

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Die Zahlbereiche \mathbb{N}, \mathbb{Z} und \mathbb{Q}	5
1.1 Natürliche Zahlen	5
1.2 Ganze Zahlen	9
1.3 Teilbarkeit in \mathbb{Z}	12
1.4 Brüche und rationale Zahlen	14
1.5 Division mit Rest	16
1.6 Gekürzte Brüche	19
1.7 Vollständige Induktion	21
1.8 Die vollständige Ganz-Abgeschlossenheit von \mathbb{Z}	25
2 Primzahlen	29
2.1 Primzahlen	30
2.2 Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie	34
2.3 Euklidischer Algorithmus	40
2.4 Lineare Kongruenzen und eulersche φ -Funktion	50
2.5 Lineare diophantische Gleichungen	66
2.6 Fermatsche und Mersennesche Zahlen	77
2.7 Vollkommene Zahlen	84
3 Die Zahlbereiche \mathbb{R} und \mathbb{C}	93
3.1 Reelle Zahlen	93
3.2 Komplexe Zahlen	106
3.3 Algebraische und transzendente Zahlen	112
3.4 Spezielle algebraische Zahlen	123
3.5 k -adische Brüche	126
3.6 Kettenbruchdarstellungen	134

3.6.1	Allgemeine Kettenbrüche	135
3.6.2	Reguläre Kettenbrüche	143
3.7	Irrationalitätsbeweise	165
4	Zahlentheoretische Funktionen	173
4.1	Multiplikative und additive Funktionen	174
4.1.1	Beispiele zahlentheoretischer Funktionen	175
4.1.2	Multiplikative zahlentheoretische Funktionen	177
4.1.3	Additive zahlentheoretische Funktionen	178
4.1.4	Primzahlunabhängige zahlentheoretische Funktionen	179
4.1.5	Summatorische Funktionen	180
4.2	Die Teilerfunktionen	183
4.3	Dirichlet-Faltung	191
4.4	Dirichletsche Reihen	200
4.5	Eulersche Summenformel	207
4.5.1	Landausche Ordnungssymbole	207
4.5.2	Endliche Summen	210
4.5.3	Eulersche Summenformel	214
4.6	Riemannsche Zetafunktion	217
4.7	Möbiussche μ -Funktion	223
4.8	Mittelwerte und Größenordnungen	226
5	Quadratische und höhere Kongruenzen	237
5.1	Primitive Wurzeln	238
5.2	Indexrechnung	249
5.3	Quadratische Kongruenzen	253
5.4	Darstellungen von Zahlen als Quadratsummen	273
5.5	Höhere Kongruenzen	280
A	Anhang	299
A.1	Relationen	299
A.2	Algebraische Strukturen	301
A.3	Elemente der Analysis	303
A.4	RSA-Algorithmus	304

B Lösungshinweise und Lösungen	307
B.1 Kapitel 1	307
B.2 Kapitel 2	308
B.3 Kapitel 3	310
B.4 Kapitel 4	314
B.5 Kapitel 5	316
Literaturverzeichnis	319
Liste einiger Symbole	323
Index	325