Mathematik-Abitur
Band 3

Stochastik
Wahrscheinlichkeitsrechnung & Statistik

zur
Abiturvorbereitung
und zum
Selbststudium

von
Reinhold Goldmann

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen

Aufgaben zur Stochastik sind Inhalte der Abiturprüfung. Mit diesem Buch versucht der Autor die wichtigsten Themenbereiche der Stochastik anschaulich und möglichst übersichtlich darzustellen. Während vieler Jahre der Vermittlung mathematischer Themen an Lernende verschiedenster Altersgruppen gab es ab und zu Verständnisschwierigkeiten, die einem Lehrenden oft nicht mehr bewusst sind. Manchmal wird ein Lehrer aber auch durch aufmerksame Zuhörer auf einfachere Lösungswege hingewiesen, die das Verstehen mathematischer Zusammenhänge durchaus erleichtern können. Einige dieser Hinweise wurden in den Unterricht und damit auch in dieses Werk übernommen.
In der Mathematik können die unterschiedlichsten Wege zum Ziel führen. Deshalb ist ein verständnisvoller Lehrender stets bemüht, die sinnvollsten und einfachsten Lösungswege zu vermitteln. In dieser vorliegenden Zusammenfassung des Lehrstoffs der mathematischen Oberstufe wird daher versucht, die wichtigsten Abiturthemen möglichst verständlich und ohne komplizierte Umwege darzulegen.
Die in diesem Buch gestellten Aufgaben sollten von den Lesern selbstständig zu lösen versucht werden und erst anschließend mit dem Lösungsanhang überprüft werden. Mathematik lernt man am ehesten durch eigenes Erarbeiten. Es kann manchmal auch sinnvoll sein, einen nicht verstandenen Lösungsweg erst nach einiger Zeit nachzuvollziehen. „Manches erledigt sich durch Warten“. Dies ist im täglichen Leben, wie in der Mathematik ein hilfreiches Mittel, um Frust zu vermeiden. Anschließend

sollte man sich allerdings seiner Fehler bewusst werden, um diese künftig zu vermeiden.
Viele wichtige Mathematiker und andere heute angesehene Wissenschaftler sind durchaus Irrtümern aufgesessen, die sie erst später oder auch niemals berichtigen konnten. Was heute als selbstverständlich gelehrt wird und einem Lernenden so großartig und manchmal schwierig erscheint, konnte teilweise erst nach vielen Jahren, Jahrzehnten oder gar Jahrhunderten geklärt werden. Dazu gehören Fragen zur „Quadratur des Kreises“ aus dem Altertum, das „Vierfarben-Problem“, welches erst im 21. Jahrhundert mithilfe von elektronischen Rechnern gelöst werden konnte, die „Goldbachsche Vermutung”, die besagt, dass jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden kann (z. B. 18 = 11 + 7) und viele weitere noch ungelöste Fragestellungen. Gerade am Anfang der Wahrscheinlichkeitsrechnung waren manche Überlegungen, eigentlich sehr fähiger Mathematiker, mit Fehlern behaftet.
Obwohl die Mathematik für die Lösung vieler wissenschaftlicher, technischer oder wirtschaftlicher Probleme unerlässlich ist, kann nicht jede Fragestellung einer Lösung zugeführt werden. Die Erkenntnis und der anschließende mathematische Beweis der Unlösbarkeit einer Aufgabenstellung gehört zum Wesen der Mathematik. Man sollte sich daher niemals durch Aufgabenstellungen jeglicher Art entmutigen lassen, sondern versuchen alternative Lösungswege zu finden.
Das vorliegende Lehrbuch eignet sich nicht nur für die Vorbereitung der Abiturprüfung, sondern auch für Personen, die sich in die höhere Mathematik einarbeiten möchten.

I. Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Anfänge der Stochastik

Der Spieler Chevalier de Méré fragte im 17. Jahrhundert den Mathematiker Blaise Pascal, der von 1623 bis 1662 lebte, nach der Wahrscheinlichkeit einer Doppel-Sechs beim Werfen zweier Würfel.
Pascal war diese Frage zu simpel (siehe Beispiel B2).

Die zweite Frage bezog sich darauf, wie der Wetteinsatz zu verteilen sei, wenn ein Spiel vorzeitig abgebrochen werden muss.

