

Skripte zur Mathematik

# Zahlen

von

Christian Wyss



Skripte zur Mathematik

# Zahlen

von

Christian Wyss



mathema



© 2023 Dr. Christian Wyss

Verlagslabel: mathema ([www.mathema.ch](http://www.mathema.ch))

ISBN Hardcover: 978-3-384-15641-9

Paperback: 978-3-384-15640-2

Auflage 1.5

Druck und Distribution im Auftrag des Autors:

tredition GmbH, Heinz-Beusen-Stieg 5, 22926 Ahrensburg, Germany

Das Werk, einschliesslich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Für die Inhalte ist der Autor verantwortlich. Jede Verwertung ist ohne seine Zustimmung unzulässig. Die automatisierte Analyse des Werkes, um daraus Informationen, insbesondere über Muster, Trends und Korrelationen gemäss §44b UrhG („Text und Data Mining“) zu gewinnen, ist untersagt. Die Quellen der Bilder und deren Lizenzen sind im Anhang aufgeführt. Die Publikation und Verbreitung erfolgen im Auftrag des Autors, zu erreichen unter:

Dr. Christian Wyss, Chemin du Clos 60, 2502 Biel-Bienne, Schweiz.

Die Philosophie steht in diesem grossen Buch geschrieben, das unserem Blick ständig offen liegt – ich meine das Universum –; aber das Buch ist nicht zu verstehen, wenn man nicht zuvor die Sprache erlernt und sich mit den Buchstaben vertraut gemacht hat, in denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, und deren Buchstaben sind Kreise, Dreiecke und andere geometrische Figuren, ohne die es dem Menschen unmöglich ist, ein einziges Bild davon zu verstehen; ohne diese irrt man in einem dunklen Labyrinth herum.

Galileo Galilei: „*Il Saggiatore*“ (1623)



# Inhaltsverzeichnis

## *Einleitende Worte*

- I. Darstellung und Eigenschaften
- II. Die mysteriöse Zahl 1089
- III. Stellenwertsysteme
- IV. Maschinenzahlen
- V. Die Eulersche Zahl
- VI. Logarithmische Einheiten

## *Schlussbemerkungen*





## Einleitende Worte

Diese Skripte zur Mathematik sind im Rahmen des Gymnasialunterrichts entstanden. Sie können als eigenständiges Lern- und Übungsmaterial eingesetzt werden. Sie sind jedoch primär als **unterrichts-begleitendes Material** konzipiert. Eine Einführung und Anleitung durch eine Lehrperson wird daher empfohlen.

Die Skripte enthalten **Lückentexte**. Sie dienen der Festigung des erworbenen Wissens und sollten im Plenum mit der gesamten Klasse ausgefüllt werden. Diese handschriftlichen Einträge helfen, die Schlüsselbegriffe und Aussagen zu verinnerlichen und Herleitungen und Beweise besser nachzuvollziehen.

## Zu den Übungen

Um den Stoff zu vertiefen und zu festigen, halte ich es für unerlässlich, dass die Schülerinnen und Schüler eine Vielzahl von Übungen lösen. Die Skripte enthalten daher viele Übungen, die nicht nur das Erlernte festigen, sondern auch inner- und aussermathematische Anwendungen aufzeigen. Einige Übungen sind bewusst anspruchsvoller gestaltet und gehen über den üblichen Lehrstoff hinaus, können jedoch bei Bedarf übersprungen werden. Ein Stern ★ markiert, dass es sich bei der Aufgabe um eine zusätzliche Übung handelt, die über den obligatorischen Lernstoff hinausgeht. Im Folgenden werden die unterschiedlichen Übungstypen kurz erläutert.

### *Einstiegsbeispiel*

Ein Einführungsbeispiel stellt eine Aufgabe dar, die eine neu einzuführende Thematik exemplarisch vorstellt. Diese Aufgabe soll die grundlegenden Begriffe der neuen Thematik vorwegnehmen und damit einführen. Dabei darf die Aufgabe einen gewissen Anspruch haben. Ein gemeinsames Lösen dieser Aufgaben im Plenum oder eine detaillierte Besprechung empfiehlt sich, um das Verständnis zu fördern.

### *Grundaufgaben*

Eine Grundaufgabe ist eine Übungsaufgabe, die von den Schülerinnen und Schülern routiniert und sicher gelöst werden sollte. Durch die Bearbeitung mehrerer dieser Aufgaben sollen die Lernenden die Struktur verstehen und sich mit dem Lösungsweg vertraut machen, um ihn anschliessend situationsbezogen bei weiterführenden Aufgaben anwenden zu können.

### *Erarbeitungsaufgaben*

Erarbeitungsaufgaben sind konzipiert, um den Lernstoff zu entwickeln und die Schülerinnen und Schüler konstruktivistisch an die neue Theorie heranzuführen.

### *Anwendungsaufgaben*

Das erworbene theoretische Wissen hat in der Regel sowohl inner- als auch aussermathematische Anwendungen. Anwendungsaufgaben sollen die Fähigkeit zur Mathematisierung fördern und die Anwendbarkeit des Gelernten verdeutlichen.

### *Beweisaufgaben*

In Beweisaufgaben lernen die Schülerinnen und Schüler, selbstständig einfache Beweise zu führen.

