

Skripte zur Mathematik

Geometrie

von

Christian Wyss

Skripte zur Mathematik

Geometrie

von

Christian Wyss



mathema



© 2023 Dr. Christian Wyss

Verlagslabel: mathema (www.mathema.ch)

ISBN Hardcover: 978-3-384-17196-2
Paperback: 978-3-384-17195-5

Auflage 1.4

Druck und Distribution im Auftrag des Autors:
tredition GmbH, Heinz-Beusen-Stieg 5, 22926 Ahrensburg, Germany

Das Werk, einschliesslich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Für die Inhalte ist der Autor verantwortlich. Jede Verwertung ist ohne seine Zustimmung unzulässig. Die automatisierte Analyse des Werkes, um daraus Informationen, insbesondere über Muster, Trends und Korrelationen gemäss §44b UrhG („Text und Data Mining“) zu gewinnen, ist untersagt. Die Quellen der Bilder und deren Lizenzen sind im Anhang aufgeführt. Die Publikation und Verbreitung erfolgen im Auftrag des Autors, zu erreichen unter:
Dr. Christian Wyss, Chemin du Clos 60, 2502 Biel-Bienne, Schweiz.

Die Philosophie steht in diesem grossen Buch geschrieben, das unserem Blick ständig offen liegt – ich meine das Universum –; aber das Buch ist nicht zu verstehen, wenn man nicht zuvor die Sprache erlernt und sich mit den Buchstaben vertraut gemacht hat, in denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, und deren Buchstaben sind Kreise, Dreiecke und andere geometrische Figuren, ohne die es dem Menschen unmöglich ist, ein einziges Bild davon zu verstehen; ohne diese irrt man in einem dunklen Labyrinth herum.

Galileo Galilei: „*Il Saggiatore*“ (1623)

Inhaltsverzeichnis

Einleitende Worte

- I. Satzgruppe des Pythagoras
- II. Kongruenzabbildungen
- III. Ähnlichkeit
- IV. Stereometrie
- V. Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck
- VI. Trigonometrie im allgemeinen Dreieck
- VII. Einführung in die Darstellende Geometrie
- VIII. Übungen zur Darstellenden Geometrie

Schlussbemerkungen

Einleitende Worte

Diese Skripte zur Mathematik sind im Rahmen des Gymnasialunterrichts entstanden. Sie können als eigenständiges Lern- und Übungsmaterial eingesetzt werden. Sie sind jedoch primär als **unterrichtsbegleitendes Material** konzipiert. Eine Einführung und Anleitung durch eine Lehrperson wird daher empfohlen.

Die Skripte enthalten **Lückentexte**. Sie dienen der Festigung des erworbenen Wissens und sollten im Plenum mit der gesamten Klasse ausgefüllt werden. Diese handschriftlichen Einträge helfen, die Schlüsselbegriffe und Aussagen zu verinnerlichen und Herleitungen und Beweise besser nachzuvollziehen.

Zu den Übungen

Um den Stoff zu vertiefen und zu festigen, halte ich es für unerlässlich, dass die Schülerinnen und Schüler eine Vielzahl von Übungen lösen. Die Skripte enthalten daher viele Übungen, die nicht nur das Erlernte festigen, sondern auch inner- und aussermathematische Anwendungen aufzeigen. Einige Übungen sind bewusst anspruchsvoller gestaltet und gehen über den üblichen Lehrstoff hinaus, können jedoch bei Bedarf übersprungen werden. Ein Stern ★ markiert, dass es sich bei der Aufgabe um eine zusätzliche Übung handelt, die über den obligatorischen Lernstoff hinausgeht. Im Folgenden werden die unterschiedlichen Übungstypen kurz erläutert.

Einstiegsbeispiel

Ein Einführungsbeispiel stellt eine Aufgabe dar, die eine neu einzuführende Thematik exemplarisch vorstellt. Diese Aufgabe soll die grundlegenden Begriffe der neuen Thematik vorwegnehmen und damit einführen. Dabei darf die Aufgabe einen gewissen Anspruch haben. Ein gemeinsames Lösen dieser Aufgaben im Plenum oder eine detaillierte Besprechung empfiehlt sich, um das Verständnis zu fördern.

