IN DIESEM KAPITEL

Wie die Zahlen erfunden wurden

Ein paar vertraute Zahlenfolgen betrachten

Den Zahlenstrahl kennenlernen

Vier wichtige Zahlenmengen verstehen

Kapitel 1
Das Spiel mit den Zahlen

Zahlen sind auch deshalb so praktisch, weil sie *konzeptuell* sind, das heißt ganz einfach, sie sind alle bereits vorhanden in Ihrem Kopf. (Diese Tatsache wird Sie vielleicht noch nicht vom Hocker reißen – aber es war ein Versuch!)

Beispielsweise können Sie sich »Drei« mit allen möglichen Dingen vorstellen: drei Katzen, drei Bälle, drei Kanufahrer, drei Planeten. Versuchen Sie, sich das Konzept von »Drei« ohne Hilfsmittel vorzustellen – Sie werden feststellen, dass das unmöglich ist. Natürlich können Sie sich die numerische 3 vorstellen, doch die eigentliche *Dreiheit* ist – wie Liebe oder Schönheit oder Ehre – nicht direkt fassbar. Aber nachdem Sie das *Konzept* der Drei (oder Vier oder einer Million) verstanden haben, erhalten Sie damit Zugang zu einem unglaublich leistungsfähigen System, das Ihnen hilft, die gesamte Welt zu verstehen: die Mathematik.

In diesem Kapitel präsentiere ich Ihnen einen kurzen Überblick darüber, wie die Zahlen entstanden sind. Ich stelle Ihnen ein paar gebräuchliche *Zahlenfolgen* vor und zeige Ihnen, wie Sie diese mit einfachen mathematischen *Operationen* verbinden, etwa der Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division.

Anschließend erkläre ich, wie einige dieser Konzepte anhand eines einfachen und doch leistungsfähigen Werkzeugs verdeutlicht werden können – mit dem *Zahlenstrahl*. Ich demonstriere, wie die Zahlen auf dem Zahlenstrahl angeordnet sind, und zeige Ihnen, wie Sie den Zahlenstrahl als Rechengerät für die einfache Arithmetik nutzen können.

Zum Schluss beschreibe ich, wie die *natürlichen Zahlen* (1, 2, 3 …) die Erfindung ungewöhnlicherer Zahlentypen inspiriert haben, wie etwa *negative Zahlen*, *Brüche* und *irrationale Zahlen*. Außerdem zeige ich Ihnen, wie diese *Zahlenmengen* ineinander *verschachtelt* sind – das heißt, wie sich eine Zahlenmenge in eine andere einfügt, die sich wiederum in eine andere einreiht.

Die Erfindung der Zahlen

Historiker sind davon überzeugt, dass die ersten Zahlensysteme spätestens mit der Landwirtschaft und dem Handel entstanden sind. In den vorhergehenden prähistorischen Zeiten der Jäger und Sammler war es vermutlich für die Menschen ausreichend, mit kleinen Zahlen zu hantieren und größere Gruppen mit »viele« oder »wenige« abzuschätzen.

Als sich jedoch die Landwirtschaft entwickelte und der Handel zwischen großen Gruppen begann, benötigte man genauere Angaben. Die Menschen begannen, mithilfe von Steinen, Lehmbatzen und vergleichbaren Gegenständen festzuhalten, wie viele Ziegen, Schafe, Öl, Getreide oder andere Waren sie besaßen. Diese Gegenstände konnten in Vertretung für die Dinge, die sie jeweils darstellten, eins zu eins getauscht werden.

Irgendwann erkannten die Händler, dass sie Bilder zeichnen konnten, anstatt Gegenstände verwenden zu müssen. Diese Bilder entwickelten sich zu Warenetiketten und mit der Zeit zu komplexeren Systemen. Ob sie es damals schon erkannten oder nicht – ihre Versuche, einen Überblick über ihre Waren zu bewahren, hatten diese Menschen zur Erfindung von etwas völlig Neuem geführt: *Ziffern*.

Im Laufe der Zeitalter entwickelten die Babylonier, Ägypter, Griechen, Römer, Mayas, Araber und Chinesen (um nur ein paar wenige zu nennen) alle ihre eigenen Systeme, Zahlen zu schreiben.

Obwohl römische Zahlen weit verbreitet wurden, als sich das Römische Reich über ganz Europa und in Teilen von Asien und Afrika ausdehnte, stellte sich das fortschrittlichere System, das die Inder und Araber erfanden, als praktischer heraus. Unser eigenes Zahlensystem, die hindu-arabischen Zahlen (auch als *Dezimalzahlen* bezeichnet), lehnt sich sehr eng an diese frühen arabischen Zahlen an.

Zahlenfolgen

Obwohl die Zahlen ursprünglich zum Zählen von Waren erfunden worden sind, wie im vorherigen Abschnitt erwähnt, wurden sie bald für alle möglichen anderen Dinge benutzt. Zahlen waren praktisch, um Distanzen zu messen, Geld zu zählen, eine Armee zusammenzustellen, Steuern zu erheben, Pyramiden zu bauen und für vieles andere mehr.

Aber über ihre Funktion hinaus, die externe Welt zu verstehen, haben die Zahlen auch eine eigene interne Ordnung. Zahlen sind also nicht nur eine *Erfindung*, sondern gleichzeitig eine *Entdeckung*: Wir erkennen darin eine Landschaft, die scheinbar unabhängig von allem anderen existiert, mit eigener Struktur, eigenen Geheimnissen und sogar Gefahren.

