Skripte zur Mathematik

Komplexe Zahlen

von

Christian Wyss

Skripte zur Mathematik

Komplexe Zahlen

von

Christian Wyss

mathema

tredition

Verlagslabel: mathema (www.mathema.ch)

ISBN Paperback: 978-3-384-13750-0
Hardcover: 978-3-384-13751-7

Auflage 1.2

Druck und Distribution im Auftrag des Autors:
tredition GmbH, Heinz-Beusen-Stieg 5, 22926 Ahrensburg, Germany

Die Philosophie steht in diesem grossen Buch geschrieben, das unserem Blick ständig offen liegt – ich meine das Universum –; aber das Buch ist nicht zu verstehen, wenn man nicht zuvor die Sprache erlernt und sich mit den Buchstaben vertraut gemacht hat, in denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, und deren Buchstaben sind Kreise, Dreiecke und andere geometrische Figuren, ohne die es dem Menschen unmöglich ist, ein einziges Bild davon zu verstehen; ohne diese irrt man in einem dunklen Labyrinth herum.

Galileo Galilei: „*Il Saggiatore*“ (1623)

Inhaltsverzeichnis

Einleitende Worte

Diese Skripte zur Mathematik sind im Rahmen des Gymnasialunterrichts entstanden. Sie können als eigenständiges Lern- und Übungsmaterial eingesetzt werden. Sie sind jedoch primär als *unterrichts-begleitendes Material* konzipiert. Eine Einführung und Anleitung durch eine Lehrperson wird daher empfohlen.

Die Skripte enthalten *Lückentexte*. Sie dienen der Festigung des erworbenen Wissens und sollten im Plenum mit der gesamten Klasse ausgefüllt werden. Diese handschriftlichen Einträge helfen, die Schlüsselbegriffe und Aussagen zu verinnerlichen und Herleitungen und Beweise besser nachzuvollziehen.

Zu den Übungen

Um den Stoff zu vertiefen und zu festigen, halte ich es für unerlässlich, dass die Schülerinnen und Schüler eine Vielzahl von Übungen lösen. Die Skripte enthalten daher viele Übungen, die nicht nur das Erlernte festigen, sondern auch inner- und aussermathematische Anwendungen aufzeigen. Einige Übungen sind bewusst anspruchsvoller gestaltet und gehen über den üblichen Lehrstoff hinaus, können jedoch bei Bedarf übersprungen werden. Ein Stern ★ markiert, dass es sich bei der Aufgabe um eine zusätzliche Übung handelt, die über den obligatorischen Lernstoff hinausgeht. Im Folgenden werden die unterschiedlichen Übungstypen kurz erläutert.

Einstiegsbeispiel

Ein Einführungsbeispiel stellt eine Aufgabe dar, die eine neu einzuführende Thematik exemplarisch vorstellt. Diese Aufgabe soll die grundlegenden Begriffe der neuen Thematik vorwegnehmen und damit einführen. Dabei darf die Aufgabe einen gewissen Anspruch haben. Ein gemeinsames Lösen dieser Aufgaben im Plenum oder eine detaillierte Besprechung empfiehlt sich, um das Verständnis zu fördern.

Grundaufgaben

Eine Grundaufgabe ist eine Übungsaufgabe, die von den Schülerinnen und Schülern routiniert und sicher gelöst werden sollte. Durch die Bearbeitung mehrerer dieser Aufgaben sollen die Lernenden die Struktur verstehen und sich mit dem Lösungsweg vertraut machen, um ihn anschliessend situationsbezogen bei weiterführenden Aufgaben anwenden zu können.

Erarbeitungsaufgaben

Erarbeitungsaufgaben sind konzipiert, um den Lernstoff zu entwickeln und die Schülerinnen und Schüler konstruktivistisch an die neue Theorie heranzuführen.

Anwendungsaufgaben

Das erworbene theoretische Wissen hat in der Regel sowohl inner- als auch aussermathematische Anwendungen. Anwendungsaufgaben sollen die Fähigkeit zur Mathematisierung fördern und die Anwendbarkeit des Gelernten verdeutlichen.

Beweisaufgaben

In Beweisaufgaben lernen die Schülerinnen und Schüler, selbstständig einfache Beweise zu führen.

Zu den Titelbildern

Die Titelblätter bieten die Möglichkeit, verschiedene Aspekte der Mathematik mit den Schülerinnen und Schülern zu thematisieren. Dies umfasst insbesondere folgende Bereiche:

Mathematik und Ästhetik

Mathematik und Kunst stehen auf vielfältige Weise in Beziehung. Ihre Verbindung zeigt sich in Musik, Malerei, Architektur, Skulptur und Textilgestaltung etc. Die Titelblätter zielen darauf ab, die Schönheit der Mathematik anhand der bildenden Kunst aufzuzeigen.

Rechenhilfsmittel

„Es ist unwürdig, die Zeit von hervorragenden Leuten mit knechtischen Rechenarbeiten zu verschwenden, weil bei Einsatz einer Maschine auch der Einfältigste die Ergebnisse sicher hinschreiben kann." G. W. Leibniz (1673).
Der Mensch hat bereits in der Frühzeit Rechenhilfsmittel entwickelt, angefangen vom Kerbholz über mechanische Rechenmaschinen bis hin zu analogen und digitalen Computern. Die Titelblätter illustrieren diese Entwicklung.

