

Skripte zur Mathematik

Funktionen

von

Christian Wyss

Skripte zur Mathematik

Funktionen

von

Christian Wyss



mathema



© 2023 Dr. Christian Wyss

Verlagslabel: mathema (www.mathema.ch)

ISBN Paperback: 978-3-384-12390-9

Hardcover: 978-3-384-12391-6

Auflage 2.0

Druck und Distribution im Auftrag des Autors:

tredition GmbH, Heinz-Beusen-Stieg 5, 22926 Ahrensburg, Germany

Das Werk, einschliesslich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Für die Inhalte ist der Autor verantwortlich. Jede Verwertung ist ohne seine Zustimmung unzulässig. Die automatisierte Analyse des Werkes, um daraus Informationen, insbesondere über Muster, Trends und Korrelationen gemäss §44b UrhG („Text und Data Mining“) zu gewinnen, ist untersagt. Die Quellen der Bilder und deren Lizenzen sind im Anhang aufgeführt. Die Publikation und Verbreitung erfolgen im Auftrag des Autors, zu erreichen unter:

Dr. Christian Wyss, Chemin du Clos 60, 2502 Biel-Bienne, Schweiz.

Die Philosophie steht in diesem grossen Buch geschrieben, das unserem Blick ständig offen liegt – ich meine das Universum –; aber das Buch ist nicht zu verstehen, wenn man nicht zuvor die Sprache erlernt und sich mit den Buchstaben vertraut gemacht hat, in denen es geschrieben ist. Es ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, und deren Buchstaben sind Kreise, Dreiecke und andere geometrische Figuren, ohne die es dem Menschen unmöglich ist, ein einziges Bild davon zu verstehen; ohne diese irrt man in einem dunklen Labyrinth herum.

Galileo Galilei: „*Il Saggiatore*“ (1623)

Inhaltsverzeichnis

Einleitende Worte

- I. Einführung
- II. Lineare Funktionen
- III. Gleichungssysteme
- IV. Quadratische Funktionen
- V. Grundbegriffe
- VI. Rationale Funktionen
- VII. Potenzfunktionen
- VIII. Exponentialfunktionen
- IX. Trigonometrische Funktionen
- X. Lineare Optimierung
- XI. Ungleichungen
- XII. Zusammenfassung

Schlussbemerkungen

Einleitende Worte

Diese Skripte zur Mathematik sind im Rahmen des Gymnasialunterrichts entstanden. Sie können als eigenständiges Lern- und Übungsmaterial eingesetzt werden. Sie sind jedoch primär als **unterrichts-begleitendes Material** konzipiert. Eine Einführung und Anleitung durch eine Lehrperson wird daher empfohlen.

Die Skripte enthalten **Lückentexte**. Sie dienen der Festigung des erworbenen Wissens und sollten im Plenum mit der gesamten Klasse ausgefüllt werden. Diese handschriftlichen Einträge helfen, die Schlüsselbegriffe und Aussagen zu verinnerlichen und Herleitungen und Beweise besser nachzuvollziehen.

Zu den Übungen

Um den Stoff zu vertiefen und zu festigen, halte ich es für unerlässlich, dass die Schülerinnen und Schüler eine Vielzahl von Übungen lösen. Die Skripte enthalten daher viele Übungen, die nicht nur das Erlernte festigen, sondern auch inner- und aussermathematische Anwendungen aufzeigen. Einige Übungen sind bewusst anspruchsvoller gestaltet und gehen über den üblichen Lehrstoff hinaus, können jedoch bei Bedarf übersprungen werden. Ein Stern ★ markiert, dass es sich bei der Aufgabe um eine zusätzliche Übung handelt, die über den obligatorischen Lernstoff hinausgeht. Im Folgenden werden die unterschiedlichen Übungstypen kurz erläutert.

Einstiegsbeispiel

Ein Einführungsbeispiel stellt eine Aufgabe dar, die eine neu einzuführende Thematik exemplarisch vorstellt. Diese Aufgabe soll die grundlegenden Begriffe der neuen Thematik vorwegnehmen und damit einführen. Dabei darf die Aufgabe einen gewissen Anspruch haben. Ein gemeinsames Lösen dieser Aufgaben im Plenum oder eine detaillierte Besprechung empfiehlt sich, um das Verständnis zu fördern.