Grundaufgaben

Eine Grundaufgabe ist eine Übungsaufgabe, die von den Schülerinnen und Schülern routiniert und sicher gelöst werden sollte. Durch die Bearbeitung mehrerer dieser Aufgaben sollen die Lernenden die Struktur verstehen und sich mit dem Lösungsweg vertraut machen, um ihn anschliessend situationsbezogen bei weiterführenden Aufgaben anwenden zu können.

Erarbeitungsaufgaben

Erarbeitungsaufgaben sind konzipiert, um den Lernstoff zu entwickeln und die Schülerinnen und Schüler konstruktivistisch an die neue Theorie heranzuführen.

Anwendungsaufgaben

Das erworbene theoretische Wissen hat in der Regel sowohl inner- als auch aussermathematische Anwendungen. Anwendungsaufgaben sollen die Fähigkeit zur Mathematisierung fördern und die Anwendbarkeit des Gelernten verdeutlichen.

Beweisaufgaben

In Beweisaufgaben lernen die Schülerinnen und Schüler, selbstständig einfache Beweise zu führen.

Zu den Titelbildern

Die Titelblätter bieten die Möglichkeit, verschiedene Aspekte der Mathematik mit den Schülerinnen und Schülern zu thematisieren. Dies umfasst insbesondere folgende Bereiche:

Mathematik und Ästhetik

Mathematik und Kunst stehen auf vielfältige Weise in Beziehung. Ihre Verbindung zeigt sich in Musik, Malerei, Architektur, Skulptur und Textilgestaltung etc. Die Titelblätter zielen darauf ab, die Schönheit der Mathematik anhand der bildenden Kunst aufzuzeigen.

Rechenhilfsmittel

„Es ist unwürdig, die Zeit von hervorragenden Leuten mit knechtischen Rechenarbeiten zu verschwenden, weil bei Einsatz einer Maschine auch der Einfältigste die Ergebnisse sicher hinschreiben kann.“ G. W. Leibniz (1673).

Der Mensch hat bereits in der Frühzeit Rechenhilfsmittel entwickelt, angefangen vom Kerbholz über mechanische Rechenmaschinen bis hin zu analogen und digitalen Computern. Die Titelblätter illustrieren diese Entwicklung.

Geschichte der Mathematik

Die Geschichte der Mathematik reicht zurück bis ins Altertum und den Anfängen des Zählens in der Jungsteinzeit. Mathematik wurde und wird in allen Kulturkreisen praktiziert. Die Titelblätter thematisieren bedeutende Werke der Mathematik sowie herausragende Mathematikerinnen und Mathematiker, die die Entwicklung dieser Disziplin massgeblich beeinflusst haben.

Zu den Inhalten

Allgemeines

Die Aufteilung des Stoffes in mehrere Skripte dient der Flexibilität bei der Gestaltung des Unterrichts. Da Mathematik eine stark hierarchische Struktur aufweist, kann der Stoff nicht in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Die Skripte sind in einer möglichen Bearbeitungsreihenfolge angeordnet. Im Folgenden wird kurz dargelegt, welches spezifische Vorwissen für jede Einheit zusätzlich erforderlich ist.

Pythagoras

Behandelter Stoff

Die Satzgruppe von Pythagoras (Satz von Pythagoras, Höhensatz von Euklid und den Kathetensatz) wird behandelt, wobei ein besonderes Augenmerk auf die detaillierten Beweise dieser Sätze gelegt wird. Zusätzlich werden grundlegende Übungen zu dieser Satzgruppe, geometrische Anwendungen sowohl in der Ebene als auch im Raum (planimetrische und stereometrische Probleme) sowie praktische Anwendungen gelöst.

Notwendiges Vorwissen

Einige Beweise erfordern das Verständnis von Überlegungen an ähnlichen Dreiecken (insbesondere den Verhältnissen von Seitenlängen in ähnlichen Dreiecken). Diese Konzepte sind jedoch den meisten Schülerinnen und Schülern intuitiv zugänglich. Ansonsten wird kein spezifisches Vorwissen aus dem gymnasialen Curriculum vorausgesetzt.

