

© 2023 Friedrich Wilhelm Krücken

Alle Rechte vorbehalten

Satz, Illustrationen: Reinhard Buchholz, Friedrich Wilhelm Krücken

Umschlag: Friedrich Wilhelm Krücken

Herausgeber: Friedrich Wilhelm Krücken

Tischbergerstraße 4

76887 Bad Bergzabern

Printed in Germany

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwendung ist ohne Zustimmung des Verlages und des Autors unzulässig. Dies gilt insbesondere für die elektronische oder sonstige Vervielfältigung, Übersetzung, Verbreitung und öffentliche Zugänglichmachung.

Ad maiorem Gerardi Mercatoris gloriam

Abhandlungen zu Leben und Werk

Gerhard Mercators

5.3.1512 Rupelmonde

2.12.1594 Duisburg

Band I, 2009

Vortrag auf dem Mercator-Symposion am 10.03.1994:

Ist das 'Rätsel der Mercator-Karte 1569' gelöst?

Zur Didaktik der Mercator-Projektion

Gerhard Mercator und die Quadratur des Kreises

Erhard Etzlaub und die Methode der Vergrößerten Breiten

John Dee – Canon Gubernauticus

Das Götzenstandbild Zolotaia idolum

Gerhard Mercator und die Loxodromie

ISBN 978-3-86852-895-8

Band II, 2010

Rumolds Weltkarte von 1587

Stemma atlantis

Vivianus I

Mercator | Melanchthon

?magister artium

ISBN 978-3-86991-014-7

Band III, 2011

Loxodromie – Hatte Gerhard Mercators Methode der Vergrößerten Breiten

Vorläufer im frühen chinesischen Kulturkreis?

Annulus Astronomicus

Die declaratio für Kaiser Karl V.

Astrologie im Umfeld Gerhard Mercators

ISBN 978-3-86991-302-5

Band IV, 2011

Evolution aus dem 'Im Anfang'

Über die Unsterblichkeit der menschlichen Seele

Meditationes Cosmographicae

ISBN 978-3-86991-456-5

Band V, 2011

Das Buch zur Karte Ad usum navigantium

ISBN 978-3-86991-457-2

Band VI, 2014

Nachträge, Vorwort

Was hat die „quadratura circuli“ in der Kartografie zu suchen?

Are „quadratura circuli“ and Mercator's „loxodromie in 1569“ related issues?

Loxodromie versus Perspektive

Is the „mystery of the (construction of the) Mercator map 1569“ [Hermann Wagner] solved?

Newport Tower – oder: Die Genauigkeit der Karte Ad usum navigantium

Conjectures and Refutations – Vermutungen, (Fehl-) Urteile, Widerlegungen – frei nach Sir Karl Richard Popper

ISBN 978-3-95645-38-8

Band VII, 2017

450 Jahre Ad usum navigantium: Gerhard Mercator 1569-2019 – oder:

Die Kurze Geschichte einer unsterblich gewordenen Idee

Anhang: Der Brief Gerhard Mercators an den Bischof von Arras, Antoine Granvelle

ISBN 978-3-7439-1875-7

Band VIII, 2018

Die „carta-de-marear-Saga“ und das „Rätsel der Mercator-Karte 1569“

ISBN 978-3-7469-5349-6

Band IX, 2019

Die Entstehung der Loxodromie

Homagium ad Gerardum Mercatorem

Eine Hommage an ihren Erfinder Gerhard Mercator

ISBN 978-3-7497-7029-8

Band X, 2023

Vorwort des Herausgebers

Reinhard Buchholz: Untersuchungen zur Entstehung von Mercators

Karte AD USUM NAVIGANTIUM 1569

Friedrich Wilhelm Krücken:

Von Marinus zu Mercator: Zur Didaktik des „Hauptsatzes“ der

Mercator-Karte AUN 1569

Vorwort des Herausgebers

Reinhard Buchholz, einer meiner Abiturienten des Jahrgangs 1970 und späterer Kollege am Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Mercator-Gymnasium zu Duisburg, kam nach seinem Lehramtsstudium zurück an seine „alte“ Schule als Mathematik-, Physik- und schließlich als Informatik-Lehrer.