Grundaufgaben

Eine Grundaufgabe ist eine Übungsaufgabe, die von den Schülerinnen und Schülern routiniert und sicher gelöst werden sollte. Durch die Bearbeitung mehrerer dieser Aufgaben sollen die Lernenden die Struktur verstehen und sich mit dem Lösungsweg vertraut machen, um ihn anschliessend situationsbezogen bei weiterführenden Aufgaben anwenden zu können.

Erarbeitungsaufgaben

Erarbeitungsaufgaben sind konzipiert, um den Lernstoff zu entwickeln und die Schülerinnen und Schüler konstruktivistisch an die neue Theorie heranzuführen.

Anwendungsaufgaben

Das erworbene theoretische Wissen hat in der Regel sowohl inner- als auch aussermathematische Anwendungen. Anwendungsaufgaben sollen die Fähigkeit zur Mathematisierung fördern und die Anwendbarkeit des Gelernten verdeutlichen.

Beweisaufgaben

In Beweisaufgaben lernen die Schülerinnen und Schüler, selbstständig einfache Beweise zu führen.

Zu den Titelbildern

Die Titelblätter bieten die Möglichkeit, verschiedene Aspekte der Mathematik mit den Schülerinnen und Schülern zu thematisieren. Dies umfasst insbesondere folgende Bereiche:

Mathematik und Ästhetik

Mathematik und Kunst stehen auf vielfältige Weise in Beziehung. Ihre Verbindung zeigt sich in Musik, Malerei, Architektur, Skulptur und Textilgestaltung etc. Die Titelblätter zielen darauf ab, die Schönheit der Mathematik anhand der bildenden Kunst aufzuzeigen.

Rechenhilfsmittel

„Es ist unwürdig, die Zeit von hervorragenden Leuten mit knechtischen Rechenarbeiten zu verschwenden, weil bei Einsatz einer Maschine auch der Einfältigste die Ergebnisse sicher hinschreiben kann.“ G. W. Leibniz (1673).

Der Mensch hat bereits in der Frühzeit Rechenhilfsmittel entwickelt, angefangen vom Kerbholz über mechanische Rechenmaschinen bis hin zu analogen und digitalen Computern. Die Titelblätter illustrieren diese Entwicklung.

Geschichte der Mathematik

Die Geschichte der Mathematik reicht zurück bis ins Altertum und den Anfängen des Zählens in der Jungsteinzeit. Mathematik wurde und wird in allen Kulturkreisen praktiziert. Die Titelblätter thematisieren bedeutende Werke der Mathematik sowie herausragende Mathematikerinnen und Mathematiker, die die Entwicklung dieser Disziplin massgeblich beeinflusst haben.

Zu den Inhalten

Allgemeines

Behandelter Stoff

In den vorliegenden Skripten werden die grundlegenden Begriffe der Funktionenlehre behandelt, darunter Funktion, Definitionsmenge, Wertemenge, Graph, Nullstelle, Umkehrfunktion und Verkettung von Funktionen. Die wichtigsten Funktionstypen werden im Detail diskutiert. Zudem werden die grundlegenden Begriffe in Hinblick auf die Analysis eingeführt (Nullstellen, Polstellen, Asymptoten, Extremalstellen etc.). Die Skripte legen nebst der namensgebenden Thematik jeweils zudem Gewicht auf bestimmte Nebenaspekte der Funktionenlehre.

Notwendiges Vorwissen

Die Aufteilung des Stoffes in mehrere Skripte dient der Flexibilität bei der Gestaltung des Unterrichts. Da Mathematik eine stark hierarchische Struktur aufweist, kann der Stoff nicht in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Die Skripte sind in einer möglichen Bearbeitungsreihenfolge angeordnet. Im Folgenden wird kurz angegeben, welches Vorwissen für jede Einheit notwendig ist.

Einführung

Behandelter Stoff

In diesem Dokument werden die Darstellungsarten von Funktionen (Funktionsgleichung, Tabelle, Funktionsgraph) – eher intuitiv und mit wenig mathematischer Strenge – eingeführt. Zusätzlich werden die Proportionalität und die inverse Proportionalität vorgestellt.

