6.1.4 Betrag ... 215
6.1.5 Argument ... 215
6.2 Darstellungsformen ... 216
6.2.1 Algebraische Form ... 216
6.2.2 Trigonometrische Form ... 216
6.2.3 Umrechnungen ... 216

6.3 Die vier Grundrechenarten . . . 217
6.3.1 Addition und Subtraktion . . . 217
6.3.2 Multiplikation und Division . . . 217
6.3.3 Multiplikation und Division in trigonometrischer Darstellung 218
6.3.4 Komplexe Arithmetik mit dem TI-30X Pro . . . 218
6.4 Höhere Rechenarten . . . 219
6.4.1 Potenzen . . . 219
6.4.2 Wurzeln . . . 219
6.4.3 Exponentialfunktion . . . 221
6.5 Der Fundamentalsatz der Algebra . . . 223
6.6 Die Lösungsformel der kubischen Gleichung . . . 223
6.7 Ausblick: Komplexe Rechnung . . . 225
6.8 Anwendung: Wechselstromrechnung (Kurzer Abriss) . . . 226
6.8.1 Einführung . . . 226
6.8.2 Zerlegung einer Wechselspannung mit Nullphasenwinkel . . . 226
6.8.3 Überlagerung von Wechselspannungen . . . 227
6.8.4 Komplexe Widerstände (Impedanzen) . . . 228
6.8.5 Praxisbeispiel: RC-Filter . . . 232

7 Folgen und Reihen . . . 235

7.1 Begriffe und Definitionen . . . 235
7.1.1 Folgen . . . 235
7.1.2 Reihen . . . 238
7.2 Arithmetische Folgen und Reihen . . . 240
7.2.1 Arithmetische Folgen . . . 240
7.2.2 Arithmetische Reihen . . . 240
7.3 Geometrische Folgen und Reihen . . . 241
7.3.1 Geometrische Folgen . . . 241
7.3.2 Geometrische Reihen . . . 241
7.3.3 Unendliche geometrische Reihen . . . 242
7.4 Potenzreihen bekannter Funktionen . . . 243
7.5 Übungsaufgaben . . . 246
7.5.1 Zu Abschnitt 7.1 . . . 246
7.5.2 Zu Abschnitt 7.2 . . . 246
7.5.3 Zu Abschnitt 7.3 . . . 247

8 Differenzialrechnung . . . 248

8.1 Grundlagen . . . 248
8.1.1 Grenzwerte von Zahlenfolgen . . . 248
8.1.2 Grenzwerte von Funktionen . . . 249
8.1.3 Stetigkeit . . . 251
8.2 Die Ableitung . . . 251
8.2.1 Der Differenzialquotient . . . 251
8.2.2 Wichtige Ableitungsregeln . . . 252

8.2.3 Die Ableitung ganzrationaler Funktionen ... 254
8.2.4 Die Ableitungsfunktion ... 254
8.3 Die Bedeutung der 1. bis 3. Ableitung ... 255
8.3.1 Maxima ... 255
8.3.2 Minima ... 256
8.3.3 Krümmung ... 256
8.3.4 Wendepunkte ... 257
8.3.5 Beispiel ... 257
8.4 Weitere Ableitungsregeln ... 258
8.4.1 Produktregel ... 258
8.4.2 Quotientenregel ... 258
8.4.3 Kettenregel ... 259
8.4.4 Die Ableitung der trigonometrischen Funktionen ... 260
8.4.5 Die Ableitung von Exponentialfunktionen ... 261
8.4.6 Die Ableitung der Umkehrfunktion: zyklometrische und Logarithmusfunktionen ... 261
8.4.7 Zusammenfassung (Formelsammlung) ... 263
8.5 Funktionen mit mehreren Variablen ... 264
8.6 GeoGebra ... 265
8.7 Anwendungen ... 265
8.7.1 Kurvendiskussion ... 265
8.7.2 Extremwertprobleme ... 266
8.7.3 Numerische Lösung von Extremwertproblemen mit Excel ... 267
8.7.4 Einige Extremalprinzipien aus der Physik ... 268
8.7.5 Ausgleichsrechnung: Beispiel Lineare Regression ... 271
8.7.6 Maschinenbau: Wechselkräfte in einer Kolbenmaschine ... 271
8.7.7 Das Newton-Verfahren zur numerischen Auflösung von Gleichungen ... 275
8.7.8 Vereinfachung des Newton-Verfahrens: Regula falsi ... 279
8.7.9 Bestimmung aller Lösungen einer algebraischen Gleichung ... 280
8.7.10 Parameterbestimmung in der Physik: Gas-Zustandsgleichung 281
8.7.11 Fehlerfortpflanzung ... 283
8.7.12 Unsicherheitsabschätzung ... 284
8.8 Übungsaufgaben ... 287
8.8.1 Zu Abschnitt 8.1 ... 287
8.8.2 Zu Abschnitt 8.2 ... 287
8.8.3 Zu Abschnitt 8.3 ... 288
8.8.4 Zu Abschnitt 8.4 ... 288
8.8.5 Zu Abschnitt 8.6.2 ... 289

9 Integralrechnung ... 294

9.1 Das bestimmte Integral ... 294
9.1.1 Begriffe und Grundlagen ... 294
9.1.2 Berechnung bestimmter Integrale ... 295
9.2 Die Stammfunktion und ihre Ableitung ... 296