Daraus entwickelte Pascal mit Pierre de Fermat die Wahrscheinlichkeitstheorie.

Kurze **Beispiele** zu den Fragen von de Méré:

B1. Wirft man einen Laplace-Würfel (idealer Würfel), so ist die Wahrscheinlichkeit eine Sechs zu würfeln $\mathbf{\frac{1}{6}}$.

B2. Werden gleichzeitig zwei ideale Spielwürfel geworfen, so ist die Wahrscheinlichkeit eine Doppelsechs zu würfeln $\mathbf{\frac{1}{36}}$ $\left(= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right)$.

B3. **Paradoxon** von Chevalier de Meré:

Wird **ein** Laplace-Würfel **viermal** geworfen, so liegt die Wahrscheinlichkeit dafür, **mindestens eine Sechs** zu würfeln **über** 50 %.

P(mindestens eine Sechs) = 1 – P(keine Sechs) =
= 1 - $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}5177 \approx \mathbf{51{,}77}$ %

Wirft man **zwei** Laplace-Würfel **24-mal** so liegt die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens einmal eine **Doppelsechs** zu würfeln **unter** 50 %:

P(mindestens eine Doppelsechs) =
= 1 – P(keine Doppelsechs) = 1 – $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx$
$\approx 0{,}4914 \approx \mathbf{49{,}14}$ %

Das Paradoxon entsteht, weil sich die Ergebnisse nicht proportional wie 4 **:** 6 = 24 **:** 36 verhalten.
Im Beispiel B3 verhalten sich die Potenzen $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}48$ und $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}51$ aus exponentiellen Gründen ungefähr wie **48 : 51** und entsprechen damit nicht dem Verhältnis 4 : 6 = **48 : 72**.

Dem Spieler Chevalier de Méré war dies unverständlich.

Hinweis:
Im Folgenden wird als Symbol für Wahrscheinlichkeit der Buchstabe P (engl. Probability bzw. lat. Probabilitas) verwendet.

2. Grundbegriffe der Stochastik

2.1 Zufallsexperimente

Experimente sind Vorgänge, die unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar sind:

Die einmalige Durchführung eines Experiments wird **Versuch** genannt.

Beispiele:

B4. Unter einem Druck von 1013 hPa siedet Wasser bei 100°C:

Eindeutiges Ergebnis.

B5. Ein Spielwürfel kann auf zufällige Weise sechs verschiedene Ergebnisse liefern:

Zufallsexperiment.

2.2 Ergebnisraum (Ergebnismenge)

Die Werte aller möglichen Ergebnisse eines Experiments bilden den Ergebnisraum.

Beispiel:

B6. Werfen dreier Würfel

Ergebnisse:

111, 112, …, 116
121, 122, …, 126
↓
161, 162, …, 166
↓
211, 212, …, 216
↓
661, 662, …, 666

Ergebnisraum $\boldsymbol{\Omega} = \{111, 112, \ldots, 666\}$

2.3 Die Mächtigkeit der Ergebnismenge

Die Anzahl aller Elemente eines Ergebnisraums heißt Mächtigkeit.

Beispiele:

B7. Welche Mächtigkeit hat der Ergebnisraums
$\Omega = \{111, 112, \ldots, 666\}$ aus Beispiel B6 ?

$|\boldsymbol{\Omega}| = 6^3 = \mathbf{216}$ **Elemente** (Ergebnisse)

B8. Wie viele Ereignisse ergeben beim Werfen von **drei** Spielwürfeln die **Augensumme 10** ?

E = {136, 145, 154, 163, 226, 235, 244, 253, 262, 316, 325, 334, 343, 352, 361, 415, 424, 433, 442, 451, 514, 523, 532, 541, 613, 622, 631}

|E| = 27 Ergebnisse

Beachte:
Wie im Beispiel B8 gezeigt, lassen sich überschaubare Mächtigkeiten durch „Abzählen" bestimmen.
Im weiteren Verlauf dieser Abhandlung werden Formeln für das Bestimmen umfangreicherer Ergebnismengen entwickelt.

2.4 Ereignisse

Jede **Teilmenge** des Ergebnisraums heißt **Ereignis**.

Die leere Menge **{ }** heißt **unmögliches** Ereignis.