Notwendiges Vorwissen

Es werden keine Vorkenntnisse aus dem gymnasialen Curriculum vorausgesetzt.

Lineare Funktionen

Behandelter Stoff

In diesem Skript werden die lineare Funktion sowie die Konzepte der Steigung und des y-Achsenabschnitts eingeführt. Auch werden ein erstes Mal Punkte auf Graphen und Schnittstellen und Nullstellen von Funktionen berechnet.

Notwendiges Vorwissen

Die Schülerinnen und Schüler sollten bereits über ein Verständnis für Funktionen verfügen. Darüber hinaus ist die Fähigkeit, lineare Gleichungen zu lösen, erforderlich.

Gleichungssysteme

Behandelter Stoff

Dieses Skript behandelt hauptsächlich die Lösung von Gleichungssystemen, primär von linearen Gleichungssystemen, jedoch in speziellen Fällen auch von nicht-linearen. Die Mächtigkeit der Lösungsmenge wird graphisch mit Hilfe der dazugehörigen Funktionen interpretiert.

Notwendiges Vorwissen

Die Schülerinnen und Schüler müssen in der Lage sein, lineare Gleichungen zu lösen. Zudem wird der Stoff aus dem Skript zu den linearen Funktionen vorausgesetzt.

Quadratische Funktionen

Behandelter Stoff

Die quadratische Funktion wird detailliert eingeführt und sowohl in der Normalform als auch in der Scheitelform ausführlich erläutert. Hierbei machen die Schülerinnen und Schüler erstmals Bekanntschaft mit einer Funktion, die eine Extremalstelle aufweist. Die Bestimmung der Nullstellen und der Extremalstelle führt sie dazu, quadratische Gleichungen zu lösen. Es erfolgt eine eingehende Betrachtung von quadratischen Gleichungen (einschliesslich Sonderfällen, quadratisches Ergänzen und der Lösungsformel). Zudem werden biquadratische Gleichungen und Wurzelgleichungen behandelt.

Notwendiges Vorwissen

Die Schülerinnen und Schüler müssen in der Lage sein, lineare Gleichungen zu lösen und sicher im Umgang mit Termen sein (insbesondere Faktorisieren und Ausmultiplizieren). Darüber hinaus wird ein gewisses Verständnis der Funktionenlehre vorausgesetzt.

Grundbegriffe

Behandelter Stoff

Die grundlegenden Konzepte der Funktionenlehre, insbesondere Argumente und Funktionswerte, Definitions- und Wertemengen, Punkte auf Funktionsgraphen, Nullstellen und Umkehrfunktionen werden eingeführt. Zudem wird der Umgang mit verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen wie Funktionsgleichungen, Funktionsgraphen, Tabellen und Mengendiagramme erarbeitet.

Notwendiges Vorwissen

Die Schülerinnen und Schüler sollten in der Lage sein, lineare und quadratische Gleichungen zu lösen. Zudem wird die vorgängige Erarbeitung des Skripts *Funktionen: Einführung* empfohlen.

Rationale Funktionen

Behandelter Stoff

Nebst der Repetition der Standardprobleme zu den Funktionen (Punkte auf Funktionsgraphen, Nullstellen, Schnittpunkt von Funktionen) werden im Kontext der rationalen Funktionen die Konzepte der Polstelle (vertikale Asymptote) und des Grenzwerts (horizontale Asymptote) eingeführt.

Notwendiges Vorwissen

Die grundlegenden Begriffe der Funktionenlehre (Funktion, Definitionsmenge, Wertemenge, Graph, Nullstelle) sollten vertraut sein. Zusätzlich wird vorausgesetzt, dass die Schülerinnen und Schüler bereits Kenntnisse über lineare und quadratische Funktionen mitbringen. Ein solides Verständnis der grundlegenden Algebra wird erwartet, insbesondere die Fähigkeit, lineare und quadratische Gleichungen zu lösen.