9.3 Das unbestimmte Integral ... 297
9.4 Integrationsregeln ... 298
9.4.1 Integrationsregeln aus Ableitungsregeln ... 298
9.4.2 Logarithmische Ableitung ... 299
9.4.3 Partielle Integration ... 299
9.4.4 Integration durch Substitution ... 300
9.5 Numerische Integration ... 300
9.5.1 Integration durch Approximation ... 300
9.5.2 Trapez-Integration ... 301
9.5.3 Romberg-Integration ... 302
9.6 GeoGebra ... 302
9.7 Anwendungen ... 304
9.7.1 Mittelwert einer Funktion in einem Intervall ... 304
9.7.2 Flächenschwerpunkt ... 306
9.7.3 Bogenlänge ... 309
9.7.4 Linienschwerpunkt ... 310
9.7.5 Flächen- und Trägheitsmomente ... 312
9.7.6 Arbeit/Energie bei ortsabhängiger Kraft ... 313
9.7.7 Das RC-Glied ... 315
9.7.8 Leistung des Wechselstroms ... 316
9.7.9 Frequenzanalyse (Fourier-Analyse, harmonische Analyse) ... 319
9.7.10 Seilreibung ... 322
9.7.11 Abkühlung ... 323
9.7.12 Barometrische Höhenformel ... 326
9.7.13 Berechnung des Integrals einer punktweise gegebenen Funktion ... 326
9.7.14 Bewegungsprobleme in der Physik ... 327

Literaturverzeichnis ... 329

Sachwortverzeichnis ... 331

1 Grundlagen

1.1 Die Zahlen

Wir unterscheiden folgende Zahlenmengen:

$\mathbb{N}$ **Natürliche Zahlen**, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Die natürlichen Zahlen sind bezüglich Addition und Multiplikation *abgeschlossen*, d. h., Addition oder Multiplikation natürlicher Zahlen liefert wieder eine natürliche Zahl.

$\mathbb{Z}$ **Ganze Zahlen:** natürliche und negative Zahlen und die Null, also

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Die ganzen Zahlen sind bezüglich Addition, Subtraktion und Multiplikation abgeschlossen.

$\mathbb{Q}$ **Rationale Zahlen:** alle Zahlen, die bei der Division von zwei ganzen Zahlen entstehen, wobei nicht durch Null dividiert werden darf:

$$\mathbb{Q} = \{a = p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

Jede rationale Zahl kann auch dargestellt werden als p/q, wobei $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$.

In Dezimalschreibweise (mit Dezimalkomma) sind rationale Zahlen *periodisch*, d. h., das gleiche Zahlenmuster wiederholt sich immer wieder. Die Länge der Periode ist höchstens $q - 1$. (Überlege, was bei der schriftlichen Division abläuft!)

Die rationalen Zahlen sind bezüglich Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (nicht durch Null) abgeschlossen.

$\mathbb{R}$ **Reelle Zahlen:** Es gibt Zahlen, deren Darstellung in Dezimalschreibweise nicht abbricht und die nicht periodisch sind. Beispiele sind die Quadratwurzeln der meisten Zahlen oder die Zahl π, das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser beim Kreis. Die reellen Zahlen umfassen neben den rationalen Zahlen auch diese *irrationalen Zahlen*.

$\mathbb{C}$ **Komplexe Zahlen:** Es gibt höhere Rechenoperationen, die aus den reellen Zahlen hinausführen, beispielsweise gibt es keine reelle Zahl, die die Quadratwurzel einer negativen reellen Zahl ist. Die komplexen Zahlen stellen eine Erweiterung der reellen Zahlen dar, die *bezüglich aller mathematischen Operationen abgeschlossen* ist. Die komplexen Zahlen vereinfachen die Lösung bestimmter Probleme, und sie werden beispielsweise in der Elektrotechnik bei der Beschreibung des Wechselstroms (siehe *6.7*) und ganz allgemein bei der Behandlung von Schwingungsvorgängen verwendet.

Es gelten folgende Mengenbeziehungen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Wir brauchen für alle unsere Berechnungen nur eine kleine Teilmenge der rationalen Zahlen, nämlich diejenigen, die mit 10 (oder was immer der Rechner schafft) dezimalen Stellen dargestellt werden können. Alle reellen Zahlen können beliebig genau durch rationale Zahlen angenähert werden, sodass diese Einschränkung für unseren Alltag keine *praktische* Bedeutung hat.

1.2 Arithmetische Grundoperationen

Als arithmetische Grundoperationen kennen wir *Addition*, *Subtraktion*, *Multiplikation* und *Division*. Die Subtraktion kann man als Addition einer negativen Zahl auffassen, die Division mit einer Zahl a als Multiplikation mit dem Kehrwert $1/a$, sodass Addition und Subtraktion bzw. Multiplikation und Division aufeinander zurückgeführt werden können.

Beispiele:

1.1 $2 - 3 = 2 + (-3) = -1$

1.2 $9 \div 3 = 9 \cdot (⅓) = 3$

Wie bereits erwähnt, sind die rationalen Zahlen bezüglich dieser Operationen abgeschlossen, das Ergebnis der Addition oder Multiplikation rationaler Zahlen ist also immer auch wieder eine rationale Zahl.

Bezeichnungen:

Addition	Summand + Summand = Summe
Subtraktion	Minuend – Subtrahend = Differenz
Multiplikation	Faktor · Faktor = Produkt
Division	Dividend ÷ Divisor = Quotient

1.3 Rechenregeln

1.3.1 Reihenfolge der Operanden

Bei Addition und Multiplikation (und wie wir in *1.2* gesehen haben, kann man eine Subtraktion als Addition einer negativen Zahl schreiben und eine Division als Multiplikation mit dem Kehrwert) darf man die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren vertauschen, ohne dass sich dadurch am Resultat etwas ändert. Das ist das *Kommutativgesetz*.