Er nahm sehr früh Anteil an meinen Mercator-Forschungen und schuf zum Jubiläumsjahr 1994 für das *Stadt- und Kulturhistorische Museum* zu Duisburg einen Mercator-Film, in dem er – ohne davon zu wissen – die Vorstellungen des Edward Wright aus dem Jahre 1599 zum Entstehen der „uneigentlichen“ Zylinderprojektion einer heute so genannten „Mercatorprojektion“ realisierte, deren Ausmessungen denen nach der Abbildungsformel der Herren Barrow / Leibniz aus den Jahren um das Jahr 1700 herum:

$$\Phi(\varphi) = \ln\{[\sec+\tan](\varphi)\}$$

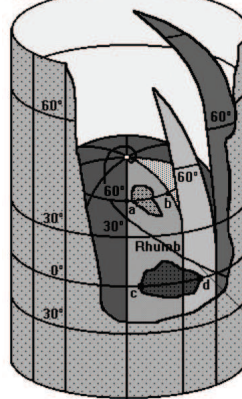
in ausgezeichnete Weise nahe kommen.

Seine Untersuchungen an dem von mir edierten digitalen *Faksimile* der Karte AUN (*ad usum navigantium*) von 1569 zeigen den überaus großen Unterschied zwischen einer Untersuchung (1992ff.) mit „klassischen“ Mitteln der zeichnenden Geometrie: Zirkel, Winkelmesser und Lineal – selbst wenn es ein geeichtes ½-mm Lineal ist –, und einer – heute möglichen – digitalen Behandlung mit allen nur möglichen digitalen Apps.

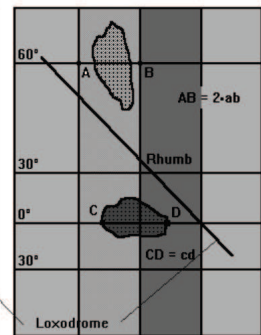
Seine Untersuchungen stellen mich hinsichtlich meiner Untersuchungen und damaligen Schlussfolgerungen (1992/4) recht zufrieden!

Aber was mich am meisten freut, ist die verdeckte Aussage seiner Untersuchungen, dass sie uns einen Blick auf den Zeichentisch Mercators in den Jahren 1566 bis 1569 werfen lassen.

Edward Wright ist der erste Mathematiker, der eine Mercator-Karte berechnet!



Gerhard Mercator rechnet nicht, Gerhard Mercator konstruiert!



So erläutert Edward Wright im Jahre 1599 die Entstehung der MERCATOR-Weltkarte!

Ich sehe förmlich, wie Gerhard Mercator hin und wieder beim Besuch seines Freundes und Nachbarn – und späteren Biografen – Walther Ghim aufblickt, den Reißzirkel absetzt und erklärt:

„Meine Methode, lieber Walther, ist der Methode ähnlich, die Archimedes praktizierte, als er die *quadratura circuli* versuchte: Er konnte vom kreis - einbeschriebenen Sechseck bis zum 96-Eck fortschreitend (d. h. von einem Zentriwinkel von 60° bis zu einem von 3.75°) – näherungsweise – immer bessere Ergebnisse erzielen; ich konnte von größeren Winkeln $\Delta\varphi$ – z. B. von 10° – fortschreitend zu kleineren bis $\Delta\varphi = 1^\circ$ meine Ergebnisse so gewinnen, dass der Unterschied von der 1° -Sehne zum 1° -Kreisbogen nicht mehr zu erkennen ist; aber, lieber Walther, mir fehlt ganz einfach für den Nachweis der Methoden-Gleichheit ein Beweis: Wie kann ich mit meiner Zeichnung einen Weg zur *quadratura circuli* gewinnen?“

[Diesen Weg beschritt dann der Herausgeber 1996 (Z. B. *Ad maiorem Gerardi Mercatoris gloriam* Bd. I, 161-175).]

Und wie er den Reißzirkel wieder auf die Kupferplatte aufsetzt, verrutscht ihm die Zirkelspitze auf der Unterlegscheibe um den Bruchteil eines Millimeters – ein paar mal!

Meine zweite (!) Werkstattgeschichte.

1992 hatte ich mir für die „Fehler“ im *organon* der Karte AUN eine erste Werkstattgeschichte ausgedacht: → *Ad maiorem Gerardi Mercatoris gloriam* Bd. I, 85ff. – zur größeren Ehre unseres Schulpatrons: Gerhard Mercator.

Friedrich Wilhelm Krücken

Für meine Frau

Elke

Vorbemerkungen

Als Schüler und späterer Lehrer des Mercator-Gymnasiums in Duisburg liegt die Beschäftigung mit Gerhard Mercator nahe. Durch den Mathematikunterricht in der Mittelstufe wurde das Wissen über und die Liebe zur Geometrie Euklids durch Herrn Enderling geweckt, durch Herrn Krücken kamen dann in den letzten beiden Jahre vor dem Abitur die fundierten Grundlagen der lineare Algebra und der Analysis hinzu.