Geschichte der Mathematik

Die Geschichte der Mathematik reicht zurück bis ins Altertum und den Anfängen des Zählens in der Jungsteinzeit. Mathematik wurde und wird in allen Kulturkreisen praktiziert. Die Titelblätter thematisieren bedeutende Werke der Mathematik sowie herausragende Mathematikerinnen und Mathematiker, die die Entwicklung dieser Disziplin massgeblich beeinflusst haben.

Zu den Inhalten

Die Aufteilung des Stoffes in mehrere Skripte dient der Flexibilität bei der Gestaltung des Unterrichts. Da Mathematik eine stark hierarchische Struktur aufweist, kann der Stoff nicht in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Die Skripte sind in einer möglichen Bearbeitungsreihenfolge angeordnet. Im Folgenden wird kurz angegeben, welches Vorwissen für jede Einheit notwendig ist.

Grundoperationen

Behandelter Stoff

Im ersten Skript zu den komplexen Zahlen werden sowohl imaginäre als auch komplexe Zahlen eingeführt und in der Normal- und Polarform dargestellt. Es wird ausführlich auf die Rechenregeln für komplexe Zahlen eingegangen, einschliesslich Termumformungen für Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Potenzen (unter Anwendung des Satzes von de Moivre). Des Weiteren werden Gleichungen und Gleichungssysteme unter Verwendung in der Menge der komplexen Zahlen gelöst. Die Zahlen werden in der Gauss'schen Zahlenebene dargestellt. Schliesslich werden der Fundamentalsatz der Algebra und die cardanischen Formeln eingehend erörtert.

Notwendiges Vorwissen

Solide Kenntnisse in Arithmetik und Algebra, einschließlich der Fähigkeit zur Lösung von Gleichungen und zur Umformung von Termen, sind erforderlich. Darüber hinaus ist eine Beherrschung trigonometrischer Funktionen notwendig.

Die Euler'sche Formel

Behandelter Stoff

In diesem Skript wird die Euler'sche Formel auf verschiedene Arten hergeleitet. Anschließend wird sie zur Vereinfachung von Ausdrücken sowie zum Führen von Beweisen, insbesondere im Kontext von Additionstheoremen und Regelungen, angewandt.

Notwendiges Vorwissen

Die Schülerinnen und Schüler sollten bereits mit dem Umgang von komplexen Zahlen vertraut sein, einschließlich der Rechenregeln und der Darstellung in Polar- und Normalform. Darüber hinaus müssen sie Funktionen ableiten können und mit Taylor-Reihen vertraut sein. Für bestimmte Aufgaben wird vorausgesetzt, dass den Schülerinnen und Schülern die Additionstheoreme bekannt sind.

Chaos und Fraktale

Behandelter Stoff

Im ersten Teil wird die fraktale Geometrie eingeführt, einschliesslich ihrer Eigenschaften sowie der Begriffe der Selbstähnlichkeit und der Selbstähnlichkeitsdimension. Im zweiten Teil werden anhand von reellen quadratischen Iterationen die Konzepte des Fixpunktes, des Vorfixpunktes, der Scheidepunkte und der Attraktoren erläutert. Dieses Verständnis wird anschliessend auf komplexe quadratische Iterationen angewendet. Zusätzlich wird das diskrete logistische Wachstum detailliert diskutiert.

Notwendiges Vorwissen

Der sichere Umgang mit komplexen Zahlen, sowohl in Normal- als auch in Exponentialform, wird vorausgesetzt. Ein gewisses Verständnis der Eigenschaften von Folgen ist von Vorteil. Darüber hinaus sollte die Definition des Logarithmus bekannt sein.

Komplexe Abbildungen

Behandelter Stoff

Affine Abbildungen und die Möbius-Transformationen werden im Detail diskutiert. Dabei werden geometrische Objekte wie Punkte, Geraden und Kreise in der Gauss'schen Zahlenebene dargestellt und ihre Bilder berechnet.

Notwendiges Vorwissen

Der sichere Umgang mit komplexen Zahlen, sowohl in Normal- als auch in Exponentialform, wird vorausgesetzt.

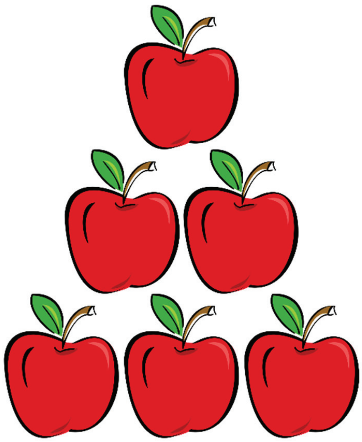
Komplexe Zahlen

Grundoperationen

Mathematik in der Kunst: Albrecht Dürers Kupferstich *Melencolia I* aus dem Jahr 1514 enthält verschiedene mathematische Elemente, darunter einen Zirkel für die geometrischen Aspekte, ein magisches Quadrat und ein abgestumpftes Rhomboeder. Die Idee des Messens wird durch die Verwendung einer Waage und einer Sanduhr symbolisiert.