Beispiele:

1.3 $2 + 3 = 3 + 2 = 5$

1.4 $4 \cdot 7 = 7 \cdot 4 = 28$

1.3.2 Vorzeichen

Multiplikation einer beliebigen Zahl a mit einer negativen Zahl b kehrt das Vorzeichen von a um, d. h. für positives a wird das Produkt $a \cdot b$ negativ, für negatives a positiv.

Mehrfache Multiplikationen können eine nach der anderen von links nach rechts durchgeführt werden (*1.3.3*), wobei jedesmal die Vorzeichenregel anzuwenden ist.

Beachte: Der Rechner verwendet zur Eingabe negativer Zahlen ein anderes Minuszeichen als bei der Subtraktion! Dieses findet sich unten rechts im Zahlenblock.

Beispiele:

1.5 $2 \cdot (-3) = -6$

1.6 $(-4) \cdot 7 = -28$

1.7 $(-4) \cdot (-5) = +20 = 20$

1.8 $(-2) \cdot (-4) \cdot (-5) = -40$

1.9 $(-2) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot (-5) = +80 = 80$

1.3.3 Reihenfolge der Operationen

Normalerweise führt man gleichberechtigte Operationen *von links nach rechts* durch, darf aber auch anders (*Assoziativgesetz*), außerdem gilt die *Punkt-vor-Strich-Regel*:

> Operationen „mit Punkten“, also Multiplikation und Division, werden zuerst ausgeführt, nachher werden die Zwischenresultate der Multiplikationen und Divisionen addiert bzw. subtrahiert.

Wo Operationen in anderer Reihenfolge auszuführen sind, setzt man **Klammern**. Mehrfache Klammern werden **schrittweise von innen nach außen** ausgewertet.

Die meisten Taschenrechner kennen diese Regel, sehr billige und kaufmännisch orientierte Rechner sind aber manchmal programmiert, jede Operation nach der Eingabe sofort auszuführen.

Beispiele:

1.10 $4 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 28 - 6 = 22$

1.11 $4 \cdot (7 - 2) \cdot 3 = 4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$

1.12 $3 + 4 \cdot (18 - 2 \cdot (5 - 1) + 7) = 3 + 4 \cdot (18 - 2 \cdot 4 + 7) = 3 + 4 \cdot 17 = 3 + 68 = 71$

1.13 $7 - 6 \div 3 + 1 = 7 - 2 + 1 = 6$

Wir können anstelle von Zahlen auch mit Buchstaben (als Platzhalter) rechnen.

Beispiel:

1.14 $$\begin{aligned}3\cdot a - a + 5\cdot(2\cdot a + 4\cdot a - 3\cdot a) - 8\cdot a \div 4 &= 3\cdot a - a + 5\cdot 3\cdot a - 2\cdot a\\ &= 3\cdot a - a + 15\cdot a - 2\cdot a\\ &= 15\cdot a\end{aligned}$$

Das heißt, dass man links für a eine beliebige Zahl einsetzen kann und das Ergebnis immer gleich dem Fünfzehnfachen dieser Zahl ist.

1.3.4 Addition und Subtraktion von Klammerausdrücken

Regeln:

- Wird eine Klammer *als Ganzes* addiert, ist sie überflüssig und kann weggelassen werden.
- Wird eine Klammer *als Ganzes* subtrahiert, so kann sie weggelassen werden, wenn die Vorzeichen aller *Summanden* (bzw. *Subtrahenden*) im Innern der Klammer umgekehrt werden.

Mit „als Ganzes" meinen wir, dass die Klammer nicht noch mit einem Faktor multipliziert sein darf, also beispielsweise

$2 - (3 + 5) = 2 - 3 - 5 = -6$ ist richtig,

$2 - (3 + 5)\cdot 4 = 2 - 3 - 5\cdot 4$ ist falsch! Hier muss zuerst die Klammer mit 4 multipliziert werden gemäß der Punkt-vor-Strich-Hierarchie.

Beispiele:

1.15 $1 + (3 - 5\cdot 6) = 1 + 3 - 5\cdot 6 = 1 + 3 - 30 = -26$

1.16 $2 + 7\cdot 8 - (2\cdot 3 + 4 - 9) = 2 + 56 - 2\cdot 3 - 4 + 9 = 2 + 56 - 6 - 4 + 9 = 57$

1.17 $$\begin{aligned}7 - (5\cdot 6 + (-2)\cdot 4 - 17) &= 7 - 5\cdot 6 - (-2)\cdot 4 + 17\\ &= 7 - 30 \quad -(-8) \quad + 17\\ &= 7 - 30 \quad + 8 \quad + 17\\ &= 2\end{aligned}$$

1.3.5 Multiplikation von Klammerausdrücken

Beim Multiplizieren von Klammerausdrücken wird jeder Summand in jedem Klammerausdruck mit jedem Summanden aller anderen Klammerausdrücke multipliziert und diese Glieder addiert (*Distributivgesetz*). Das tönt etwas kompliziert, deshalb ein Beispiel:

Beispiel:

1.18 $$\begin{aligned}(3 + 4 - 5)\cdot(7 - 2) &= 3\cdot 7 + 3\cdot(-2) + 4\cdot 7 + 4\cdot(-2) - 5\cdot 7 - 5\cdot(-2)\\ &= 21 \quad - 6 \quad + 28 \quad - 8 \quad - 35 \quad + 10 = 10\end{aligned}$$

$3 + 4 - 5 = 2,\quad 7 - 2 = 5,\quad 2\cdot 5 = 10,$

es stimmt also!