Die Ergebnismenge **Ω** heißt **sicheres** Ereignis.

Beispiele:

B9. Das Werfen einer 7 mit einem üblichen Spielwürfel ist ein unmögliches Ereignis $\{\ \} \subset \Omega$.

B10. Das Werfen einer ungeraden Zahl ergibt das Ereignis $U = \{1, 3, 5\} \subset \Omega$

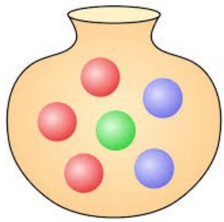
3. Das Urnenmodell

3.1 Ziehen mit Zurücklegen

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann es nützlich sein, sich Experimente als Ziehen von Kugeln aus einer „Urne" vorzustellen. Legt man nach jedem Zug die Kugel wieder in die Urne zurück, so ergeben sich immer wieder die gleichen Verhältnisse, wie vor dem Ziehen.

Beispiel:

B11. Aus einer Urne, die drei rote, zwei blaue und eine grüne Kugel enthält, werden **drei** Kugeln **mit** Zurücklegen gezogen:



E = {rrr, rrb, rbr, rrg, rgr, rbb, rbg, rgb, rgg, bbb,
bbr, bbg, brb, bgb, brr, bgg. brg, bgr, ggg,
ggr, ggb, grg, gbg, gbb, grr, grb, gbr}

$|E| = 3^3 = 27$ mögliche Ergebnisse

Jede Farbe kann wieder neu gezogen werden.

3.2 Ziehen ohne Zurücklegen

Wird die gezogene Kugel nicht wieder in die Urne zurückgelegt, so hat sich vor dem nächsten Zug der Inhalt der Urne verändert.

Beispiele:

B.12 Aus der oben abgebildeten Urne des Beispiels B11 werden **drei** Kugeln **ohne** Zurücklegen gezogen:

E = {rrr, rrb, rbr, rrg, rgr, rbb, rbg, rgb, bbr, bbg, brb, bgb, brr, brg, bgr, gbb, grr, grb, gbr}

|E| = 19 mögliche Ergebnisse

Ohne Zurükclegen kann beispielsweise die grüne Kugel höchstens einmal gezogen werden.

B13. In einer Urne befinden sich **26** Kugeln. Es soll insgesamt **viermal** gezogen werden, wobei jede gezogene Kugel stets wieder in dir Urne zurückgelegt wird.
Wie viele Möglichkeiten der Entnahme gibt es?

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^4 = 456.976$ Möglichkeiten.

B14. In einer Urne befinden sich **fünf** Kugeln. **Alle** Kugeln werden **ohne** Zurücklegen gezogen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Ziehung?

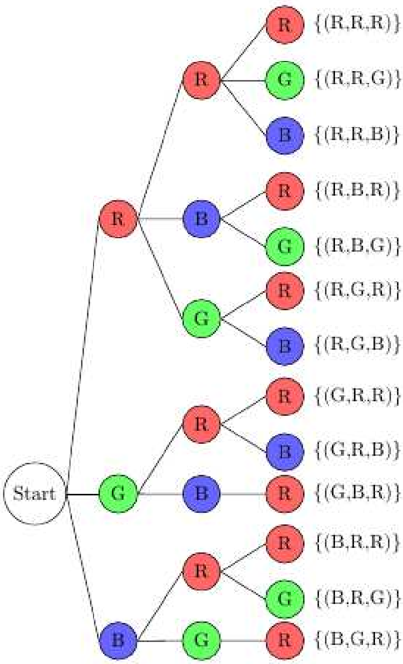
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten

4. Baumdiagramme:

Mit einem Baumdiagramm kann die Reihenfolge der Ereignisse manchmal leichter bestimmt werden.

Beispiel:

B15. Welche Kugeln waren für die Ziehung **ohne** Zurücklegen in der Urne vorhanden, die zu dem abgebildeten Baumdiagramm führten?



Drei rote Kugeln sowie **eine grüne** und **eine blaue** Kugel lagen vor.

Nachdem eine blaue oder eine grüne Kugel gezogen wurde, waren diese nicht mehr in der Urne vorhanden.

Beispielsweise: rbr, rbg, rgr, rgb aber nicht mehr rbb oder rgg,

Baumdiagramme sind insbesondere bei **mehrstufigen Zufallsexperimenten** nützlich.