Unserem Lehrer Bruno Kyewski und dann vor allem unserem Schulleiter, Herrn Friedrich Wilhelm Krücken, verdanken wir umfangreiche Forschungen zu Mercators Karte *Ad Usum Navigantium*. Aber erst Herrn Krücken entdeckte, dass eine Konstruktion dieser Karte nur mit dem Wissen, welches die Schüler bereits in der Mittelstufe erlernen (und wie es bereits im 6. Band des Euklid zu finden ist) möglich ist.

In einem Brief von Mercator an Herrn Wolfgang Haller stellt Mercator dieses geometrische Wissen als Grundlagen seiner Erkenntnisse heraus.

Mercator konnte natürlich nicht ahnen, dass das geometrische Verfahren, welches Herr Krücken aufzeigen konnte, sich durch die Erkenntnisse von Leibniz und Newton in ein exaktes Ergebnis überführen lässt, indem man die Breite des Intervalls nicht 1° groß wählt, sondern diese gegen Null streben lässt, so dass man ein relativ leicht zu lösendes Integral erhält.

Es wird aber selbst in jüngerer Zeit von einigen Wissenschaftlern angezweifelt, dass Mercator rein geometrisch vorgegangen ist.

Als Herr Krücken mir seine Idee und die lateinische Übersetzung aus einer der Legenden der Karte „Da wir dies bedacht haben, haben wir die Breitengrade [Breitengradabschnitte] zu beiden Polen hin allmählich vergrößert im Verhältnis zum

Anwachsen der Breitenparallelen[abschnitte] über das Maß hinaus, welches sie zum Äquator[abschnitt] haben.“ vorlegte, festigte sich bei mir die Überzeugung, dass Mercator seine Karte rein geometrisch erstellt hat.

Durch die Tatsache, dass Herr Krücken das Baseler Exemplar digitalisieren ließ und die heute zur Verfügung stehenden Programme, insbesondere das für den Schulunterricht entwickelte Programm *EUKLID Dynageo* und die Auswertung der Daten mittels selbst entwickelter Computerprogramme, war es mir möglich, der Frage auf den Grund zu gehen, ob eine Erstellung der Karte durch Verwendung von numerisch ermittelten Werten ausgeschlossen werden kann.

Die Zeichnungen ließen sich im Buch nicht immer in ausreichender Größe darstellen. Mein Sohn Tobias hat mir freundlicherweise die Möglichkeit eröffnet, sie unter

<https://mercator.promote-it.de> zugänglich zu machen. Besonderer Dank geht an Herrn Dr. h.c. F.W. Krücken und an meine Tochter Christiane, die den Text Korrektur gelesen haben. Bei Rückfragen zu den verwendeten Programmen bin ich unter reinhard.buchholz@arcor.de zu erreichen.

Reinhard Buchholz

Untersuchungen zur Entstehung von Mercators Karte AD USUM NAVIGANTIVM

Reinhard Buchholz

Durch das Engagement von Herrn Dr. h.c. F. W. Krücken wurde das Exemplar der Baseler Welt- und Seekarte digitalisiert, so dass er „zur fünfhundertsten Wiederkehr des Geburtstages Gerhard Mercators ein 1:1-Faksimile der Welt- und Seekarte *Ad usum navigantium* in Zusammenarbeit mit dem Leiter des Stadtarchivs Duisburg, Dr. Hans-Georg Kraume, und der Universität Basel, vertreten durch den gegenwärtigen Leiter der Abteilung Handschriften und Alten Drucke an der Universitätsbibliothek Basel, Dr. Ueli Dill,“ herausgeben konnte (Faksimile des Baseler Originaldrucks der Karte aus dem Jahre 1569 (ISBN 978-3-00-035705-3)).

Herr Dr. h.c. F. W. Krücken stellte mir freundlicherweise die eingescannten Tiff-Dateien zur Verfügung, die die hier vorgestellten Untersuchungen erst möglich machten.

Eine der entscheidenden Erkenntnisse von Herrn Dr. h.c. F. W. Krücken lag in seiner Feststellung, dass Mercator die Karte mit den mathematischen Kenntnissen der Mittelstufe (hier insbesondere die Ähnlichkeitslehre des 6. Buches der Elemente des Euklid), also ohne die Verwendung der Methoden der Differential- und Integralrechnung, erstellt hat. In meiner Untersuchung soll der Frage nachgegangen werden, in wie weit die Karte Aussagen darüber zulässt, ob diese rein geometrisch konstruiert worden ist oder, wie etwa Gaspar und Leitão behaupten¹, durch Zuhilfenahme der Rhumbentafel des John Dee zustande gekommen ist.