Man kann derartige Operationen in einfachen Fällen auch geometrisch darstellen, siehe *1.5.2*.

1.4 Bruchrechnen

1.4.1 Begriffe

Die Bruchschreibweise ist eine Schreibweise für eine Division, die man noch nicht ausgeführt hat. Der Bruch besteht aus dem *Zähler,* der angibt, wie viele Teile der Bruch zählt, und dem *Nenner,* der angibt, um was für (Bruch-)Teile es sich handelt.

Nachdem die Division ausgeführt wurde, gibt man das Ergebnis als eine Zahl mit Kommastellen an und nennt das einen *Dezimalbruch*.

Beispiel:

1.19 ¼ ist ein Bruch, 0,25 der zugehörige Dezimalbruch.

Man sieht sofort, dass sich der Wert eines Bruches nicht ändert, wenn man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert; beispielsweise sind 1/4 und 5/20 gleichwertig, denn sie haben den gleichen Dezimalbruch.

Brüche mit gleichem Nenner nennt man *gleichnamig*, das Multiplizieren von Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl *erweitern*. Das Umgekehrte, die Division von Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl, heißt *kürzen* (*1.4.3*).

Beim „klassischen“ TI-30 werden Brüche wie folgt eingegeben: Zähler [**a^{b}/$_{c}$**] Nenner (Zähler höchstens 6 Stellen, Nenner höchstens 3 Stellen). Beim TI-30 wechselt [**F↔D**] zwischen Bruch- und Dezimalbruchdarstellung hin und her, beim TX-30XPro [◂▸≈].

1.4.2 Addition von Brüchen; das kleinste gemeinsame Vielfache

Am einfachsten ist es natürlich, wenn man, um zwei Brüche zu addieren, ihre Dezimalbrüche addiert: ½ + ¼ = 0,5 + 0,25 = 0,75. Auf einem Rechner mit Punkt-vor-Strich-Logik kann man einfach alles von links nach rechts eintippen, und das ist immer ein einfaches Mittel zur Kontrolle, ob man richtig gerechnet hat. Aber wir wollen es uns nicht so einfach machen, denn mit etwas Technik im Bruchrechnen kann man sehr häufig Probleme vereinfachen und übersichtlich machen und Zusammenhänge erkennen, die sonst verborgen bleiben.

Addieren kann man gleichartige Dinge, 3 Studenten + 2 Studenten = 5 Studenten. Beim Bruch gibt der Nenner an, auf was für Teile sich der Zähler bezieht. Wir können deshalb Brüche mit gleichem Nenner addieren, indem wir einfach die Zähler addieren, also etwa 1/4 + 3/4 = 4/4. Damit ist die Vorgehensweise skizziert: Wenn wir eine Methode finden, um die Nenner von zwei Brüchen gleich zu machen, können wir die Brüche addieren, indem wir die Zähler addieren.

Den Nenner dürfen wir immer als *natürliche Zahl* ansehen und ein eventuelles negatives Vorzeichen dem Zähler zuschieben.

Wie wir in *1.4.1* festgestellt haben, ändert sich der Wert eines Bruches nicht, wenn Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert werden. Wir müssen also für jeden Bruch eine solche Zahl so finden, dass alle Nenner am Schluss denselben Wert haben. Wir suchen ein *gemeinsames Vielfaches* der Nenner.

Ein gemeinsames Vielfaches ist immer das Produkt aller voneinander verschiedenen Nenner. Aber damit erhalten wir oft eine große und unhandliche Zahl!

Mit etwas Erfahrung, und wenn man in der Schule einmal die „Reihen“ gut auswendig gelernt hat, entwickelt man schnell ein gewisses „Gefühl“ für Zahlen, sodass man ein geeignetes Vielfaches erkennen kann, ohne viel zu rechnen: *Man sucht eine Zahl – je kleiner, desto besser – die durch alle Nenner teilbar ist.* Optimal ist es, das *kleinste gemeinsame Vielfache* (k. g. V.) zu finden. Wir wollen eine Methode zu seiner Bestimmung nachstehend kurz skizzieren.

Heute können viele Taschenrechner das k. g. V. bestimmen, leider immer nur von 2 Zahlen. Die Funktion heißt bei Texas Instruments **lcm**, *least common multiple*. Aber diese Rechner können auch bruchrechnen, sodass man das k. g. V. – wenigstens aus diesem Grund – gar nicht mehr zu kennen braucht …

Um das k. g. V. für mehrere Zahlen *gleichzeitig* zu bestimmen, müssen wir etwas weiter ausholen.

Primzahlen sind Zahlen, die nur durch 1 und sich selber teilbar sind, also die Zahlen, deren Folge beginnt mit 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, etc. Primzahlen sind sehr interessante und rätselhafte Objekte in der Zahlentheorie. Für uns genügt es im Moment, zu wissen, dass jede Zahl, die nicht selber Primzahl ist, in sogenannte *Primfaktoren* zerlegt werden kann, zum Beispiel $204 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17$, in Potenzschreibweise (davon mehr in *1.5.1*) lautet das $204 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17$. Um die Primfaktoren einer Zahl zu finden, dividiert man sie solange durch 2, bis es „nicht mehr geht“, fährt dann bei 3 fort, dann bei 5 und allen anderen Primzahlen (wenn man die nicht kennt, dividiert man einfach durch alle ungeraden Zahlen). Ein Faktor einer Zahl kann nicht größer sein als ihre Quadratwurzel; beim Erreichen der Quadratwurzel der letzten Zahl kann man deshalb aufhören, der ganze Rest ist dann der letzte Primfaktor.