Kongruenzabbildungen

Behandelter Stoff

Die Kongruenzabbildungen, d.h. Translation, Rotation, Achsenspiegelung und Punktspiegelung, werden behandelt und auf ihre Eigenschaften untersucht.

Notwendiges Vorwissen

Es wird kein Vorwissen aus dem gymnasialen Curriculum vorausgesetzt.

Ähnlichkeitsabbildungen

Behandelter Stoff

Die zentrische Streckung und ihre Eigenschaften werden eingehend untersucht, einschliesslich Konstruktion, Streckzentrum und Streckfaktor. Mit Hilfe der zentrischen Streckungen, bzw. unter Anwendung der Strahlensätze, werden vielfältige geometrische Probleme gelöst. Dabei werden zudem angewandte Aufgaben behandelt, insbesondere im Kontext von Kartenmassstäben (Vergrößerung, Verkleinerung) sowie die Untersuchung von Streckfaktoren für Längen, Flächen und Volumina.

Notwendiges Vorwissen

Der Satz des Pythagoras wird bei einigen geometrischen Aufgaben benötigt und angewendet. Die Kenntnis der Kongruenzabbildungen wird vorausgesetzt, jedoch nur am Rande. Ansonsten wird kein spezifisches Vorwissen aus dem gymnasialen Curriculum vorausgesetzt.

Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

Behandelter Stoff

Die trigonometrischen Funktionen (Sinus, Cosinus und Tangens) werden im rechtwinkligen Dreieck definiert und deren Anwendung wird geübt. Mit Hilfe dieser Funktionen werden geometrische Grundprobleme (Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken) sowie angewandte Probleme (Neigungswinkel, Vermessungsprobleme, Geodäsie usw.) gelöst.

Notwendiges Vorwissen

Der Satz des Pythagoras und der Satz zur Winkelsumme im Dreieck werden bei vielen Aufgaben benötigt und angewendet. Ansonsten wird kein spezifisches Vorwissen aus dem gymnasialen Curriculum vorausgesetzt.

Trigonometrie im allgemeinen Dreieck

Behandelter Stoff

Die trigonometrischen Funktionen (Sinus, Cosinus und Tangens) werden im Einheitskreis definiert und einige Reduktionsformeln werden diskutiert. Der Sinus- und der Cosinussatz werden bewiesen und grundlegende Aufgaben am allgemeinen Dreieck werden gelöst. Klassische Triangulationsprobleme und geometrische Anwendungen werden behandelt.

Notwendiges Vorwissen

Die Kenntnisse der trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck werden vorausgesetzt. Zudem ist das Verständnis des Satzes des Pythagoras erforderlich. Ansonsten wird kein spezifisches Vorwissen aus dem gymnasialen Curriculum vorausgesetzt.

Einführung in die Darstellende Geometrie

Behandelter Stoff

Die Darstellungen des Raumes, insbesondere der Zweitafelprojektion und der Dreitafelprojektion, werden geübt. Dabei werden Punkte und Strecken in der Zweitafelprojektion dargestellt, wobei die wahre Länge von Strecken bestimmt wird. Zudem werden Geraden in der Zweitafelprojektion durch ihre Spurpunkte dargestellt, und ihre speziellen Lagen sowie die gegenseitigen Lagen von Geraden werden diskutiert. Des Weiteren werden Schatten von Flächen und Körpern auf die Rissebenen konstruiert, Punkte auf Geraden werden konstruiert und der Neigungswinkel gegenüber den Rissebenen wird bestimmt.

Ebenso werden Ebenen in der Zweitafelprojektion dargestellt, sowohl durch ihre Spurgeraden als auch durch ihre Hauptgeraden. Dabei werden die speziellen Lagen von Ebenen (projizierende Ebene, Hauptebene) behandelt, die Spurgeraden einer Ebene konstruiert und die Schnittgerade zweier Ebenen bestimmt.