Potenzfunktionen

Behandelter Stoff

Nebst der Repetition der Standardprobleme zu Funktionen (Funktionswert und Stelle, Punkte auf Funktionen, Nullstellen, Schnittpunkt von Funktionen, Umkehrfunktionen) werden im Kontext der Potenzfunktionen die Konzepte der Symmetrie und der Monotonie eingeführt. Zudem wird der Einfluss von Parametern (verschieben, spiegeln etc.) auf den Funktionsgraphen untersucht.

Notwendiges Vorwissen

Die grundlegenden Begriffe der Funktionenlehre (Funktion, Definitionsmenge, Wertemenge, Graph, Nullstelle, Umkehrfunktion ...) sollten vertraut sein. Zusätzlich wird vorausgesetzt, dass die Schülerinnen und Schüler bereits Kenntnisse über lineare und quadratische Funktionen mitbringen. Ein solides Verständnis der grundlegenden Algebra wird erwartet, insbesondere die Fähigkeit, lineare und quadratische Gleichungen zu lösen. Auch sollten die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, mit ganzen und gebrochenen Exponenten zu rechnen.

Exponentialfunktionen

Behandelter Stoff

Dieses Skript behandelt den Themenbereich der Exponentialfunktionen und des exponentiellen Wachstums. Dabei wird der Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion eingeführt und es werden die logarithmischen Grundgleichungen gelöst. Besonderes Augenmerk liegt auf der Anwendung der Funktionenlehre in Wissenschaft und Technik

Notwendiges Vorwissen

Vorausgesetzt wird ein grundlegendes Verständnis für den Umgang mit ganzzahligen und gebrochenen Exponenten. Zudem müssen die Schülerinnen und Schüler mit den Grundbegriffen der Funktionenlehre vertraut sein (Stelle, Wert, Definitionsmenge, Wertemenge ...).

Trigonometrische Funktionen

Behandelter Stoff

Die Periodizität der trigonometrischen Funktionen wird am Einheitskreis anhand der Reduktionsformeln eingeführt. Der Winkel wird neu im Bogenmass definiert. Die trigonometrischen Funktionen (Sinus, Cosinus und Tangens) werden im Detail diskutiert und die dazugehörigen Grundgleichungen gelöst. Periodische Prozesse werden mit der harmonischen Funktion beschrieben und angewandte Aufgaben dazu gelöst.

Notwendiges Vorwissen

Die Schülerinnen und Schüler müssen bereits mit den Definitionen der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis vertraut sein. Zudem müssen die Schülerinnen und Schüler mit den Grundbegriffen der Funktionenlehre vertraut sein (Stelle, Wert, Definitionsmenge, Wertemenge ...).

Lineare Optimierung

Behandelter Stoff

Es wird ein Beispiel zur Veranschaulichung des Konzepts der linearen Optimierung präsentiert. Im Anschluss werden ähnliche angewandte Aufgaben behandelt und gelöst. Das Lösen solcher Aufgaben vertieft das Verständnis für lineare Funktionen und präsentiert eine interessante Anwendung.

Notwendiges Vorwissen

Die Schülerinnen und Schüler müssen mit linearen Funktionen umgehen können und die Schnittpunkte von linearen Funktionen berechnen zu können.

Ungleichungen

Behandelter Stoff

Dieses Skript vertieft das Verständnis der Funktionenlehre, insbesondere die Begriffe Argument und Funktionswert sowie Schnittstelle und Polstelle werden angewandt. Ein besonderer Schwerpunkt liegt dabei auf der Darstellung von Funktionen durch ihre Graphen.

Notwendiges Vorwissen

Voraussetzung ist die Beherrschung grundlegender Begriffe der Funktionenlehre wie Argument und Funktionswert, sowie der Kenntnisse über Schnittstellen und Polstellen. Um die Schnittstellen zu berechnen, ist es notwendig, dass die Schülerinnen und Schüler verschiedene Gleichungstypen lösen können, darunter lineare, quadratische sowie Gleichungen mit ganzzahligen und gebrochenen Potenzen.

Zusammenfassung

Behandelter Stoff

Dieses Dokument fasst lediglich die Erkenntnisse aus sämtlichen Skripten zur Funktionenlehre zusammen und führt keine neuen Begriffe ein.