Aufgaben (Lösungen aller Aufgaben ab Seite 144):

A1. In einer Tüte befinden sich sieben Bonbons. Davon sind zwei gelb und fünf rot. Nacheinander werde der Tüte drei Bonbons entnommen (ohne Zurücklegen).

a) Skizziere ein Baumdiagramm.

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, der Tüte Bonbons zu entnehmen?

A2. Der Schülerrat eines Berufskollegs besteht aus drei Jungen und zwei Mädchen. Es wird ausgelost, wer in diesem Jahr Vorsitzender und Stellvertreter wird.
Zuerst wird der Vorsitzende und dann ein Stellvertreter ausgelost.
Zeichne das Baumdiagramm und gib die Ergebnismenge mit deren Mächtigkeit an.

A3. Es wird ein idealer Würfel geworfen. Werden die Augenzahlen **1, 2, 4 oder 5** gewürfelt, so wird danach eine **Münze geworfen**.
Wird eine **3** gewürfelt, so muss aus einer Urne, die drei mit **1, 2 und 3** nummerierte **Kugeln** enthält, **zweimal hintereinander** (ohne Zurücklegen) eine Kugel gezogen werden.
Bei **Ziehen einer 6** ist das Experiment **beendet**.

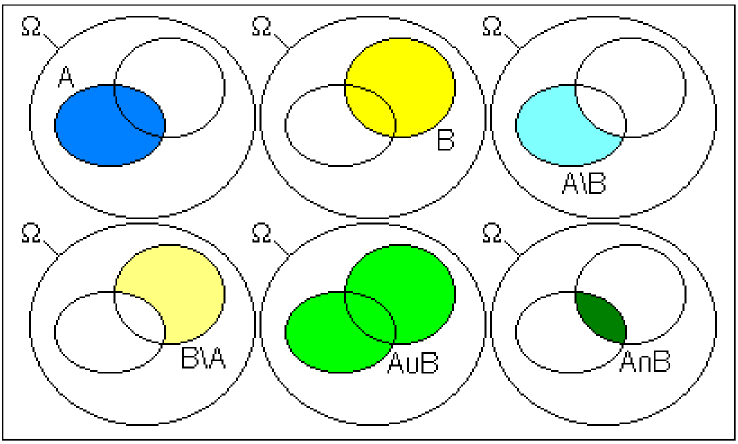
Skizziere das Baumdiagramm und gib den Ergebnisraum Ω mit seiner Mächtigkeit an.

5. Zusammengesetzte Ereignisse

Beispiel:

B16. Gegeben sind die Mengen A = {2, 4, 6} und
B = {4, 5, 6}

$A \setminus B = \{2\}$	A „ohne“ B (Differenzmenge)
$B \setminus A = \{5\}$	B „ohne“ A (Differenzmenge)
$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$	A „oder“ B (Vereinigungsmenge)
$A \cap B = \{4, 6\}$	A „und“ B (Schnittmenge)



Gegenereignis: $\bar{E} = \Omega \setminus E$

Weitere Beispiele:

B17. Ein Spielwürfel wird **zweimal** geworfen.
Welche Augenzahlensummen können auftreten?

$\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

Ereignis A: „Die Augensumme beträgt 10“
$A = \{10\}$

Bestimme das Gegenereignis $\overline{A}$.
$\overline{A} = \{2,3,4,5,6,7,8,9,11,12\}$

B18. Ein Würfel wird **einmal** geworfen.

$\Omega =\{1,2,3,4,5,6\}$

A: „Augenzahl ist größer als 2“
$\Rightarrow \; A = \{3,4,5,6\}$

B: „Augenzahl ist ungerade“
$\Rightarrow \; B = \{1,3,5\}$

C: „Augenzahl ist größer als 2 **und** ungerade“
$\Rightarrow \; C = A \cap B = \{3, 5\}$

D: „Augenzahl ist größer als 2 **oder** ungerade“
$\Rightarrow \; D = A \cup B = \{1. 3, 4, 5, 6\}$

B19. Eine Urne enthält zwei rote und drei schwarze Kugeln. Es werden nacheinander drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Ω ={rrs, rsr. srr, sss, ssr, srs, rss}