TI-30X Pro: **math 4: ▸Pfactor**

Das k. g. V. ist ein Vielfaches jeder der Zahlen. Die Primfaktoren des k. g. V. sind also diejenigen Primfaktoren, mit denen man *jede* der Zahlen bilden kann. Jeder Faktor, der *irgendwo* vorkommt, muss darin vorkommen, und zwar mit der höchsten vorkommenden Potenz.

Beispiel:

1.20 Bestimme das k. g. V. der Zahlen 312, 676, 144

Primfaktorzerlegung:

$$312 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13$$
$$676 = 2^2 \cdot 13^2$$
$$144 = 2^4 \cdot 3^2$$
$$\text{k. g. V.} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 13^2 = 24336$$

Wenn ein geeignetes gemeinsames Vielfaches der Nenner bekannt ist, wird jeder Bruch so erweitert, dass sein Nenner dieser Zahl entspricht, und dann werden die Zähler addiert.

Häufig kann das Ergebnis gekürzt werden (siehe *1.4.3*).

1.4.3 Kürzen

Häufig kann das Ergebnis einer Rechnung mit Brüchen gekürzt werden. Dazu erstellt man die Primfaktorzerlegung von Zähler und Nenner und streicht gemeinsame Faktoren (wenn man nicht schon „von Auge“ sieht, wie gekürzt werden kann).

Hier helfen die *Teilbarkeitsregeln*:

- Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn ihr Zehnerrest es ist (wenn sie gerade ist).
- Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme (das ist die Summe ihrer Ziffern) durch 3 teilbar ist: (T = Tausender, H = Hunderter, Z = Zehner, E = Einer)

$$\begin{aligned} \text{THZE} &= 1000 \cdot \text{T} + 100 \cdot \text{H} + 10 \cdot \text{Z} + \text{E} = 999 \cdot \text{T} + 99 \cdot \text{H} + 9 \cdot \text{Z} + (\text{T} + \text{H} + \text{Z} + \text{E}) \\ &= \text{Summe von durch 3 (sogar durch 9) teilbaren Zahlen + Quersumme} \end{aligned}$$

- Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ihr Hunderterrest es ist.
- Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn ihr Einer 0 oder 5 ist.
- Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie gerade und ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
- Eine Zahl ist durch 7 teilbar, wenn die Zahl, die man erhält, wenn man das Doppelte der letzten Ziffer (Einer) vom Rest der Zahl subtrahiert, durch 7 teilbar ist: $385 \rightarrow 38 - 2 \cdot 5 = 28$.
- Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn ihr Tausenderrest es ist.
- Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Der TI–30 kürzt einen eingegebenen Bruch, wenn man [=] bzw. [enter] drückt.

Es ist oft hilfreich, wenn man zum Kürzen gemeinsame Faktoren aus Summen und Differenzen *ausklammert*:

Beispiel:

1.21 $$\frac{ax+ay}{a+n}+\frac{nx+ny}{a+n}=\frac{ax+ay+nx+ny}{a+n}=\frac{a(x+y)+n(x+y)}{a+n}=\frac{(a+n)(x+y)}{a+n}=x+y$$

1.4.4 Multiplikation von Brüchen

Wird ein Bruch mit einer ganzen Zahl multipliziert, also zum Beispiel 2 · ¼, erhalten wir 2/4, es wird also der Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert. Bilden wir die Hälfte der Hälfte, also ½ · ½, sieht man leicht, dass das ¼ ist – die Nenner haben sich multipliziert.

Überraschenderweise ist also das Multiplizieren von Brüchen einfacher als das Addieren: *Wir multiplizieren Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner.*

Häufig kann das Ergebnis gekürzt werden (siehe *1.4.3*).

1.4.5 Division von Brüchen

Beim Dividieren berechnen wir, wie viel mal der Divisor im Dividenden enthalten ist. 2 ist 3x in 6 enthalten, denn $6 \div 2 = 3$.

Wie oft ist ½ in 1 enthalten? Natürlich 2x, also $1 \div \frac{1}{2} = 2$. Wie oft ist ¼ in 1 enthalten? 4x, also $1 \div \frac{1}{4} = 4$. Und wie oft ist ¼ in ½ enthalten? Auch wieder 2x, also $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2$. Wir sehen, wie das Dividieren funktioniert: **Division ist dasselbe wie Multiplikation mit dem Kehrwert des Divisors**.

So werden sogenannte *Doppelbrüche* in einfache Brüche umgewandelt.

1.4.6 Umwandlung von Dezimalbrüchen in Brüche

Bei Division des Zählers durch den Nenner erhalten wir den Dezimalbruch einer Zahl. Dezimalbrüche können natürlich auch wieder in Brüche zurückverwandelt werden.

Am einfachsten ist das bei abbrechenden Dezimalbrüchen; aus 0,125 erhalten wir sofort 125/1000 und daraus durch Kürzen 1/8.

Wie wir eingangs *(1.1)* erwähnten, sind die Dezimalbruchdarstellungen rationaler Zahlen periodisch mit einer Periodenlänge von höchstens dem um 1 verminderten Nenner. Der Trick, mit der nicht abbrechenden Periode fertig zu werden, ist ein Trick, den man in der Mathematik auch bei anderen Problemen gern anwendet. Wir werden bei der Summation geometrischer Reihen in *7.3.2* wieder dasselbe tun: man subtrahiert das, was einen stört, von sich selber und schafft es damit weg.

Wir multiplizieren also unseren Dezimalbruch zuerst so mit einer geeigneten Zahl, dass die Periode gleich nach dem Komma beginnt. Dann multiplizieren wir diese Zahl nochmals so, dass eine ganze Periode vor das Komma zu stehen kommt, und subtrahieren davon die erste Zahl – und weg ist die Periode!