Meine Untersuchung erfolgt in den folgenden Schritten:

1. Untersuchung der Mess- und Scangenaugigkeit
2. Die Zeichengenaugigkeit Mercators bei linearen Skalen (Längengrade)
3. Untersuchung der Karte in Bezug auf Verzerrungen (z.B. durch Einflüsse auf die Karte durch Feuchtigkeit o.ä.)
4. Zeichengenaugigkeit beim Organum
5. Untersuchung der Breitenskala
6. Untersuchung möglicher Konstruktionsverfahren
7. Resümee

¹ EMS Newsletter March 2016, S.44-49, Joaquim Alves Gaspar and Henrique Leitão, How Mercator Did It in 1569: From Tables of Rhumbs to a Cartographic Projection: „Our study has shown that Mercator, both for historical and numerical reasons, most certainly used a table of rhumbs for calculating his projection in 1569.“

1. Untersuchung der Mess- und Scangenaugigkeit

Für die Untersuchung wurde zum einen das Public-Domain-Programm GIMP verwendet.

Zur Durchführung wurde eine ca. 3000-25000-fache Vergrößerung gewählt, so dass die einzelnen Pixel als Quadrate dargestellt werden. Die Messungen erfolgten mit dem Werkzeug *Rechteckige Auswahl*.

Sobald sich die Maus über einem der 8 möglichen Griffbereiche befindet, wird in der Statusleiste die aktuelle Größe des eingezeichneten Rechtecks in Pixeln angezeigt.

Die Rechteckseiten springen dabei immer genau auf die Pixelränder. Somit ist die kleinste messbare Größe gerade 1 Pixel, was dem Auflösungsvermögen des Scanners entspricht.

Zum Zweiten kommt das von Roland Mechling entwickelte Programm EUKLID DynaGeo zum Einsatz, welches ich jahrelang am Mercator-Gymnasium Duisburg im Geometrieunterricht einsetzte. Auch dieses Programm ist mittlerweile als Open-Source-Programm für jedermann zugänglich (s. z.B.: <https://www.dynageo.de>).

Alle Programme wurden mit der Open-Source-Software Lazarus verwirklicht, dem freien Nachfolger von Turbo-Pascal/Delphi.

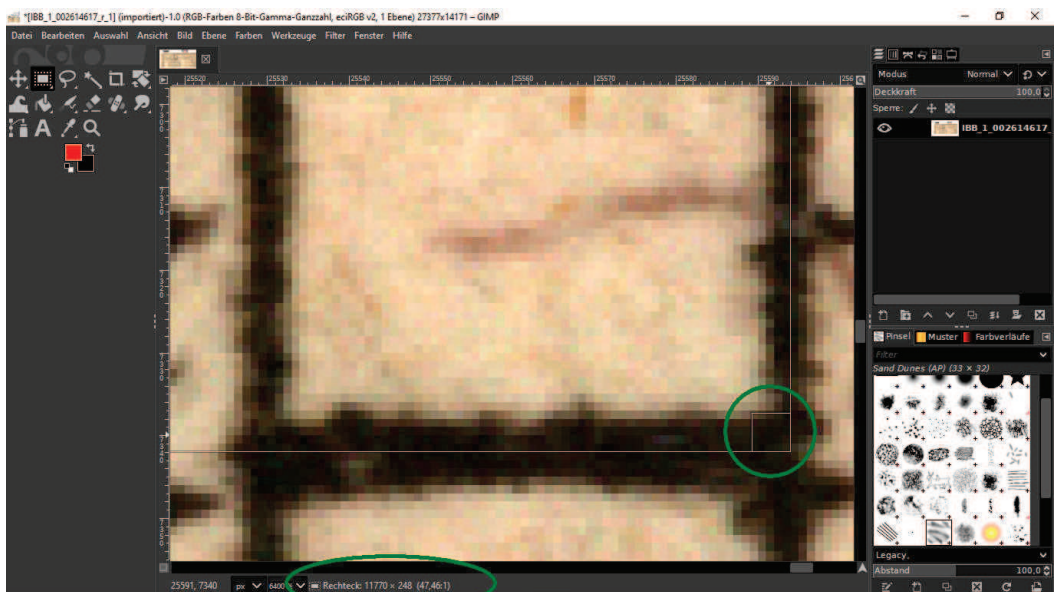


Abb. 1: Rechteckig Auswahl in Gimp mit Griffbereich in der rechten unteren Ecke und Größenangabe in der Statusleiste

Da man i.A. von einer manuell erreichbaren Zeichengenaugigkeit von 0,2 mm (dies entspricht ca. 4 Pixeln) ausgeht, werden Werte als ganzzahlige Pixelangaben erfasst.