Notwendiges Vorwissen

Kenntnisse aus allen vorherigen Skripten zur Funktionenlehre werden vorausgesetzt.

Funktionen Einführung



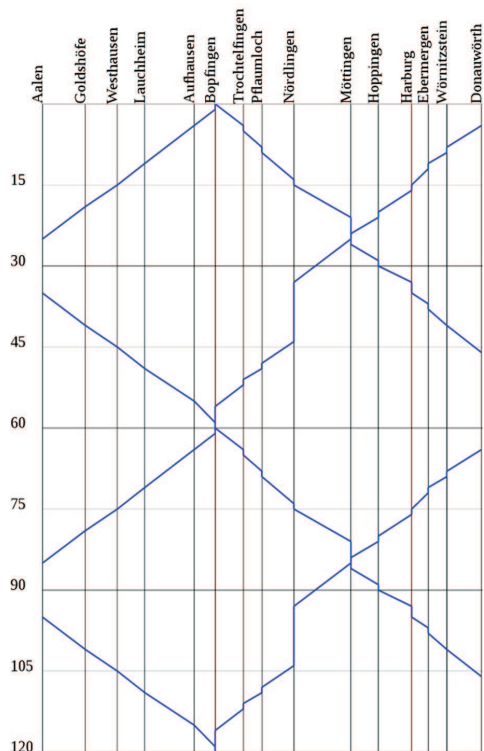
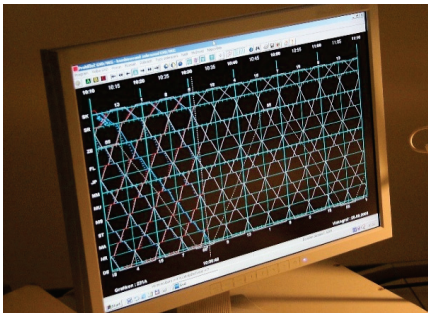
Die Mathematiker begannen sich erst im Spätmittelalter (ca. 1250 bis 1500) für funktionale Zusammenhänge zu interessieren. Den ersten Beleg einer expliziten Definition des Funktionsbegriffs findet man im 14. Jahrhundert. Gelehrte Scholastiker wie William von Ockham und Nicolas Oresme untersuchten Abhängigkeiten von sich ändernden Größen (Temperatur, Bewegung etc.) und stellten sie graphisch durch senkrecht aufeinander stehende Strecken dar. Ihre Forschungszentren waren die zu dieser Zeit entstehenden Universitäten. Auf dem Bild ist das Corpus Christi College in Oxford abgebildet.

1. Eindeutige Zuordnungen

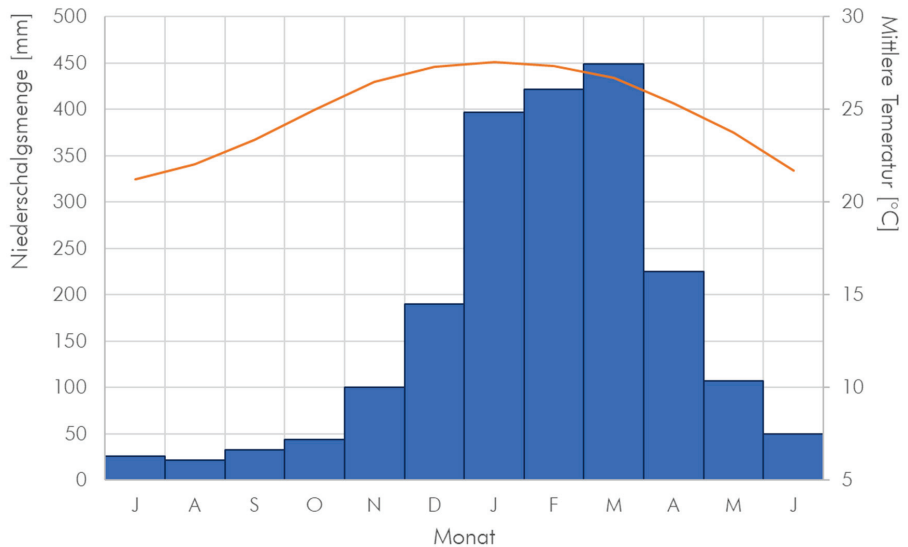
Aufgabe 1: Die Goldpreise in US-Dollar pro Feinunze (31.1 g) sind in einem High-Low-Open-Close-Diagramm dargestellt. Wie viel musste für eine Feinunze im Juni 2003 maximal bezahlt werden? Wie viele Franken kostete im Juni 2003 also ein Kilogramm Gold, wenn ein US-Dollar 1.40 CHF kostete? Was zeigen die Farben Rot und Blau im Diagramm an?