Beispiel:

1.22 Verwandle $p = 0{,}97123123123\ldots$ in einen Bruch!

$$
\begin{aligned}
100000 \cdot p &= 97123{,}123123123\ldots \\
-100 \cdot p &= -97{,}123123123\ldots \\
99900 \cdot p &= 97026
\end{aligned}
$$

Jetzt haben wir den Bruch und müssen nur noch kürzen: $p = \dfrac{97026}{99900} = \dfrac{16171}{16650}$

Beim TI-30 wechselt **F↔D** zwischen Bruch- und Dezimalbruchdarstellung, beim TI-30xPro [◂▸≈].

1.5 Potenzen und Wurzeln

1.5.1 Potenzen

Wenn derselbe Faktor a mehrmals (n-mal) mit sich selber multipliziert wird, schreiben wir dafür zur Abkürzung, wie schon in *1.4.2* erwähnt,

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n,$$

wobei a eine beliebige reelle Zahl und n eine beliebige natürliche Zahl sein können.

Bezeichnungen: a ist die **Basis**, n der **Exponent**, a^n die **Potenz**.

Für Potenzen gelten folgende **Rechenregeln**, die man sofort einsehen kann, wenn man die Potenzen als mehrfache Multiplikationen ausschreibt:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \tag{1.1}$$

$$a^n \div a^m = a^{n-m} \tag{1.2}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} \tag{1.3}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \tag{1.4}$$

Die Rechenoperationen werden also um eine Stufe vereinfacht:

- Aus einer Multiplikation wird eine Addition der Exponenten,
- aus einer Potenz wird eine Multiplikation der Exponenten.

Wenn wir eine Potenz mehrmals durch ihre Basis dividieren, erhalten wir eine Folge wie

$$a^n \xrightarrow{\div a} a^{n-1} \xrightarrow{\div a} \ldots \xrightarrow{\div a} a^2 \xrightarrow{\div a} a \xrightarrow{\div a} 1 \xrightarrow{\div a} \frac{1}{a} \xrightarrow{\div a} \frac{1}{a^2},$$

die eine sinnvolle Erweiterung des Potenzbegriffes für Exponenten < 1 nahelegt. Der Exponent nimmt dabei jedesmal um 1 ab. Man sieht, dass für beliebige Zahlen a offenbar gelten soll

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1 \text{ (es ist sogar } 0^0 = 1 \text{ – siehe Fußnote}^1\text{)}$$

und $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}.$

Wie wir gleich sehen werden, liefert die Anwendung der Rechenregeln für Potenzen auch bei Exponenten ≤ 0 sinnvolle Ergebnisse.

[1] $a^0 = 1$ gilt für beliebig kleine a. Und auch wenn man im Ausdruck x^x den Wert von x immer kleiner macht (gegen null gehen lässt), geht der Wert des Ausdruckes immer näher zu 1.

1.5.2 Quadratische binomische Ausdrücke

Ein *binomischer Ausdruck* oder einfach *Binom* ist ein Ausdruck mit zwei Gliedern, also ein Ausdruck der Form

$$a + b,$$

wo a und b als sogenannte *Monome* bezeichnet werden.

Speziell wichtig sind die Ausdrücke

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.5}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{1.6}$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 \tag{1.7}$$

Diese Identitäten soll man sich einprägen, denn sie werden immer wieder gebraucht, beispielsweise wenn ein quadratischer Ausdruck in Faktoren zerlegt wird. Quadratische Binome können auch graphisch dargestellt werden *(Bild 1.1)*.

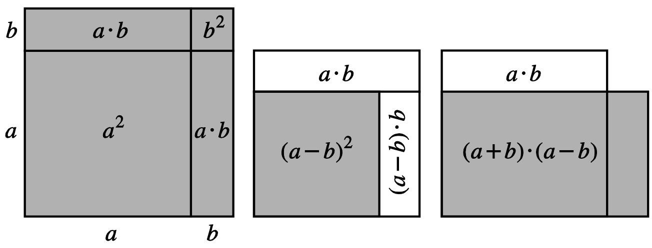

Bild 1.1 Graphische Darstellung von $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b) \cdot (a - b)$

1.5.3 Höhere Potenzen binomischer Ausdrücke

Wir wollen jetzt systematisch die Potenzen binomischer Ausdrücke untersuchen und bilden nach den Regeln von *1.3.5* die Produkte (Schreibweise: alle oberen Vorzeichen gehören jeweils zusammen sowie alle unteren):

$$(a \pm b)^1 = a \pm b$$

$$(a \pm b)^2 = (a \pm b) \cdot (a \pm b) = a^2 \pm a \cdot b \pm b \cdot a + b^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = (a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2) \cdot (a \pm b) = a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)^4 = (a^3 \pm 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 \pm b^3) \cdot (a \pm b) = a^4 \pm 4 \cdot a^3 \cdot b + 6 \cdot a^2 \cdot b^2 \pm 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4$$

Daraus lassen sich folgende Gesetzmäßigkeiten für $(a + b)^n$ ableiten:

- Die Summe der Exponenten von a und b ist bei jedem Glied gleich n, dem Exponenten des Binoms.
- Das erste Glied ist $a^n = a^n b^0$, dann nimmt der Exponent von a immer um 1 ab, während der Exponent von b um 1 zunimmt.
- Die Koeffizienten der Potenzen beginnen immer mit 1, dann kommt n, und am Ende wieder n und 1. Alle Zeilen sind symmetrisch.