Ein Weg in diese neue und häufig fremdartige Welt ist die *Zahlenfolge*: eine Anordnung von Zahlen gemäß einer bestimmten Regel. In den folgenden Abschnitten stelle ich Ihnen verschiedene Zahlenfolgen vor, die praktisch sind, um den Zahlen einen Sinn zu geben.

Ungerades gerade machen

Zu den ersten Dingen, die Sie über Zahlen erfahren haben, gehört wahrscheinlich, dass alle Zahlen entweder gerade oder ungerade sind. Beispielsweise können Sie eine gerade Anzahl Murmeln *gerade* in zwei gleiche Stapel teilen. Wenn Sie dagegen versuchen, eine ungerade Anzahl von Murmeln auf dieselbe Weise zu teilen, haben Sie immer eine Murmel übrig. Hier die ersten geraden Zahlen:

2 4 6 8 10 12 14 16 …

Sie können diese Folge gerader Zahlen beliebig fortsetzen. Sie beginnen mit der Zahl 2 und addieren dann immer wieder 2, um zur nächsten Zahl zu gelangen.

Und hier die ersten ungeraden Zahlen:

1 3 5 7 9 11 13 15 …

Die Folge ungerader Zahlen ist genauso einfach zu erstellen. Sie beginnen mit der Zahl 1 und addieren dann immer wieder 2, um zur nächsten Zahl zu gelangen.

Die Muster der geraden und ungeraden Zahlen sind die einfachsten Zahlenmuster, die es gibt, deshalb erkennen Kinder häufig den Unterschied zwischen geraden und ungeraden Zahlen schon bald, nachdem sie gelernt haben zu zählen.

Um 3, 4, 5 und so weiter weiterzählen

Nachdem Sie verstanden haben, wie man um Zahlen größer 1 weiterzählt, können Sie das beliebig fortsetzen. Hier zählen wir um 3 weiter:

3 6 9 12 15 18 21 24 …

Dieses Muster wird erzeugt, indem Sie bei 3 beginnen und dann immer wieder 3 addieren.

Und so zählen Sie um 4 weiter:

4 8 12 16 20 24 28 32 …

Und so um 5:

5 10 15 20 25 30 35 40 …

Um jeweils um eine bestimmte Zahl weiterzuzählen, ist es sinnvoll, die Multiplikationstabelle für diese Zahl zu lernen, insbesondere für die Zahlen, bei denen Sie noch unsicher sind. (Im Allgemeinen haben die meisten Leute Probleme mit der Multiplikation mit 7, aber auch 8 und 9 machen bisweilen Schwierigkeiten.) In *Kapitel 3* zeige ich Ihnen ein paar Tricks, wie Sie sich die Multiplikationstabelle ein für alle Mal merken.

Diese Folgentypen sind außerdem praktisch, um Faktoren und Vielfache zu verstehen, worum es in *Kapitel 8* geht.

Quadratzahlen verstehen

Wenn Sie sich mit Mathematik beschäftigen, wünschen Sie sich früher oder später visuelle Hilfen, die verdeutlichen, was die Zahlen bedeuten. (Weiter hinten in diesem Buch zeige ich Ihnen, wie ein Bild mehr als tausend Zahlen sagt, nämlich wenn es in *Kapitel 16* um Geometrie und in *Kapitel 17* um Graphen geht.)

Die praktischsten visuellen Hilfen, die man sich vorstellen kann, sind die kleinen quadratischen Käsecracker in Abbildung 1.1. (Wahrscheinlich haben Sie irgendwo eine Schachtel davon stehen. Andernfalls können Sie auch Salzcracker oder ein anderes quadratisches Nahrungsmittel verwenden.) Schütteln Sie ein paar aus der Packung und ordnen Sie die kleinen Quadrate so an, dass sie größere Quadrate bilden. Die Abbildung zeigt die ersten paar dieser Quadrate.

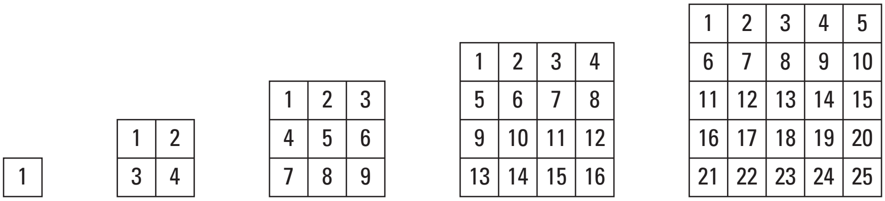


Abbildung 1.1: Quadratzahlen
Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

Voilà! Die Quadratzahlen:

1 4 9 16 25 36 49 64 …

Sie erhalten eine *Quadratzahl*, indem Sie eine Zahl mit sich selbst multiplizieren. Die Kenntnis der Quadratzahlen ist damit eine weitere praktische Methode, sich einen Teil der Multiplikationstabelle zu merken. Obwohl Sie sich sehr wahrscheinlich ohne jede Hilfe $2 \cdot 2 = 4$ merken können, sind Sie sich bei den höheren Zahlen vielleicht schon nicht mehr ganz so sicher, wie beispielsweise $7 \cdot 7 = 49$. Wenn Sie die Quadratzahlen kennen, prägen sich die betreffenden Multiplikationstabellen sehr viel besser ein, wie ich in *Kapitel 3* zeige.