## ***Zu den Titelbildern***

Die Titelblätter bieten die Möglichkeit, verschiedene Aspekte der Mathematik mit den Schülerinnen und Schülern zu thematisieren. Dies umfasst insbesondere folgende Bereiche:

### *Mathematik und Ästhetik*

Mathematik und Kunst stehen auf vielfältige Weise in Beziehung. Ihre Verbindung zeigt sich in Musik, Malerei, Architektur, Skulptur und Textilgestaltung etc. Die Titelblätter zielen darauf ab, die Schönheit der Mathematik anhand der bildenden Kunst aufzuzeigen.

### *Rechenhilfsmittel*

„Es ist unwürdig, die Zeit von hervorragenden Leuten mit knechtischen Rechenarbeiten zu verschwenden, weil bei Einsatz einer Maschine auch der Einfältigste die Ergebnisse sicher hinschreiben kann.“ G. W. Leibniz (1673).

Der Mensch hat bereits in der Frühzeit Rechenhilfsmittel entwickelt, angefangen vom Kerbholz über mechanische Rechenmaschinen bis hin zu analogen und digitalen Computern. Die Titelblätter illustrieren diese Entwicklung.

### *Geschichte der Mathematik*

Die Geschichte der Mathematik reicht zurück bis ins Altertum und den Anfängen des Zählens in der Jungsteinzeit. Mathematik wurde und wird in allen Kulturkreisen praktiziert. Die Titelblätter thematisieren bedeutende Werke der Mathematik sowie herausragende Mathematikerinnen und Mathematiker, die die Entwicklung dieser Disziplin massgeblich beeinflusst haben.

## ***Zu den Inhalten***

### *Allgemeines*

Die Aufteilung des Stoffes in mehrere Skripte dient der Flexibilität bei der Gestaltung des Unterrichts. Da Mathematik eine stark hierarchische Struktur aufweist, kann der Stoff nicht in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Die Skripte sind in einer möglichen Bearbeitungsreihenfolge angeordnet.

Im Folgenden wird kurz dargelegt, welches spezifische Vorwissen für jede Einheit zusätzlich erforderlich ist.

### *Darstellung und Eigenschaften*

#### *Behandelter Stoff*

Im ersten Abschnitt wird eine kurze historische Entwicklung der Zahlen skizziert, wobei insbesondere auf altägyptische, babylonische, arabische und römische Zahlen eingegangen wird. Anschliessend werden verschiedene, heute gebräuchliche Notationen beschrieben, wobei besonders das Stellenwertsystem (dezimal, binär, dual, hexadezimal usw.) erläutert wird. Auch die wissenschaftliche Schreibweise wird behandelt. Die grundlegenden Zahlenmengen (natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen) sowie ihre Eigenschaften werden diskutiert. Besondere Zahlen (wie die Primzahlen und die Kreiszahl) und auch Eigenschaften von Zahlen (insbesondere die Parität) werden betrachtet.

#### *Notwendiges Vorwissen*

Es wird kein Vorwissen aus dem gymnasialen Curriculum vorausgesetzt.

## *Die mysteriöse Zahl 1089*

### *Behandelter Stoff*

Die Eigenschaften der magischen Zahl 1089 werden diskutiert.

### *Notwendiges Vorwissen*

Es wird kein Vorwissen aus dem gymnasialen Curriculum vorausgesetzt.

## *Stellenwertsysteme*

### *Behandelter Stoff*

Im Skript werden Stellenwertsysteme (insbesondere dezimal, binär usw.) ausführlicher behandelt. Das Umrechnen von Zahlen (einschliesslich gebrochener Zahlen) zwischen den verschiedenen Systemen wird durchgeführt und diskutiert.

### *Notwendiges Vorwissen*

Vertrautheit mit ganzzahligen Potenzen (also auch mit negativen Potenzen und der Potenz Null) ist von Vorteil.

## *Maschinenzahlen*

### *Behandelter Stoff*

Im Skript wird ausführlich die Herausforderung der Speicherung von Zahlen im Binärsystem sowie die damit verbundenen Rundungsfehler (Maschinengenauigkeit) diskutiert. Die Norm IEEE 754 für Fließkommazahlen wird eingehend erläutert, und es werden Methoden behandelt, um Zahlen in die IEEE 754-Norm umzurechnen.

### *Notwendiges Vorwissen*

Die Schülerinnen und Schüler sollten bereits in der Lage sein, Zahlen (sowohl ganze als auch gebrochene Zahlen) im binären Stellenwertsystem darzustellen.

## *Die Euler'sche Zahl*

### *Behandelter Stoff*

Im Skript werden die Eigenschaften der Euler'schen Zahl detailliert aufgezeigt. Dabei wird eine intuitive Einführung in die Zahl durch die bereits von Euler gewählte Methode der stetigen Verzinsung gegeben. Anschliessend wird die Euler'sche Zahl hergeleitet und ihre Reihenentwicklung besprochen.

### *Notwendiges Vorwissen*

Die Schülerinnen und Schüler müssen mit der Berechnung von Grenzwerten und dem Differentialquotienten vertraut sein.

## *Logarithmische Einheiten*

### *Behandelter Stoff*

Logarithmische Skalen wie Pegel, Schallpegel und die Phon-Skala, die Richter-Skala, pH-Werte und Helligkeiten werden untersucht und ihre Eigenschaften erörtert. Des Weiteren wird die Darstellung von Daten und Graphen von Funktionen, insbesondere linearer, Potenz- und Exponentialfunktionen sowie Logarithmusfunktionen, in logarithmischen Skalen diskutiert.

### *Notwendiges Vorwissen*

Vertrautheit mit dem Logarithmus wird vorausgesetzt.