Sachwortverzeichnis

A

abhängige Variable 111
Abklingen, exponentiell 144
Abkühlung 147
Ableitung 252
Ableitungsfunktion 254
Abschirmung 314
Absolutbetrag 215
Abstoßung 314
Abszisse 111, 132
Achsensymmetrie 126
Addition 16, 19, 217
Additionstheorem 90, 222
adiabatische Zustandsänderung 142
Aktionsprinzip (Newton) 272
algebraische Funktion 110
alternierende Folge 235
Altersbestimmung 146
Amortisation 62
Amortisationsdauer 63
Amplitude 151
Anfangsbedingungen 327
Anfangsglied 235
Angebotsfunktion 132
Anziehungskraft 281
Äquivalenzumformung 40
Arbeit 313
Arcustangens 245
Argument 215
Assoziativgesetz 17
Asymptote 135
Ausgleichsrechnung 196
Auslenkung 313
Ausreißer 181

B

Bakterienwachstum 145
ballistisches Problem 132
Bandpassfilter 232
barometrische Höhenformel 326
Basis 23, 27
Basisumrechnung 31
Bernoulliverteilung 171
Beschleunigung 272
Beta-Zerfall 146
Betrag 215
Bewegungsgleichung 327
Bildungsgesetz 235
Binärsystem 31
Binnendruck 281
Binom 24
Binomialkoeffizient 25, 168
Binomialverteilung 171, 186, 189
Bioverfügbarkeit 327
Blindwiderstand 229
Bode-Diagramm 233
Body-Mass-Index 200
Bogenlänge 309
Bogenmaß 82
Brechungsgesetz 270
Brechungsindex 270
Brennpunkt 123, 130
Brennweite 124, 130
Byte 31

C

chemische Reaktion 146
CORDIC-Algorithmus 245
cos() 230

Coulombkraft 314
Cramer'sche Regel 46

D

deskriptive Statistik 161
Determinante 45
Dezibelskala 30, 149
Dezimalbruch 19
Dezimalsystem 30
Dichte 326
Dielektrizitätskonstante 314
Differenzenquotient 251, 279
Differenzialgleichung 327
Differenzialquotient 252
diskrete Funktion 301, 319, 326
diskrete Variable 175, 178
Diskriminante 50
Distributivgesetz 18
divergent 249
Division 16, 22, 218
Division von Polynomen 136
Doppelbruch 22
Drehstreckung 218

E

Eichung 148
Einheitskreis 85
Einheitsmatrix 44
Einsetzungsmethode 42
Elektron 146
elektrostatische Kraft 314
Elektrotechnik 226
Endglied 235
Energie 313
Erdbeben 149
Erdbeschleunigung 326
Euler'sche Zahl 27, 143
Exponent 23
Exponentialfunktion 221, 245
exponentiell 325
Extinktionskoeffizient 147
Eytelwein-Seilreibungsformel 323

F

Fakultät 168
falsch negativ 174
falsch positiv 174
Fast Fourier Transform 319
Feder 313
Fehlerellipse 287
Fehlerfortpflanzung 284
Feldstärke 315
Fibonacci 238
Filterung, digital 320
Flächenmoment 312
Fourier-Reihe 319
Freiheitsgrad 181, 192
Frequenz 151
Frequenzspektrum 319, 322
Fundamentalsatz 126

G

ganze Zahlen 15
ganzrationale Funktion 111
Gaskonstante 281, 326
Gauß'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz 284
Gauß'sche Zahlenebene 215
Gauß-Verteilung 183
Gegenwahrscheinlichkeit 165
gemeinsames Vielfaches 20
gerade Funktion 126
Geschwindigkeit 272
gleichnamig 19
Gleichung 39, 251, 275
goldener Schnitt 238
Grad Celsius 155
Grad Fahrenheit 155
Graph 112
Gravitationsfeld 314
Gravitationskonstante 314
Gravitationskraft 314
Grenzwert 249

H

Halbwertszeit 145
harmonische Analyse 319
harmonische Bewegung 151
hexadezimal 31
Hochpassfilter 232
Homöopathie 242
Horner-Schema 280
Hörschwelle 149
Huygens'sches Prinzip 269

I

ideales Gas 281, 326
imaginäre Einheit 214
Imaginärteil 214
Impedanz 229
induktiver Widerstand 228
induktive Statistik 161
Innenwinkel 89
Integral, bestimmtes 294
Integral, unbestimmtes 297
Integrand 294
Integration durch Approximation 300
Integration, partielle 299
Integrationsgrenze 294
Integrationskonstante 297, 324
Integrationsregeln 298
Intervall 66
Intervallhalbierung 251
inverse Matrix 45

J

Jahreszins 64
Joule 195, 313

K

kapazitativer Widerstand 228
kartesisches Koordinatensystem 111
k. g. V. 20
Kirchhoff'sche Regeln 47
Klammerausdruck 18
kleinstes gemeinsames Vielfaches 20
Kohlenstoff-14 146
Kombination 168
Kommutativgesetz 16
komplexe Konjugation 215
komplexe Zahl 15, 214
Kondensator 228, 315
kontinuierliche Variable 175, 178
Kontinuitätskorrektur 189
konvergent 249
Konzentrationsbestimmung 147, 270
Korrelation 196, 206
Kosecans 83
Kosinus 83, 245
Kosinussatz 89
Kotangens 83
Kovolumen 281
Kreisbewegung 151
kritischer Punkt 282
kritischer Wert 203
kubische Gleichung 223
Kurvenform 131
Kurvenglättung 320
kürzen 19