Quadratzahlen sind außerdem ein wichtiger erster Schritt zum Verständnis der Exponenten, die ich weiter hinten in diesem Kapitel noch erwähne und detailliert in *Kapitel 4* erkläre.

Zusammengesetzte Zahlen – ganz einfach

Einige Zahlen können in rechteckigen Mustern angeordnet werden. Die Mathematiker könnten diese Zahlen auch als »Rechteckzahlen« bezeichnen, aber stattdessen sprechen sie von *zusammengesetzten Zahlen*. Beispielsweise ist 12 eine zusammengesetzte Zahl, weil Sie zwölf Gegenstände sogar in zwei unterschiedlichen Formen von Rechtecken anordnen können, wie in Abbildung 1.2 gezeigt.

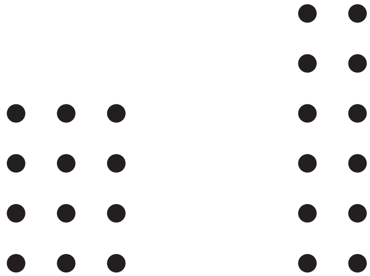


Abbildung 1.2: Die Zahl 12 in zwei unterschiedlichen rechteckigen Mustern
Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

Wie bei den Quadratzahlen teilt Ihnen die Anordnung von Zahlen in visuellen Mustern wie diesen etwas über die Multiplikation mit. In diesem Fall können Sie durch Zählen der Seiten beider Rechtecke Folgendes feststellen:

$$3 \cdot 4 = 12$$
$$2 \cdot 6 = 12$$

Auf vergleichbare Weise können auch andere Zahlen wie etwa 8 und 15 in Rechtecken angeordnet werden, wie in Abbildung 1.3 gezeigt.

Abbildung 1.3: Auch andere zusammengesetzte Zahlen können Rechtecke bilden, hier am Beispiel von 8 und 15 gezeigt.
Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

Wie Sie sehen, können beide Zahlen relativ einfach in Rechtecken mit mindestens zwei Zeilen und zwei Spalten angeordnet werden. Und diese visuellen Muster teilen uns Folgendes mit:

$$2 \cdot 4 = 8$$
$$3 \cdot 5 = 15$$

Das Wort *zusammengesetzt* bedeutet, dass diese Zahlen aus kleineren Zahlen zusammengesetzt sind. Beispielsweise ist die Zahl 15 aus 3 und 5 zusammengesetzt – das heißt, wenn Sie diese beiden kleineren Zahlen multiplizieren, erhalten Sie 15. Nachfolgend alle zusammengesetzten Zahlen zwischen 1 und 16:

4 6 8 9 10 12 14 15 16 …

Beachten Sie, dass alle Quadratzahlen (siehe den vorherigen Abschnitt »Quadratzahlen verstehen«) natürlich ebenfalls zusammengesetzte Zahlen sind, weil Sie sie in Rechtecken mit gleich vielen Zeilen und Spalten anordnen können. Darüber hinaus sind auch viele der anderen, nicht quadratischen Zahlen zusammengesetzte Zahlen.

Die Primzahlen verweigern sich dem Rechteck!

Einige Zahlen sind stur. Sie weigern sich beharrlich, in einem Rechteck angeordnet zu werden – und werden als *Primzahlen* bezeichnet. Betrachten Sie beispielsweise, wie in Abbildung 1.4 die Zahl 13 dargestellt ist.

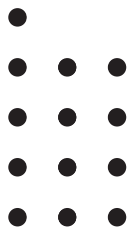


Abbildung 1.4: Die eigenwillige 13, eine Primzahl, verdeutlicht, dass manche Zahlen einfach nicht in einem Rechteck angeordnet werden können.

Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

Sie können es versuchen, so oft Sie wollen – aus 13 Gegenständen lässt sich einfach kein Rechteck legen (Vielleicht hat die 13 deshalb einen unguten Ruf!). Hier die Primzahlen kleiner 20:

2 3 5 7 11 13 17 19

Wie Sie sehen, füllt die Liste der Primzahlen die Lücken in der Auflistung der zusammengesetzten Zahlen (siehe vorherigen Abschnitt). Aus diesem Grund ist jede natürliche Zahl entweder eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl. In *Kapitel 8* finden Sie mehr Informationen über zusammengesetzte Zahlen. Außerdem zeige ich Ihnen dort, wie Sie eine Zahl zerlegen – das heißt, wie Sie eine zusammengesetzte Zahl in ihre *Primfaktoren* zerlegen.

Mit Exponenten schnell multiplizieren

Es gibt ein altes Rätsel, das eine immer noch überraschende Antwort hat. Angenommen, Sie haben einen Job angenommen, bei dem Sie am ersten Tag 1 Cent, am zweiten Tag 2 Cent, am dritten Tag 4 Cent und so weiter als Lohn erhalten, sodass also der Betrag täglich verdoppelt wird:

1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 …

Wie Sie sehen, verdienen Sie in den ersten zehn Arbeitstagen nur sehr wenig, gerade einmal 10 Euro (eigentlich 10,23 Euro, aber wer wird so kleinlich sein?). Wie viel verdienen Sie in 30 Tagen? Sie würden möglicherweise sagen: »Nie würde ich einen derart unterbezahlten Job annehmen!« Auf den ersten Blick ist das genau die richtige Antwort, aber sehen Sie sich erst einmal an, was Sie nach den zweiten zehn Tagen verdienen:

… 1.024 2.048 4.096 8.192 16.384 32.768 65.536 131.072 262.144 …

Nach den zweiten zehn Tagen betragen Ihre Gesamteinkünfte über 10.000 Euro. Und am Ende der dritten Woche liegen Ihre Einkünfte bei etwa 10.000.000 Euro! Wie kann das sein? Durch die Magie der Exponenten (Ausdrücke mit Exponenten heißen auch *Potenzen*). Jede neue Zahl in der Folge entsteht, indem die vorhergehende Zahl mit 2 multipliziert wird:

$2^1 = 2 = 2$

$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Wie Sie sehen, bedeutet die Notation 2^4, dass *die Zahl 2 viermal mit sich selbst multipliziert wird*.