Aufgabe 2: Ein bildlicher Fahrplan visualisiert die Fortbewegung von Verkehrsmitteln, indem er die Zeit gegen den entsprechenden Standort des Fahrzeugs aufträgt. Die vorliegende Graphik zeigt den Fahrplan der Riesbahn von Donauwörth nach Aalen in Minuten nach 12:00 Uhr mittags. Um wie viel Uhr erreicht der Zug Aalen, wenn er um 12:05 Uhr von Donauwörth abfährt? An welcher Haltestelle verweilt der Zug am längsten? Wo kommt es zu Begegnungen mit entgegenkommenden Zügen?



Aufgabe 3: In diesem Diagramm sind Temperatur (Linie) und die Niederschläge (Balken) dargestellt. Welche Temperatur herrscht und wie viel Niederschlag fällt in dieser Stadt im Oktober? Wo könnte diese Stadt liegen?

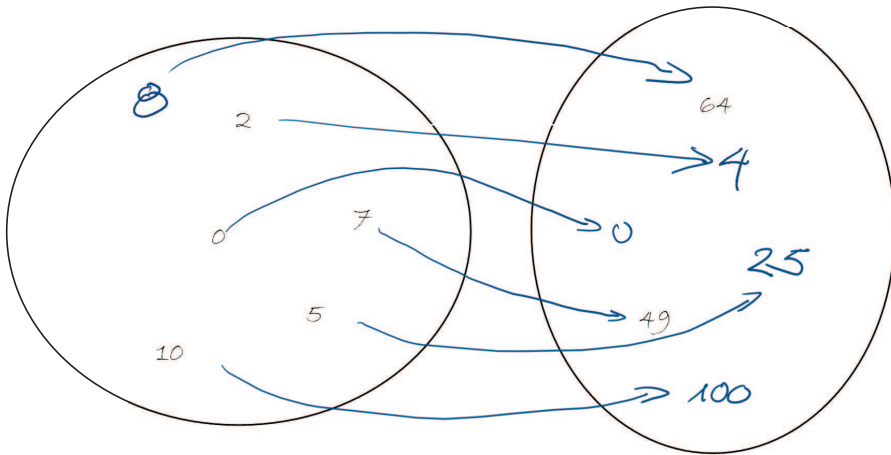


Aufgabe 4: Die Tabelle gibt den jährlichen Energieverbrauch pro Kopf pro Jahr in Kilowattstunden kWh sortiert nach dem Verbrauch dar. Wie viel kWh pro Kopf bezieht jemand in der Schweiz im Vergleich zu einer Person im Niger?

1	Katar	194.222		...	
2	Island	165.871	193	Gambia	931
5	Singapur	147.085	194	Eritrea	914
7	Kuwait	103.883	195	Tansania	907
9	Kanada	102.160	196	Burkina Faso	905
11	Norwegen	96.926	197	Äthiopien	872
13	Saudi-Arabien	87.707	198	Uganda	767
14	Vereinigte Staaten	78.754	199	Südsudan	732
20	Grönland	63.520	200	Guinea-Bissau	677
21	Australien	63.459	201	Afghanistan	677
27	Taiwan	55.607	203	Madagaskar	508
28	Russland	55.459	204	Sierra Leone	493
35	Kasachstan	44.702	205	Ruanda	471
40	Deutschland	40.977	207	Malawi	465
41	Japan	39.985	208	Niger	410
45	Frankreich	36.052	209	Tschad	361
53	Schweiz	33.351	211	Burundi	294
	...		212	Somalia	217