Die umfangreichen Konstruktionsaufgaben werden der Übersichtlichkeit halber in zusätzlichen Dossiers zusammengefasst. Im Skript wird jeweils auf diese Konstruktionsaufgaben Bezug genommen.

Notwendiges Vorwissen

Es wird kein spezifisches Vorwissen aus dem gymnasialen Curriculum vorausgesetzt.

Geometrie

Pythagoras



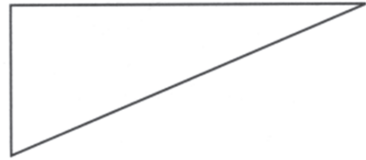
Die *Elemente* (Stoicheia) sind eine Abhandlung des griechischen Mathematikers Euklid (3. Jahrhundert v. Chr.), in der er die Arithmetik und Geometrie seiner Zeit zusammenfasst und systematisiert. Das Werk zeigt erstmals musterhaft den Aufbau einer exakten Wissenschaft, da die meisten Aussagen aus einem begrenzten Vorrat von Definitionen, Postulaten und Axiomen hergeleitet und bewiesen werden. Dieses Vorgehen beeinflusste bis heute nicht nur die Mathematiker, sondern auch viele Physiker, Philosophen und Theologen bei ihrem Versuch, ihre Wissenschaft auf Axiomen aufzubauen.

Die *Elemente* wurden 2000 Jahre lang als akademisches Lehrbuch benutzt und waren bis in die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts das nach der Bibel meistverbreitete Werk der Weltliteratur.

1. Der Satz des Pythagoras

Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck

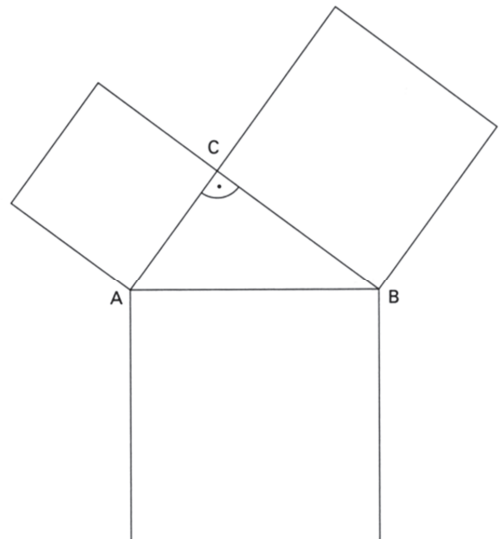
Die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck heisst Hypotenuse. Die beiden kürzeren, am rechten Winkel anliegenden Seiten heissen Katheten. Der Satz des Pythagoras besagt, dass die Summe der Flächeninhalte der beiden Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse ist.



Satz des Pythagoras: In einem rechtwinkligen Dreieck ist das über der Hypotenuse errichtete Quadrat gleich gross wie die beiden über den Katheten errichteten Quadrate zusammen.

Aufgabe 1: Bezeichnungen.

- Bezeichne den rechten Winkel und beschrifte die Hypotenuse und die Katheten im obenstehenden Dreieck.
- Beschrifte im nebenstehenden Dreieck die Seiten mit a , b , c . Ergänze jedes Quadrat mit dem Term für den Flächeninhalt.
- Formuliere mit diesen Termen den Satz des Pythagoras als Gleichung und fülle den Lückentext unten aus.



In einem rechtwinkligen Dreieck

gelten folgende Ausdrücke und Beziehungen:

Die Hypotenuse c ist die längste Seite.

Die Katheten a und b sind die kürzeren Seiten.

Der Satz des Pythagoras lautet:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Beweise für den Satz von Pythagoras

Beweis durch Parkettierung

Die gesamte Ebene lässt sich mit zwei verschiedenen Sorten von jeweils flächengleichen Quadraten parkettieren.