Sie können Exponenten auch für andere Zahlen als 2 verwenden. Hier eine weitere Folge, die Sie vielleicht schon kennen:

1 10 100 1.000 10.000 100.000 1.000.000 …

In dieser Folge ist jede Zahl um das Zehnfache größer als die vorhergehende Zahl. Auch diese Zahlen werden mithilfe von Exponenten erzeugt:

$10^1 = 10 = 10$

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$

Diese Folge ist wichtig für die Definition des *Stellenwerts*, der Grundlage des dezimalen Zahlensystems. Darum geht es in *Kapitel 2*. Außerdem taucht sie im *Kapitel 11* über die Dezimalzahlen auf, ebenso wie bei der Vorstellung der wissenschaftlichen Notation in *Kapitel 14*. Weitere Informationen über Exponenten finden Sie in *Kapitel 5*.

Der Zahlenstrahl

Wenn Kinder zu alt werden, um mithilfe ihrer Finger zu zählen (und sie diese nur noch verwenden, wenn sie versuchen, sich an die Namen der sieben Zwerge zu erinnern), verwenden die Lehrer häufig eine Darstellung der ersten zehn Zahlen in einer Reihe, wie sie in Abbildung 1.5 gezeigt ist.

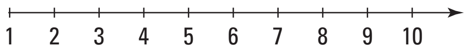


Abbildung 1.5: Ein einfacher Zahlenstrahl
Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

Diese Methode, Zahlen anzuordnen, wird auch als *Zahlenstrahl* bezeichnet. Viele sehen den Zahlenstrahl – oft aus buntem Glanzpapier – häufig zum ersten Mal über der Tafel in ihrem Klassenzimmer aufgehängt. Der Zahlenstrahl bietet eine visuelle Darstellung der *natürlichen Zahlen*, mit denen wir zählen, also der Zahlen größer als 0. Sie können ihn verwenden, um zu zeigen, wie die Zahlen in die eine Richtung größer und in die andere Richtung kleiner werden.

In diesem Abschnitt zeige ich Ihnen, wie Sie anhand des Zahlenstrahls einige grundlegende, also sehr wichtige Zahlenkonzepte verstehen können.

Auf dem Zahlenstrahl addieren und subtrahieren

Mithilfe des Zahlenstrahls können Sie auf einfache Weise Additionen und Subtraktionen durchführen. Diese ersten Schritte zur Mathematik werden konkreter, wenn Sie eine visuelle Hilfestellung erhalten. Hier das Wichtigste, das Sie sich merken müssen:

- ✔ Nach *rechts* hin werden die Zahlen *größer*, was der *Addition* entspricht (+).
- ✔ Nach *links* hin werden die Zahlen *kleiner*, was der *Subtraktion* entspricht (–).

2 + 3 beispielsweise bedeutet, dass Sie *bei 2 beginnen und dann 3 Stellen nach rechts weiterrücken*, zur 5, wie in Abbildung 1.6 dargestellt.

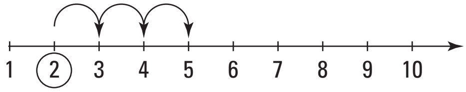


Abbildung 1.6: Bewegung auf dem Zahlenstrahl von links nach rechts: Addition
Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

Betrachten wir ein weiteres Beispiel. 6 – 4 bedeutet, dass Sie bei 6 beginnen und dann um vier Stellen nach links zur 2 gehen. Das bedeutet: 6 – 4 = 2, wie in Abbildung 1.7 gezeigt.

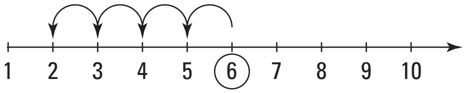


Abbildung 1.7: Bewegung auf dem Zahlenstrahl von rechts nach links: Subtraktion

Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

Diese einfachen Vor-und-Zurück-Regeln können Sie wiederholt anwenden, um eine längere Aneinanderreihung von Additionen und Subtraktionen zu bewältigen. Beispielsweise bedeutet $3 + 1 - 2 + 4 - 3 - 2$ auf dem Zahlenstrahl, bei 3 zu beginnen und dann 1 nach rechts, 2 nach links, 4 nach rechts, 3 nach links und 2 nach links zu gehen. In diesem Fall ergibt der Zahlenstrahl $3 + 1 - 2 + 4 - 3 - 2 = 1$.

Weitere Informationen über Addition und Subtraktion finden Sie in *Kapitel 3*.