2. Darstellungen von Funktionen

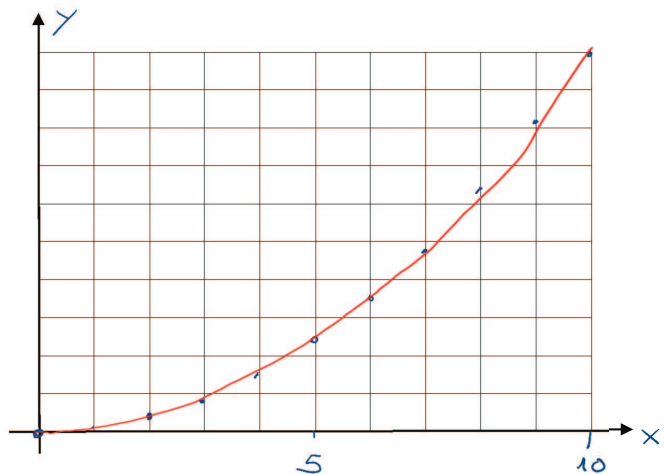
Pfeildiagramm



Wertetabelle

x	y
0	0
2	4
3	9
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

Funktionsgraph



Funktionsgleichung

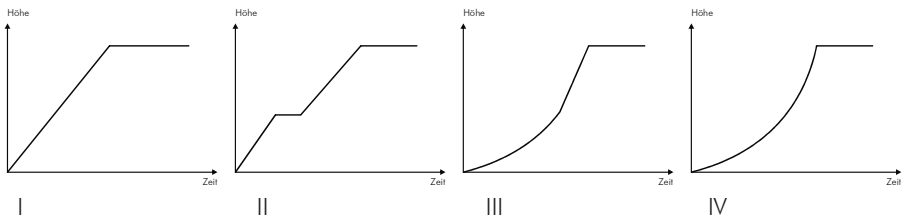
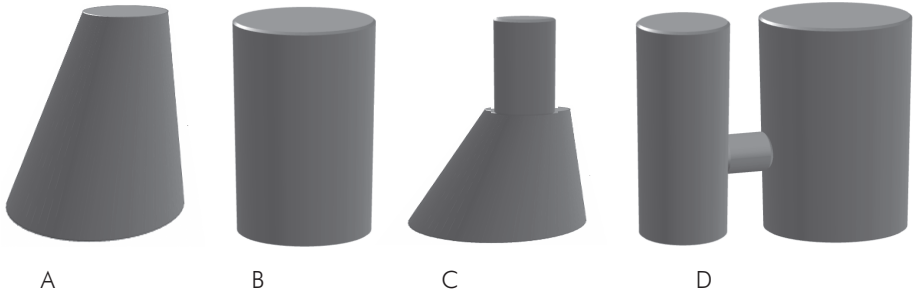
$$y = x^2$$

Beschreibung in Worten

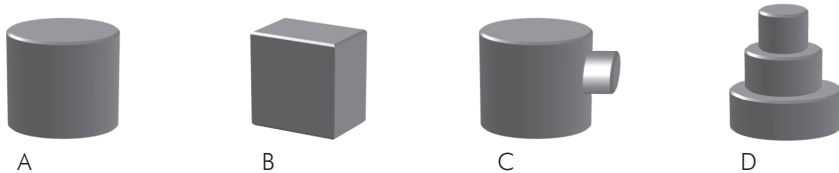
Der Flächeninhalt y eines Quadrats ist gleich der Seitenlänge x hoch zwei.

Aufgabe 5: Die Gefäße werden von oben gleichmäßig mit Wasser gefüllt. Der Wasserspiegel steigt je nach Form des Gefäßes unterschiedlich schnell an.

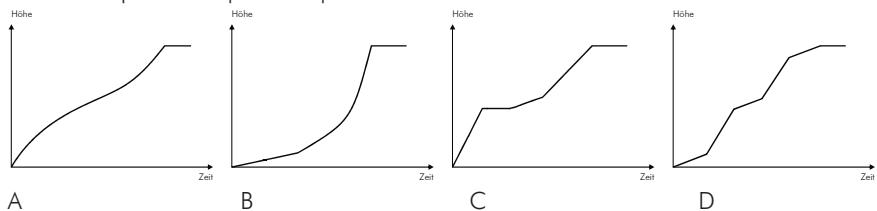
- a) Die Wasserhöhe (vertikale Achse) in den Gefäßen wird in Abhängigkeit der Zeit (horizontale Achse) graphisch dargestellt. Welcher Graph gehört zu welchem Gefäß?