Jedes der grünen Quadrate hat den Flächeninhalt

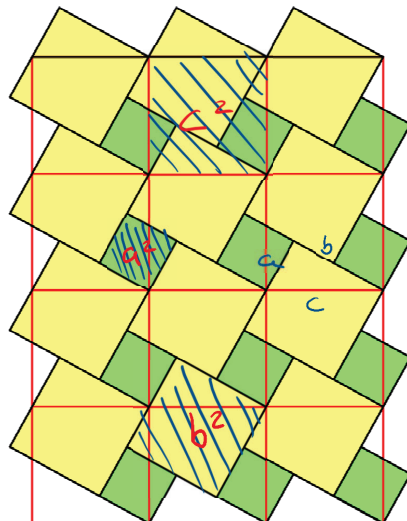
$$a^2$$

jedes der gelben Quadrate den Flächeninhalt

$$b^2$$

und jedes der rot umrandeten Quadrate den Flächeninhalt

$$c^2$$



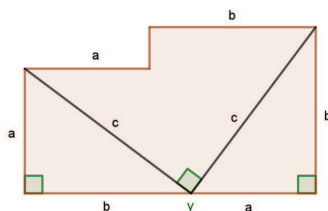
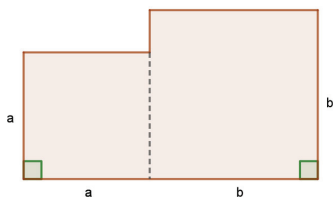
Da einerseits die grünen und die gelben Quadrate zusammen und andererseits die rot umrandeten Quadrate jeweils die gesamte Ebene parkettieren, muss gelten:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Beweis durch Zerlegung

Aufgabe 2: Die untenstehend abgebildete Fläche besteht aus zwei Quadraten.

- In der linken Figur ist die Fläche zwei Teilflächen aufgeteilt. Wie gross ist der Flächeninhalt der linken Figur? Stelle einen Term auf.
- Rechts wird die Figur in zwei andere Teilflächen aufgeteilt. Zeige, dass der Winkel $\gamma = 90^\circ$ ist.
- Zerlege die Figur entlang den Linien c. Nun kannst Du die Teilflächen so zusammenlegen, dass ein grosses Quadrat entsteht. Stelle einen Term für dieses Quadrat auf.
- Die beiden Flächeninhalte müssen gleich sein, also sind die gefunden Terme gleich. Was kann man daraus schliessen?

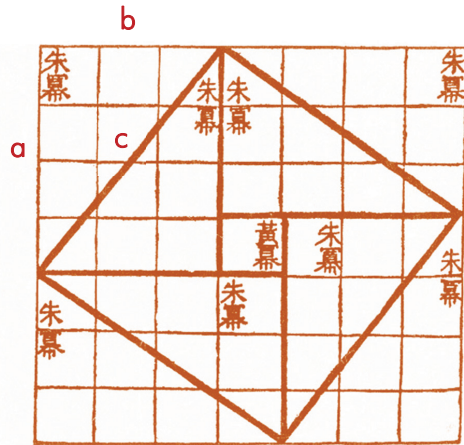


Beweis durch Addition abgeleiteter Flächeninhalte

Aufgabe 3: Für den Satz von Pythagoras sind mehrere hundert

Beweise bekannt, womit er wohl der meistbewiesene mathematische Satz ist. Im chinesischen Buch Zhoubi suanjing (100 v. Chr.) „Figur des Seils“ wird ein Beweis vorgestellt (vgl. Figur): Wir betrachten ein Quadrat, dem ein weiteres Quadrat einbeschrieben ist. Das grosse Quadrat hat die Seitenlänge $a + b$ und das einbeschriebene Quadrat hat die Seitenlänge c .