Das Nichts verstehen lernen: 0

Eine wichtige Ergänzung des Zahlenstrahls ist die Zahl 0, die für *nichts* steht. *Nothing, niente, nada*. Treten Sie einen Schritt zurück und beobachten Sie das bizarre Konzept des Nichts. Erstens existiert das *Nichts* per Definition nicht – das haben uns mehrere Philosophen klargemacht. Dennoch stellen wir es so üblicher- wie sinnvollerweise mit der Ziffer 0 dar, wie in Abbildung 1.8 gezeigt.

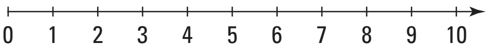


Abbildung 1.8: Der Zahlenstrahl, beginnend bei 0 und weiter mit 1, 2, 3 bis 10

Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

Eigentlich haben die Mathematiker eine genauere Bezeichnung für das *Nichts* als die Null: die *leere Menge*, eine mathematische Variante einer leeren Schachtel. Ich vermittle Ihnen in *Kapitel 20* weitere grundlegende Informationen zur Mengenlehre.

Das *Nichts* ist natürlich für Kinder schwer zu begreifen, aber sie scheinen damit umgehen zu können. Sie verstehen schnell, dass wenn man drei Spielzeugautos hat und jemand alle drei wegnimmt, null Spielzeugautos übrig bleiben. Das bedeutet $3 - 3 = 0$. Auf dem Zahlenstrahl gehen wir für $3 - 3$ von 3 aus und dann um 3 nach links, wie in Abbildung 1.9 gezeigt.

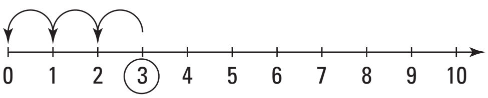


Abbildung 1.9: Von 3 aus um 3 nach links

Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

In *Kapitel 2* beschreibe ich die Bedeutung von 0 als *Platzhalter* in Zahlen und erkläre, wie einer Zahl *führende Nullen* hinzugefügt werden können, ohne ihren Wert zu verändern.

Die unendliche Geschichte

Der Pfeil an dem Ende des Zahlenstrahls zeigt an einen Ort, der auch als *unendlich* bezeichnet wird, wobei es sich aber letztlich nicht um einen Ort handelt, sondern eher um das Konzept der *Ewigkeit*, weil die Zahlen eben unendlich weiterlaufen. Aber was ist mit einer Million, Milliarde, Trillion, Quadrillion – gehen die Zahlen noch höher? Die Antwort lautet Ja, weil man zu jeder beliebigen Zahl, die man angeben kann, immer noch 1 hinzuaddieren kann.

»Unendlich« wird durch das Symbol der liegenden Acht, ∞, dargestellt. Denken Sie jedoch daran, dass ∞ keine echte Zahl ist, sondern für die Vorstellung steht, dass Zahlen unendlich groß (oder klein) werden können.

Weil ∞ keine Zahl ist, können Sie technisch gesehen nicht 1 hinzuaddieren, genauso wenig, wie Sie 1 zur Kaffeekanne Ihrer Tante Resi addieren können. Aber selbst wenn es möglich wäre, wäre $\infty + 1$ immer noch ∞.

Und nun in die andere Richtung: Negative Zahlen

Wenn Sie die Subtraktion lernen, hören Sie häufig, dass man nicht mehr subtrahieren kann, als man hat. Wenn Sie beispielsweise vier Buntstifte haben, können Sie einen, zwei, drei oder sogar alle vier wegnehmen, aber Sie können nicht noch mehr Buntstifte wegnehmen.

Aber sehr bald werden Sie verstehen, was jeder Kreditkarteninhaber nur zu gut kennt: Man kann sehr wohl mehr wegnehmen, als man hat – das Ergebnis ist eine *negative Zahl*. Wenn Sie beispielsweise 4 Euro haben und Ihrem Freund 7 Euro schulden, dann sind Sie mit 3 Euro in den Miesen. Das bedeutet $4 - 7 = -3$. Das Minuszeichen vor der 3 heißt, dass die Anzahl der Euro, die Ihnen zur Verfügung stehen, weniger als 0 ist. Abbildung 1.10 zeigt, wie negative ganze Zahlen auf dem Zahlenstrahl dargestellt werden.

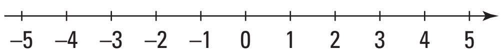


Abbildung 1.10: Negative ganze Zahlen auf dem Zahlenstrahl

Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

Das Addieren und Subtrahieren auf dem Zahlenstrahl verhält sich für negative Zahlen genau wie für positive Zahlen. Abbildung 1.11 zeigt, wie beispielsweise 4 – 7 auf dem Zahlenstrahl subtrahiert wird.

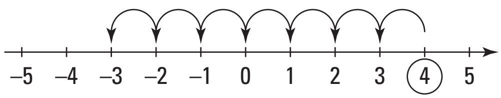


Abbildung 1.11: 4 – 7 auf dem Zahlenstrahl subtrahieren

Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

Weitere Informationen über den Umgang mit negativen Zahlen finden Sie in *Kapitel 4*.

Wenn Sie die 0 und die negativen Zahlen auf dem Zahlenstrahl mit unterbringen, wird die Menge der natürlichen Zahlen auf die Menge der *ganzen Zahlen* erweitert. Ich beschreibe die ganzen Zahlen weiter hinten in diesem Kapitel noch genauer.