L

Lambert-Beer-Gesetz 147
Längendehnung 304
Laufvariable 125
Lichtabsorption 147
Limes 248
lineare Funktion 111
lineare Gleichung 39
lineare Regression 195
Linearfaktor 122, 126, 223, 280
Logarithmensysteme 27
Logarithmus 27, 245
logischer Vergleich 32
Lösung 275
Luftdruck 140, 326

M

Magnitude 149
Marktdiagramm 132
Marktgleichgewicht 132
Marktmenge 132

Marktpreis 132
Matrix 44
Maximum 255
Median 181
Minimum 256
Mischungstemperatur 325
Mittel, arithmetisches 240
Mittel, geometrisches 241
Mittelwert 181, 271
Modalwert 182
Momentensatz 306 f.
Monom 24
Monte-Carlo-Methode 287
Multiplikation 16, 21, 218

N

Nachfragefunktion 134
Näherung 245, 272
Näherungswert 275
natürliche Zahlen 15
Nenner 19
neutrale Faser 312
Newton 130
Normalform 49
Normalverteilung 183, 301
Normatmosphäre 140
Nullhypothese 204
Nullstelle 113, 122, 126, 251, 275
Numerus 27
Nutzarbeit 143
Nyquist-Diagramm 233

O

Oberschwingung 319
Ohm'sches Gesetz 152, 228, 316
Ordinate 111, 132
Ortskurve 233

P

Parabel 121
Parameter 49
partielle Ableitung 264
partielle Integration 299
Pascal'sches Dreieck 25, 169
Pearson 196
Periode 149
Periodenlänge 151
periodischer Dezimalbruch 22
Permutation 168
Perzentile 182
Phase 317
Phasenverschiebung 227
Phasenwinkel 95, 227, 231
pi
– Berechnung 245
– Wert 204
Placeboeffekt 242
Poisson-Verteilung 172
Pol 135
Polarkoordinaten 216
Polygon 118
Polynom 111
polytropische Zustandsänderung 141
Potenz 219
Potenzial 248, 314
Potenzreihe 243, 300
Primfaktor 20
Primzahl 20
Punktsymmetrie 126

Q

quadratische Funktion 121
Quadratwurzel 26, 276
Qualitätskontrolle 161
Quantile 182
Quartil 182
Quersumme 21

R

radioaktiver Zerfall 145
random walk 140
rationale Zahlen 15
RC-Filter 232
RC-Glied 148, 315
Reaktionsgeschwindigkeit 146
Realteil 214
Rechenschieber 29

reelle Zahlen 15
Reflexion 268
Refraktometer 270
Regula falsi 279
rekursiv 235
resultierende Kraft 219
Richterskala 30, 149
Romberg-Integration 302
Rotationskörper 307, 310
Rückwärtseinschneiden 101
Ruhelage 313

S

Sarrus, Regel von 47
Sattelpunkt 127, 257, 282
Schalldruck 149
Schallmessung 103
Scheinwiderstand 229
Scheitelpunktdarstellung 123
Scheitelspannung 226
schiefer Wurf 131
Schubstangenverhältnis 274
Schwerpunkt 310
Schwerpunktabstand 314
Schwingung 222
Secans 83
Signifikanzniveau 203
Simplex-Algorithmus 120
Singulärwertzerlegung 42
Sinus 83, 245
Sinussatz 88
Spannung 228, 315
spiegelsymmetrisch 183
Spline-Interpolation 301
Stammfunktion 296
Standardabweichung 181
statistischer Test 204
Steigung 112, 248, 254
Stellenwert 30
Stichprobe 191
Stichprobenplan 204
Stratosphärengrenze 140
Streuung 172, 176
Strom 228
Student-Verteilung 191
Substitutionsmethode 42
Subtraktion 16, 217
Summenzeichen 125
System linearer Gleichungen 42

T

Tangens 83, 112, 254
Taylorreihe 300
Teilbarkeitsregeln 21
Temperatur 155
Testgröße 202
Tiefpassfilter 232
Tonwahl 320
totales Differenzial 264, 284
Trägheitsmoment 312
Transponieren 44
transzendente Funktion 110
Trapez-Integration 301
Triangulation 102
t
– Test 204
– Verteilung 191
Turbinenformel 291

U

überbestimmtes Gleichungssystem 42, 193, 271
Übertragungsfunktion 232
Umkreis 88
Umsatzfunktion 134
unabhängige Variable 111
uneigentlicher Grenzwert 249
ungerade Funktion 126
unterbestimmtes Gleichungssystem 42, 46

V

Varianz 181, 284
Vektor 44
Verdichtungsverhältnis 142
Vermessungskreisel 102
Versicherungswesen 161
Verteilungskurve 183

Vertrauensintervall 191
Verzinsung 64
Vorwärtseinschneiden 100

W

Wachstum, exponentiell 144
Wahrscheinlichkeit 163
Wahrscheinlichkeitsverteilung 183
Wechselkräfte 272
Wechselspannung 226
Wechselstrom 152, 226, 316
Widerstand 228, 315
Winkelfunktionen 83
Winkelgeschwindigkeit 151, 226
Wirkungsgrad 143, 195
Wirkwiderstand 229
Wurfparabel 131
Wurzel 26, 219

Z

Zahlensystem 30
Zähler 19
Zeitkonstante 316
Zentraler Grenzwertsatz der Statistik 178, 186, 287
Zielfunktion 118
Zifferwert 30
Zinssatz 62
Zufall 162
zufällige Bewegung 140
Zustandsgleichung 281, 326
Zweierkomplementdarstellung 32
zweiseitiger Test 203
zyklometrische Funktionen 154