勾股零合以成弦零



Es gilt also (ergänze die rechte Seite der Gleichung):

Inhalt grosses Quadrat = Inhalt mittelgrosses Quadrat + Inhalt vier Dreiecke

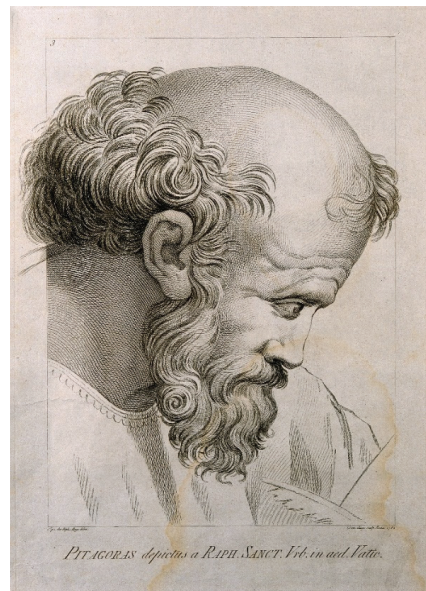
$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2}$$

Versuche nun durch Umformen dieser Gleichung den Satz des Pythagoras zu erhalten:

$$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = c^2 + \cancel{2ab}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

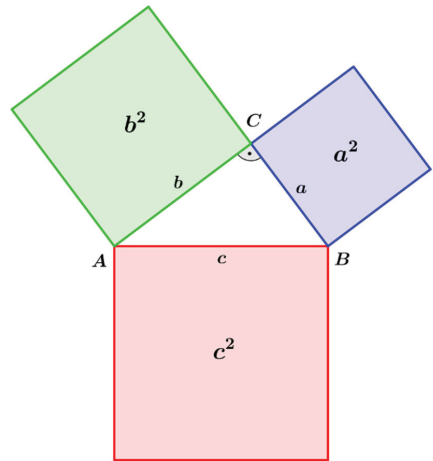
Pythagoras (* ca. 570, † ca. 510 v. Chr.) war ein griechischer Philosoph und Gründer einer einflussreichen religiösphilosophischen Bewegung. Er gründete eine Schule in Kroton (Kalabrien), deren Mitglieder eine enge Gemeinschaft bildeten und sich auf eine genau geregelte, bescheidene Lebensweise festlegten. „Alles ist Zahl“ - dieser Satz wird den Pythagoreern zugeschrieben und er verdeutlicht, dass sie die Zahl als eine die gesamte Natur konstituierende Kraft betrachteten. Der Kupferstich von Pythagoras, die hier abgebildet ist, stammt aus dem 18. Jahrhundert und ist eine Nachzeichnung eines Details der „Schule von Athen“ von Raffael. Sie entspringt der Phantasie des Künstlers.



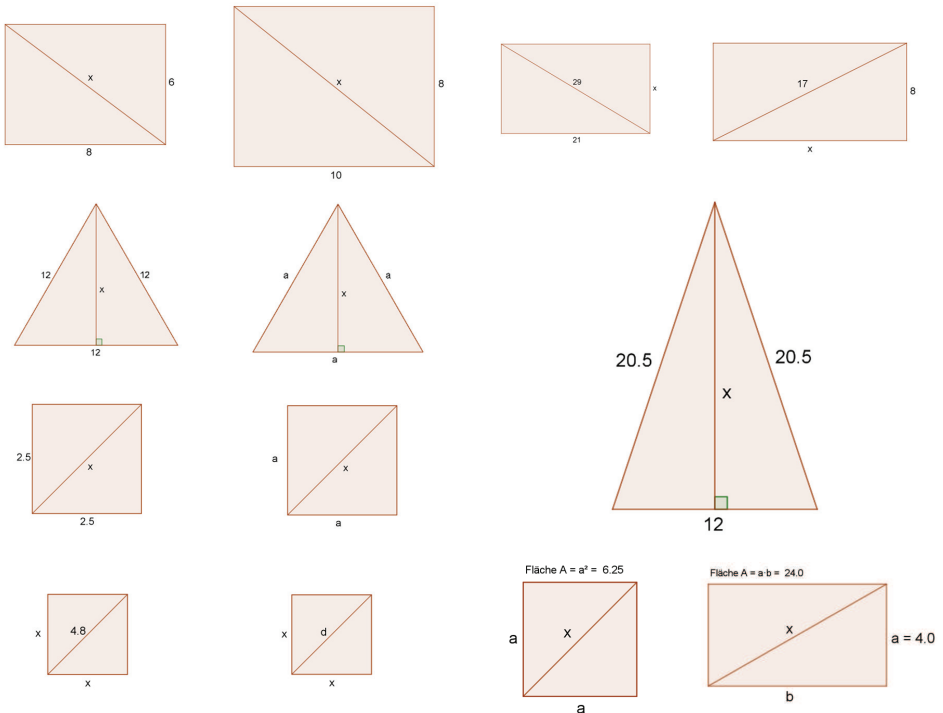
Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck

Aufgabe 4: Berechne die Länge der Hypotenuse c :

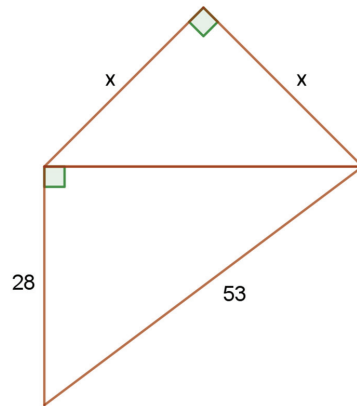
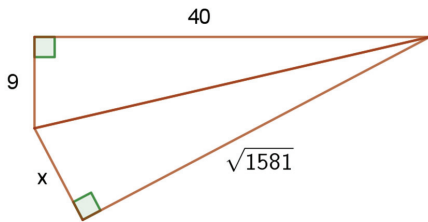
- a) $a = 3, b = 4$
- b) $a = 4, b = 5$
- c) $a = 5, b = 6$



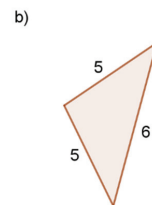
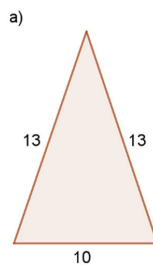
Aufgabe 5: Berechne die fehlende Strecke x :



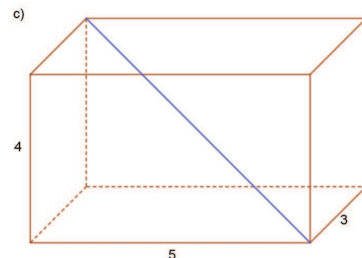
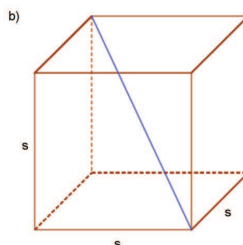
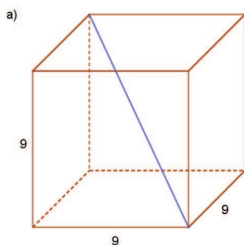
Aufgabe 6: Berechne x:



Aufgabe 7: Berechne den Flächeninhalt der nebenstehenden gleichschenkeligen Dreiecke.

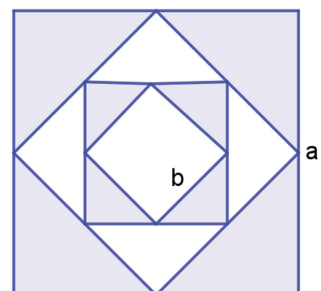


Aufgabe 8: Berechne die Länge der Raumdiagonale:



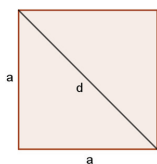
★ Aufgabe 9: Berechne die gesuchte Grösse mithilfe der Skizze:

- a) $a = 22$ cm Seitenlänge b
- b) $b = 7$ cm Seitenlänge a
- c) $b = 3.5$ cm Flächeninhalt der blauen Figur
- d) Denke Dir die Figur unendlich lange nach innen weiter fortgesetzt. Wie gross wird der blaue Flächeninhalt, wenn $a = 3$ cm ist?