1. Zahlenmengen

Die natürlichen Zahlen



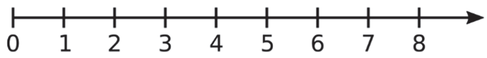
Die natürlichen Zahlen sind die beim Zählen verwendeten Zahlen: ein Apfel, zwei Äpfel, drei Äpfel, …

Wir schreiben für die natürlichen Zahlen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Wir erweitern die Menge der natürlichen Zahlen häufig mit der Zahl Null und schreiben dann:

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$



Peano[1] definierte 1889 die natürlichen Zahlen durch die folgenden Axiome[2]:

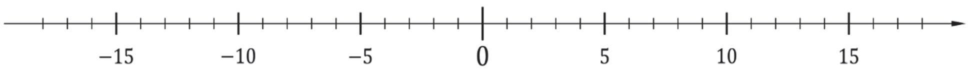
- 1 ist eine natürliche Zahl.
- Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n′ als Nachfolger.
- 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
- Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
- Induktionsaxiom: Enthält die Menge X die Zahl 1 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n′, so sind alle natürlichen Zahlen in X enthalten ($\mathbb{N} \subset X$).

Ganze Zahlen

Für lange Zeit wurden Probleme, die eine negative Zahl ergeben hätten, als unlösbar betrachtet. Negative Zahlen können in der Natur nicht gefunden werden – es gibt keine ‚minus fünf Äpfel'. Der griechische Mathematiker Diophant sagt in seinem Werk, dass die Gleichung $4x + 20 = 0$ absurd sei. Obwohl in Arabien, China und Indien schon lange bekannt, brauchte es sehr lange, bis die Vorstellung von negativen Zahlen auf Europa drang. Fibonacci erlaubte in seiner Finanzmathematik negative Zahlen und interpretierte sie als Schulden.

Wir möchten die diophantische Gleichung $4x + 20 = 0$ lösen. Wir finden $x = -5$
Dazu müssen wir die natürlichen Zahlen um die negativen Zahlen erweitern. Wir schreiben:

$\mathbb{Z} = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$



---

1 Giuseppe Peano (* 1858 im Piemont; † 1932 in Turin) war ein italienischer Mathematiker. Er befasste sich mit mathematischer Logik, mit der Axiomatik der natürlichen Zahlen und mit Differentialgleichungen erster Ordnung.

2 Ein Axiom ist ein (Grund-)satz in einer Theorie, der innerhalb dieser Theorie nicht begründet oder abgeleitet wird.

Die rationalen Zahlen

Auch in den ganzen Zahlen ist es nicht möglich, die Gleichung $2x - 9 = 0$ zu lösen. Damit dies möglich wird, führen wir eine neue Menge ein, die Menge aller Brüche – die rationalen Zahlen. Wir schreiben für die Lösung der obigen Gleichung $x = 9/2$.

$\mathbb{Q} = \{\ldots, 2/3, 4/5, -1/7, 0, 5, -3 \ldots\}$

Die Brüche liegen sehr dicht beieinander. Zwischen zwei Brüchen a und b lässt sich immer ein weiterer Bruch einfügen, denn $\frac{a+b}{2}$ ist sicher zwischen a und b und ist ebenfalls ein Bruch.

Die reellen Zahlen

Aufgabe 1: Bei einem rechtwinkligen Dreieck haben beide Katheten eine Länge von 1 m. Wie lang ist die Hypotenuse? Ist diese Zahl eine rationale Zahl?

Satz: $\sqrt{2}$ ist kein Bruch aus ganzen Zahlen, d.h. $\sqrt{2}$ ist irrational $\left(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}\right)$

Beweis durch Gegenannahme: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\sqrt{2}$ lässt sich also als Bruch darstellen

$\sqrt{2} = p/q$, wobei der Bruch vollständig gekürzt ist.

$\sqrt{2} \cdot q = p \quad |^2$

$\underbrace{2q^2}_{\text{gerade}} \Rightarrow \underbrace{p^2}_{\text{gerade}}$ $2q^2$ ist gerade $\Rightarrow p^2$ gerade

$\Rightarrow p$ gerade und wir schreiben $p = 2 \cdot r$

$2q^2 = (2r)^2 = 4r^2 \quad |:2$

$\underbrace{q^2}_{\text{gerade}} \Leftarrow \underbrace{2r^2}_{\text{gerade}}$ $2r^2$ ist gerade $\Rightarrow q^2$ gerade

$\Rightarrow q$ gerade

$\Rightarrow$ p und q sind gerade

$\Rightarrow$ p/q kann mit 2 gekürzt werden.

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Gegenannahme

$\Rightarrow$ Die Gegenannahme ist falsch

$\Rightarrow$ Die Annahme ist richtig. $\square$.

Aufgabe 2: Beweise: $\sqrt{5}$ ist keine rationale Zahl.