A: „die ersten beiden gezogenen Kugeln haben die gleiche Farbe“
A = {rrs, sss, ssr}

$\overline{A}$: Gegenereignis von A
$\overline{A} = \Omega \setminus A$ = { rsr, srr, srs, rss}

B: „die erste und die zuletzt gezogene Kugel haben verschiedene Farben“
B = {rrs, srr, ssr, rss}

C: „spätestens nach dem dritten Zug sind alle roten Kugeln gezogen worden“
C = {rrs, rsr, srr}

D: „nach dem zweiten Zug ist noch eine rote Kugel in der Urne“
D = {sss, ssr, srs, rss}

Aufgaben:

A4. Aus einer Produktion von Prozessoren werden ohne Zurücklegen drei Stücke entnommen und registriert, ob der Prozessor defekt „0“ oder in Ordnung „1“ ist.

a) Skizziere ein Baumdiagramm.

b) Gib folgende Ereignisse an.

A: „der erste Prozessor ist defekt“
B: „alle Prozessoren sind in Ordnung“
C: „nicht alle Prozessoren sind in Ordnung“
D: „mindestens zwei Prozessoren sind in Ordnung“
E: „höchstens zwei sind defekt“
F: „weder der erste noch der dritte Prozessor sind defekt“
G: „entweder der erste oder der dritte Prozessor ist defekt“

A5. Gib die zusammengesetzten Ereignisse $A \cap D$ und $A \cup F$ der Aufgabe A4 an.

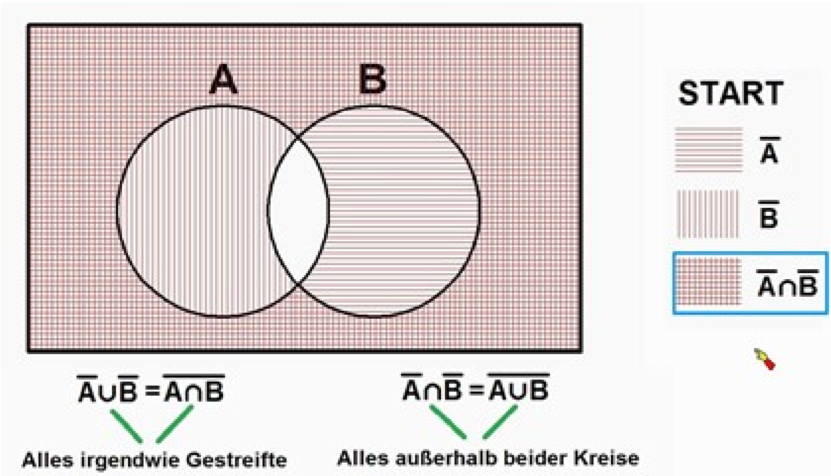
A6. Die Mengen $\Omega = \{1,2,3,\dots,30\}$, $A = \{1,2,3,\dots,20\}$ und $B = \{11,12,13,\dots,30\}$ sind gegeben.
Bilde die folgenden Mengen:

$E = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$F = (A \cap B) \setminus (A \cup B)$

$G = (A \cup B) \setminus \overline{(A \cap B)}$

6. Regeln von De Morgan



Beispiel:

B20. Zeige die Richtigkeit der Regeln von De Morgan
mit den folgenden Mengen:
$\Omega = \{0,1,2,3,\ldots,10\}$
$A = \{1,2,3,4\}$ und $B = \{3,4,5,6\}$

$\overline{A\cap B} = \{\overline{\{3,4\}}\} = \{\mathbf{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10}\}$
$\overline{A}\cup\overline{B} = \{0,5,6,7,8,9,10\}\cup\{0,1,2,7,8,9,10\} =$
$= \{\mathbf{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10}\}$
$\Rightarrow\ \mathbf{\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}}$

$\overline{A}\cap\overline{B} = \{0,5,6,7,8,9,10\}\cap\{0,1,2,7,8,9,10\} =$
$= \{\mathbf{0, 7, 8, 9, 10}\}$
$\overline{A\cup B} = \{\overline{\{1,2,3,4,5,6\}}\} = \{\mathbf{0, 7, 8, 9, 10}\}$
$\Rightarrow\ \mathbf{\overline{A}\cap\overline{B} = \overline{A\cup B}}$