Die Möglichkeiten vervielfachen sich – Multiplikation

Angenommen, Sie beginnen bei 0 und kreisen jede zweite andere Zahl auf dem Zahlenstrahl ein, wie in Abbildung 1.12 gezeigt. Wie Sie sehen, sind jetzt alle geraden Zahlen umkreist. Mit anderen Worten, Sie haben alle *Vielfachen von 2* umkreist. (Weitere Informationen über Vielfache finden Sie in *Kapitel 8*.) Nun können Sie den Zahlenstrahl nutzen, um eine beliebige Zahl mit 2 zu multiplizieren. Nehmen wir beispielsweise an, dass Sie $5 \cdot 2$ berechnen wollen. Sie beginnen bei 0 und springen um fünf eingekreiste Stellen nach rechts.

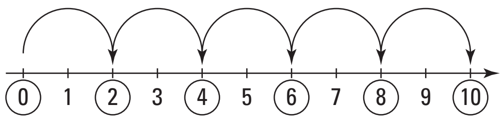


Abbildung 1.12: 5 · 2 mithilfe des Zahlenstrahls berechnen

Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

Dieser Zahlenstrahl zeigt Ihnen, dass $5 \cdot 2 = 10$ ist.

Auf vergleichbare Weise können Sie für die Multiplikation von $-3 \cdot 2$ bei 0 beginnen und drei eingekreiste Stellen nach links springen (das heißt in die negative Richtung). Abbildung 1.13 zeigt, dass $-3 \cdot 2 = -6$ ist. Darüber hinaus können Sie daran erkennen, warum die Multiplikation einer negativen Zahl mit einer positiven Zahl immer ein negatives Ergebnis erzeugt. (Weitere Informationen über die Multiplikation negativer Zahlen finden Sie in *Kapitel 4*.)

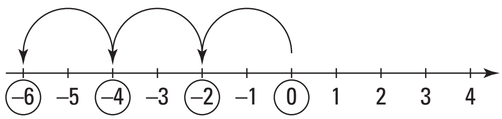


Abbildung 1.13: –3 · 2 = –6 auf dem Zahlenstrahl

Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

Die Multiplikation auf dem Zahlenstrahl funktioniert immer, egal, mit welcher Zahl Sie multiplizieren. In Abbildung 1.14 springen Sie beispielsweise um jeweils fünf weiter.

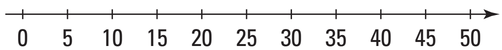


Abbildung 1.14: Ein Zahlenstrahl mit Fünfersprüngen

Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

Hier sind nur noch die Zahlen angegeben, bei denen es sich um *Vielfache von 5* handelt, sodass ich diesen Zahlenstrahl nutzen kann, um eine beliebige Zahl mit 5 zu multiplizieren. Abbildung 1.15 zeigt, wie beispielsweise $2 \cdot 5$ berechnet wird.

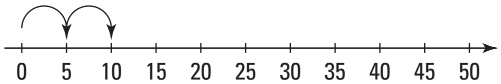


Abbildung 1.15: 2 · 5 auf dem Zahlenstrahl
Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

$2 \cdot 5 = 10$. Dasselbe Ergebnis erhalten Sie übrigens für die Multiplikation $5 \cdot 2$. Dieses Ergebnis ist ein Beispiel für die *Kommutativität der Multiplikation* – Sie können die Reihenfolge innerhalb einer Multiplikationsaufgabe vertauschen und erhalten nach wie vor dasselbe Ergebnis. (Um die Eigenschaft der Kommutativität geht es in *Kapitel 4* noch genauer.)

Auseinanderdividiert

Sie können den Zahlenstrahl auch für die Division verwenden. Angenommen, Sie wollen 6 durch eine andere Zahl dividieren. Zuerst zeichnen Sie einen Zahlenstrahl und tragen die Zahlen von 0 bis 6 ein, wie in Abbildung 1.16 gezeigt.

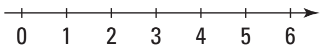


Abbildung 1.16: Zahlenstrahl von 0 bis 6
Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

Um jetzt die Lösung für 6 : 2 zu bestimmen, unterteilen Sie diesen Zahlenstrahl einfach in zwei gleich große Teile, wie in Abbildung 1.17 gezeigt. Diese Unterteilung (oder *Division*) erfolgt am Punkt 3, das heißt $6 : 2 = 3$.

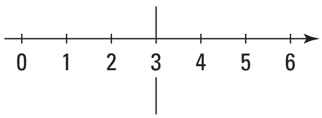


Abbildung 1.17: Die Lösung für 6 : 2 erhalten Sie durch Unterteilen des Zahlenstrahls.
Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

Um auf ähnliche Weise 6 : 3 zu berechnen, unterteilen Sie denselben Zahlenstrahl in drei gleiche Teile, wie in Abbildung 1.18 gezeigt. Nun haben Sie zwei Unterteilungen, deshalb verwenden Sie diejenige, die am nächsten bei 0 liegt. Dieser Zahlenstrahl zeigt Ihnen, dass $6 : 3 = 2$ ist.

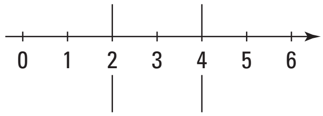


Abbildung 1.18: Berechnung von 6 : 3 mithilfe des Zahlenstrahls

Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

Angenommen, Sie wollen den Zahlenstrahl benutzen, um eine kleine Zahl durch eine größere Zahl zu dividieren, beispielsweise 3 : 4. Nach der Methode, die ich Ihnen gezeigt habe, zeichnen Sie zuerst einen Zahlenstrahl von 0 bis 3. Anschließend unterteilen Sie ihn in vier gleiche Teile. Unglücklicherweise finden diese Unterteilungen nicht an Stellen statt, die mit ganzen Zahlen markiert sind. Das ist nicht etwa ein Fehler, sondern Mathematik! Man muss dem Zahlenstrahl einfach ein paar neue Zahlen hinzufügen, wie in Abbildung 1.19 gezeigt.