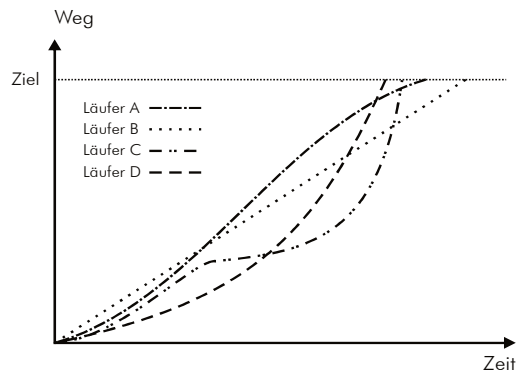
- b) Zeichne zu jedem Gefäß einen möglichen Graphen.



- c) Zeichne zu jedem Graphen ein passendes Gefäß.

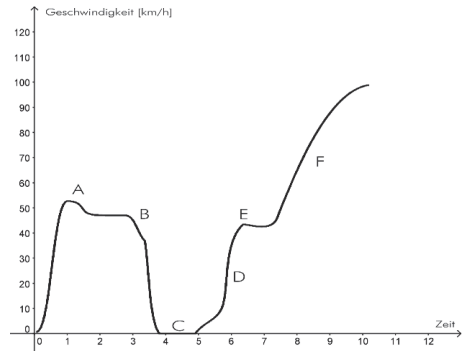


Aufgabe 6: Die Abbildung skizziert den Verlauf eines Langstreckenlaufs mit vier teilnehmenden Athleten. Erstelle eine Rangliste und erläutere den Rennverlauf jedes Läufers. Welche Graphen stellen einen realistischen Verlauf eines Laufes dar?



Aufgabe 7: Die Stellen A – F in der Graphik sind Situationen, die Frau Mihic auf ihrer Fahrt mit dem Auto zur Arbeit erlebt hat. Welche Situation passt zu welchem Punkt?

- (1) Frau Mihic fährt auf der Autobahnauffahrt.
- (2) Sie muss abrupt bremsen, da sie auf eine stehende Kolonne auffährt.
- (3) Sie realisiert, dass sie die zulässige Höchstgeschwindigkeit etwas überschritten hat.
- (4) Sie beschleunigt, um sich in den Autobahnverkehr einzufügen.
- (5) Die Autos vor ihr setzen sich langsam wieder in Bewegung.
- (6) Sie muss vor einer roten Ampel warten.



Aufgabe 8: Die folgende Tabelle gibt den Zusammenhang zwischen dem Alter x einer Person (in Jahren) und ihrer Körpergröße y in cm wieder. Zeichne den Graphen der Funktion.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y	52	77	89	95	101	108	114	121	128	129	132	135	140	145	152	159	168	171	174	177

Aufgabe 9: Nach welcher Gleichung wird der Funktionswert y aus x berechnet?

- | | |
|--|-----------------------------------|
| a) x : Seitenlänge eines Quadrates | y : Flächeninhalt des Quadrates |
| b) x : Kantenlänge eines Würfels | y : Volumen des Würfels |
| c) x : Durchmesser eines Kreises | y : Umfang des Kreises |
| d) Ein Velofahrer fährt mit einer mittleren Geschwindigkeit von 5 m/s, | |
| x : Dauer der Fahrt in s | y : zurückgelegte Strecke in m |
| e) x : Anzahl Seiten eines Vielecks | y : Anzahl Diagonalen |

Aufgabe 10: Zeichne den Graphen mithilfe der Wertetabelle. Versuche jeweils eine Funktionsgleichung zu finden.

a)

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	1	3	5	7	9	11	13	15

b)

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	-2	2	6	10	14	18	22	26

c)

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	1	2	5	10	17	26	37	50

d)

x	-3	-2	-1	0	0.5	1	2	3
y	5	0	-3	-4	-3.75	-3	0	5