

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Die Zahlbereiche \mathbb{N}, \mathbb{Z} und \mathbb{Q}	5
1.1 Natürliche Zahlen	5
1.2 Ganze Zahlen	9
1.3 Teilbarkeit in \mathbb{Z}	12
1.4 Brüche und rationale Zahlen	14
1.5 Division mit Rest	16
1.6 Gekürzte Brüche	19
1.7 Vollständige Induktion	21
1.8 Die vollständige Ganz-Abgeschlossenheit von \mathbb{Z}	25
2 Primzahlen	29
2.1 Primzahlen	30
2.2 Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie	34
2.3 Euklidischer Algorithmus	40
2.4 Lineare Kongruenzen und eulersche φ -Funktion	50
2.5 Lineare diophantische Gleichungen	66
2.6 Fermatsche und Mersennesche Zahlen	77
2.7 Vollkommene Zahlen	84
3 Die Zahlbereiche \mathbb{R} und \mathbb{C}	93
3.1 Reelle Zahlen	93
3.2 Komplexe Zahlen	106
3.3 Algebraische und transzendenten Zahlen	112
3.4 Spezielle algebraische Zahlen	123
3.5 k -adische Brüche	126
3.6 Kettenbruchdarstellungen	134

3.6.1	Allgemeine Kettenbrüche	135
3.6.2	Reguläre Kettenbrüche	143
3.7	Irrationalitätsbeweise	165
4	Zahlentheoretische Funktionen	173
4.1	Multiplikative und additive Funktionen	174
4.1.1	Beispiele zahlentheoretischer Funktionen	175
4.1.2	Multiplikative zahlentheoretische Funktionen	177
4.1.3	Additive zahlentheoretische Funktionen	178
4.1.4	Primzahlunabhängige zahlentheoretische Funktionen .	179
4.1.5	Summatorische Funktionen	180
4.2	Die Teilerfunktionen	183
4.3	Dirichlet-Faltung	191
4.4	Dirichletsche Reihen	200
4.5	Eulersche Summenformel	207
4.5.1	Landausche Ordnungssymbole	207
4.5.2	Endliche Summen	210
4.5.3	Eulersche Summenformel	214
4.6	Riemannsche Zetafunktion	217
4.7	Möbiussche μ -Funktion	223
4.8	Mittelwerte und Größenordnungen	226
5	Quadratische und höhere Kongruenzen	237
5.1	Primitive Wurzeln	238
5.2	Indexrechnung	249
5.3	Quadratische Kongruenzen	253
5.4	Darstellungen von Zahlen als Quadratsummen	273
5.5	Höhere Kongruenzen	280
A	Anhang	299
A.1	Relationen	299
A.2	Algebraische Strukturen	301
A.3	Elemente der Analysis	303
A.4	RSA-Algorithmus	304

B Lösungshinweise und Lösungen	307
B.1 Kapitel 1	307
B.2 Kapitel 2	308
B.3 Kapitel 3	310
B.4 Kapitel 4	314
B.5 Kapitel 5	316
Literaturverzeichnis	319
Liste einiger Symbole	323
Index	325