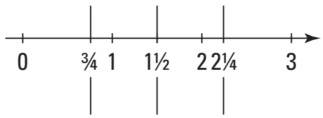


Abbildung 1.19: Brüche auf dem Zahlenstrahl

Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

Willkommen in der Welt der *Brüche*! Wenn der Zahlenstrahl korrekt beschriftet ist, erkennen Sie, dass die am nächsten bei 0 liegende Unterteilung gleich $^3\!/_4$ ist. Anhand dieser Abbildung erkennen Sie also, dass $3 : 4 = {}^3\!/_4$ ist.

Die Ähnlichkeit der Ausdrücke 3 : 4 und $^3\!/_4$ kommt nicht von ungefähr. Division und Brüche sind eng miteinander verwandt. Wenn Sie dividieren, unterteilen Sie Dinge in gleiche Teile, und das Ergebnis dieses Prozesses sind oft Brüche. (Ich erkläre den Zusammenhang zwischen Division und Brüchen in den *Kapiteln 9 und 10* genauer.)

Die Zwischenstellen: Brüche

Brüche helfen Ihnen, viele der Stellen auf dem Zahlenstrahl zu füllen, die zwischen den ganzen Zahlen liegen. Abbildung 1.20 zeigt eine Nahaufnahme eines Zahlenstrahls von 0 bis 1.

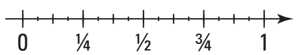


Abbildung 1.20: Zahlenstrahl mit einigen Brüchen zwischen 0 und 1

Quelle: © John Wiley & Sons, Inc

Dieser Zahlenstrahl erinnert Sie vielleicht an ein Lineal oder an ein Maßband, mit vielen winzigen eingetragenen Brüchen. Und tatsächlich sind Lineale und Maßbänder tragbare Zahlenstrahle, die es Schreinern, Ingenieurinnen und Heimwerkern ermöglichen, die Länge von Gegenständen ganz genau zu messen.

Das Hinzufügen von Brüchen zu dem Zahlenstrahl erweitert die Menge der ganzen Zahlen zur Menge der *rationalen Zahlen*. Ich gehe in *Kapitel 25* genauer auf das Konzept der rationalen Zahlen ein.

Egal, wie klein etwas in der realen Welt wird, man findet immer einen winzigen Bruchteil, um sich an dieses Etwas so genau wie möglich anzunähern. Zwischen zwei Brüchen auf dem Zahlenstrahl gibt es immer mindestens einen weiteren Bruch (genauer gesagt sogar unendlich viele!). Mathematiker sprechen von der *Bruchdichte* auf dem reellen Zahlenstrahl. Diese Art Dichte ist ein Thema in einem sehr fortgeschrittenen Bereich der Mathematik, der sogenannten *reellen Analysis*.

Vier wichtige Zahlenmengen

Im vorherigen Abschnitt haben Sie gesehen, wie der Zahlenstrahl in die positive Richtung wächst und mit vielen Zahlen gefüllt werden kann. In diesem Abschnitt finden Sie einen schnellen Überblick, wie sich diese Zahlen als Menge verschachtelter Systeme ineinander einfügen.

Wenn ich von einer *Zahlenmenge* spreche, dann meine ich eigentlich eine Gruppe von Zahlen. Sie können den Zahlenstrahl verwenden, um mit vier wichtigen Zahlenmengen zu arbeiten:

- ✔ **Natürliche Zahlen:** die Menge der Zahlen, die mit 1, 2, 3, 4 … beginnt und bis unendlich geht (oft zählt man auch noch die 0 dazu)
- ✔ **Ganze Zahlen:** die Menge aus den natürlichen Zahlen mit der Null und den negativen Zahlen, das heißt den natürlichen Zahlen mit Minuszeichen davor
- ✔ **Rationale Zahlen:** die Menge der ganzen Zahlen und der Brüche
- ✔ **Reelle Zahlen:** die Menge der rationalen und der irrationalen Zahlen

Die Mengen der natürlichen Zahlen, ganzen Zahlen, rationalen Zahlen und reellen Zahlen sind ineinander verschachtelt. Diese Verschachtelung einer Menge in eine andere kann man sich vorstellen wie eine Stadt (beispielsweise Weinheim), die in ein Bundesland (Baden-Württemberg) verschachtelt ist, das sich in einem Land (Deutschland) befindet, das zu einem Kontinent gehört (Europa). Die Menge der natürlichen Zahlen befindet sich innerhalb der Menge der ganzen Zahlen, die sich innerhalb der Menge der rationalen Zahlen befindet, die sich innerhalb der Menge der reellen Zahlen befindet.

Zählen mit den natürlichen Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen ist die Menge der Zahlen, mit der Sie anfangen zu zählen: bei 1 (oder eben bei 0). Weil diese Zahlen scheinbar ganz natürlich aus der Welt entstanden sind, werden sie auch als die *natürlichen Zahlen* bezeichnet:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 …

Die natürlichen Zahlen sind unendlich, das heißt, sie laufen ewig weiter.