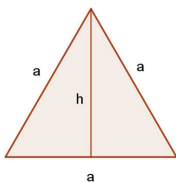


Aufgabe 10: Wir betrachten regelmässige Figuren:

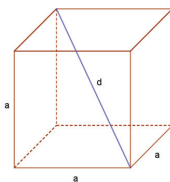
A



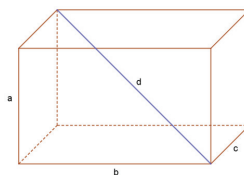
B



C



D



- Wie heissen die drei Figuren?
- Berechne für $a = 5 \text{ cm}$
 - in der Figur A die Diagonale d und die Fläche A ,
 - in der Figur B die Höhe h und die Fläche A ,
 - in der Figur C die Raumdiagonale d und das Volumen V und
 - in der Figur D die Raumdiagonale d und das Volumen V mit $b = 7 \text{ cm}$ und $c = 12 \text{ cm}$.
- Notiere die **Formeln für diese regelmässigen Flächen und Körper** allgemein und merke Dir diese Formeln:

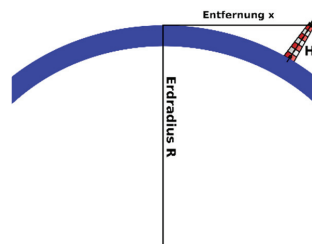
Figur A: $d =$ $A =$

Figur B: $h =$ $A =$

Figur C: $d =$ $V =$

Figur D: $d =$ $V =$

Aufgabe 11: Wie gross ist die Sichtweite vom 45 Meter hohen Leuchtturm bis zum Horizont? Die Erde ist eine Kugel mit einem Radius von 6'370 km.



Aufgabe 12: Eine Schnur ist regelmässig um einen Stab gewickelt. Die Schnur windet sich genau 4-mal um den Stab. Der Umfang des Stabes ist 4 cm und die Länge des Stabes ist 12 cm. Wie lang ist die Schnur?

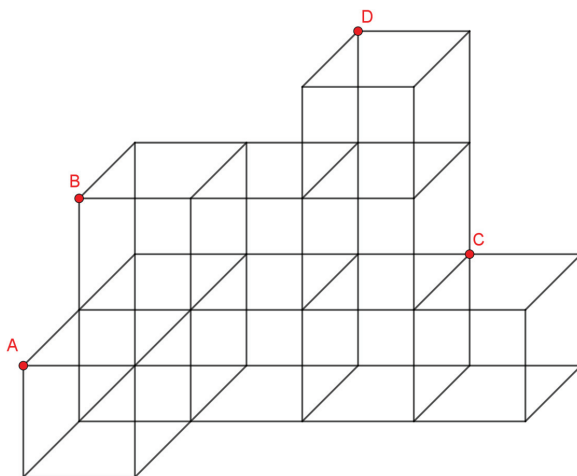


Aufgabe 13: Kann das Auto noch ausparken? Es ist 4.80 m lang und 1.80 m breit; der Abstand zum vorderen und hinteren Fahrzeug beträgt jeweils 30 cm.



Aufgabe 14: Ein Gitter aus Würfeln.

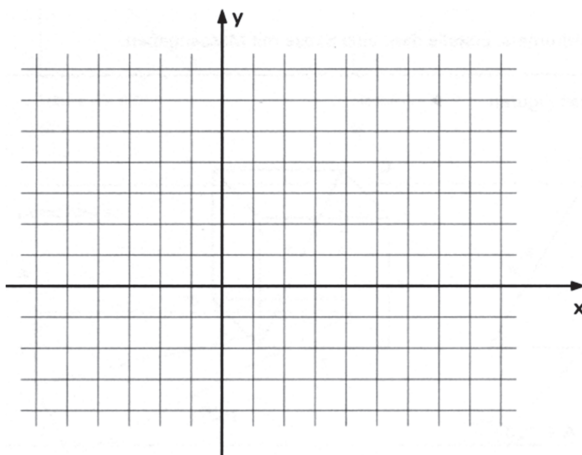
Die Seitenlänge eines Würfels beträgt 1 m. Berechne die Abstände: AB, AC, AD, BC, BD, und CD.



Aufgabe 15: Trage die Punkte im Koordinatensystem ein:

$A(1 | 2)$, $B(4 | 7)$, $C(-1 | 4)$.

Berechne die Abstände AB, AC und BC.



Aufgabe 16: Berechne den Inhalt der dunkelblauen Flächen (1 Häuschen entspricht einer Einheit).