Wenn Sie zwei natürliche Zahlen addieren, erhalten Sie immer eine weitere natürliche Zahl. Wenn Sie zwei natürliche Zahlen multiplizieren, erhalten Sie als Ergebnis ebenfalls immer eine natürliche Zahl. Man sagt auch, die Menge der natürlichen Zahlen ist für Addition und Multiplikation *abgeschlossen*.

Einführung der ganzen Zahlen

Die Menge der ganzen Zahlen entsteht, wenn Sie versuchen, eine größere Zahl von einer kleineren Zahl zu subtrahieren. Beispiel: $4 - 6 = -2$. Die Menge der ganzen Zahlen beinhaltet Folgendes:

- ✔ die natürlichen Zahlen inklusive null
- ✔ die natürlichen Zahlen mit Minuszeichen

Hier ein Auszug aus der Liste der ganzen Zahlen:

$$\ldots \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots$$

Wie die natürlichen Zahlen sind auch die ganzen Zahlen für Addition und Multiplikation abgeschlossen. Und auch wenn Sie eine ganze Zahl von einer anderen ganzen Zahl subtrahieren, ist das Ergebnis immer eine ganze Zahl. Die ganzen Zahlen sind also auch für die Subtraktion abgeschlossen.

Wir bleiben rational

Hier die Menge der *rationalen Zahlen*:

- ✔ ganze Zahlen
  - natürliche Zahlen inklusive null
  - natürliche Zahlen mit Minuszeichen
- ✔ positive und negative Brüche

Wie die ganzen Zahlen sind rationale Zahlen für Addition, Subtraktion und Multiplikation abgeschlossen. Und wenn Sie eine rationale Zahl durch eine andere rationale Zahl dividieren, ist das Ergebnis ebenfalls immer eine rationale Zahl. Man sagt auch, die rationalen Zahlen sind für die Division *abgeschlossen*.

Werden wir reell

Selbst wenn man alle rationalen Zahlen eingetragen hat, bleiben immer noch Punkte auf dem Zahlenstrahl, die nicht beschriftet sind. Diese Punkte sind die irrationalen Zahlen.

Eine *irrationale Zahl* ist eine Zahl, die weder eine ganze Zahl noch ein Bruch ist. Eine irrationale Zahl kann nur als *nicht periodische Dezimalzahl* beschrieben werden. Mit anderen Worten, egal, wie viele Dezimalstellen Sie angeben, es gibt immer noch weitere. Darüber hinaus wiederholen sich die Ziffern innerhalb dieser Dezimalzahl nicht und weisen auch kein globales Muster auf. (Weitere Informationen über periodische und nicht periodische Dezimalzahlen finden Sie in *Kapitel 11*.)

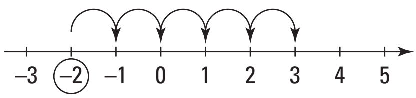
Die bekannteste irrationale Zahl ist π (weitere Informationen über π erhalten Sie in *Kapitel 16*, in dem es um die Geometrie von Kreisen geht):

$$\pi = 3{,}141.592.653.589.793.238.462.643.383.279.502.884.197.169.399.375.10\ldots$$

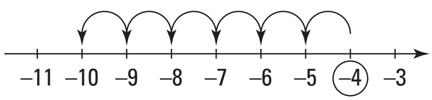
Zusammen bilden die rationalen und die irrationalen Zahlen die *reellen Zahlen*, die jeden Punkt auf dem Zahlenstrahl enthalten. In diesem Buch schreibe ich nicht viel über irrationale Zahlen, ich möchte Sie bloß darauf aufmerksam machen, dass es sie gibt, falls Sie sie später einmal brauchen.

Aufgaben

1. Die Zahl 24 kann in 3 verschiedenen rechteckigen Mustern zusammengesetzt werden. Zeichen Sie diese rechteckigen Muster mithilfe von Kreisen wie in Abbildung 1.12, und geben Sie die zugehörigen Multiplikationen an.
2. Wenn Sie in einem Job am ersten Tag 1 Cent verdienen und an jedem Tag jeweils das Doppelte des Vortags, so haben Sie nach 10 Tagen 10,23 € verdient.
   a. Wie viel haben Sie nach zehn Tagen verdient, wenn sich Ihr täglicher Verdienst jeden Tag verdreifacht? [*Tipp:* Die Zahlen werden rasch sehr groß. Benutzen Sie ruhig einen Taschenrechner.]
   b. Schreiben Sie für Aufgabe b) den Verdienst am zehnten Tag in der Schreibweise mit Exponenten.
3. Welche Addition ist hier dargestellt?



4. Welche Subtraktion ist hier dargestellt?



5. Wie viel wäre »∞ + 4«, wenn man das so rechnen dürfte?
6. Zeichnen Sie einen Zahlenstrahl von –20 bis 0 und stellen Sie in diesem Zahlenstrahl die Multiplikation $-5 \cdot 3 = -15$ dar.

7. Welche Antwort stimmt? Die Menge der rationalen Zahlen befindet sich innerhalb der Menge der …
   a. … natürlichen Zahlen.
   b. … ganzen Zahlen.
   c. … reellen Zahlen.

Die Lösungen zu allen Übungsaufgaben im Buch finden Sie kostenfrei zum Download unter `https://www.wiley-vch.de/de/dummies/downloads` und dem Buchtitel.