Die Karte wurde in 6 überlappenden Teilen eingescannt
(http://www.fwkruecken.de/Bd_5.pdf, S.III).

Auf jedem dieser Teile ist u.a. ein (Farb-)Lineal mit einer Zentimeter-Skala erfasst.

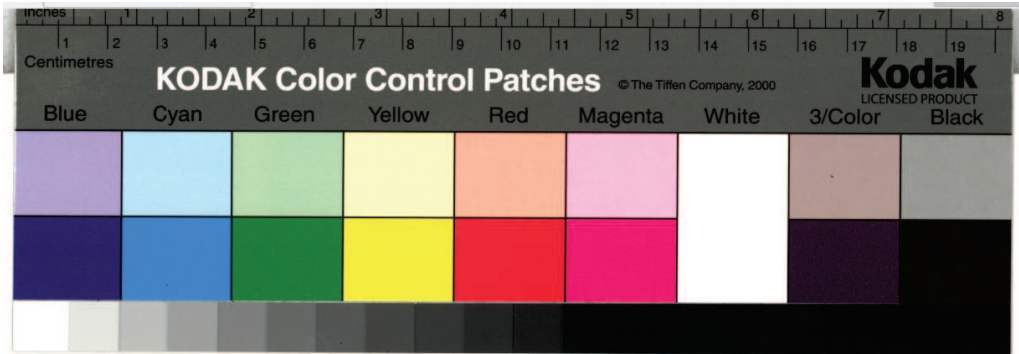


Abb. 2: Kodak-Lineal mit Grautreppe

Es ist unklar, mit welcher Genauigkeit die Scanner-Auflösung von 600 DPI garantiert werden kann. Da zudem das Lineal höchstwahrscheinlich nicht geeicht/kalibriert gewesen ist, lassen sich zumindest keine Aussagen über den exakten Abbildungsmaßstab gewinnen.

Daher kann im Folgenden nur die relative Messgenauigkeit angegeben werden. Dies tut jedoch den weiteren Untersuchungen keinen Abbruch, denn alle relativen Messwerte lassen sich durch Multiplikation mit demselben, geeignet gewählten Proportionalitätsfaktor in die absoluten Messwerte umrechnen.

Die Tatsache, dass der Proportionalitätsfaktor unbekannt ist, hat keinen Einfluss auf die Schlussfolgerungen, die in diesem Artikel aus den gefundenen Messwerten gezogen werden.

Es konnten nur die Zentimeter-Markierungen von 1 bis 19 verwendet werden, da am linken Rand des Kodak-Lineals etwas mehr als 1 mm fehlte (Abnutzung?).

Aus der Vermessung der Lineale aus den 6 Scan-Dateien wurden durch lineare Regression die folgenden Werte ermittelt:

	Lineal 1	Lineal 2	Lineal 3	Lineal 4	Lineal 5	Lineal 6	Mittelwert
Standardfehler	0,590	0,823	0,914	0,831	1,089	0,606	0,809
min. Abweichung	-1,186	-1,685	-1,286	-1,474	-1,583	-1,271	-1,685
max. Abweichung	0,846	1,478	2,432	1,421	1,319	1,459	2,432
Pixel/cm	235,862	236,023	235,880	235,842	235,951	235,919	235,913
mm/Pixel	0,042	0,042	0,042	0,042	0,042	0,042	0,042
Auflösung in ppi	599,089	599,499	599,136	599,039	599,316	599,234	599,219
Abw. v. Mittelwert	0,02 %	-0,05 %	0,01 %	0,03 %	-0,02 %	0,00 %	

Tabelle 1: Vermessung der Lineale

Der Mittelwert weicht nur um 0,13 % nach unten von der angegebenen Scannerauflösung von 600 DPI ab.

Für die Vermessung der Breitengrade wurden, um die automatische Kontrolle zu erleichtern, die Ausschnitte so gedreht, dass die Skalen möglichst waagrecht oder senkrecht verlaufen. Dazu waren Rotationen (von unkritischen 90° Drehungen abgesehen) von 0,711° erforderlich.

Es sollte sichergestellt sein, dass diese Rotationen keinen merklichen Einfluss auf die Ergebnisse haben.

Deshalb wurde zum einen der Einfluss auf die Ergebnisse bei der maximalen Rotation von 0,711° (beim Maßstab, der auf dem 5. eingescannten Teilstück abgebildet war) genauer untersucht.

Das Lineal aus der 5. Datei wurde daher sowohl ungedreht als auch gedreht vermessen.

Dabei ergaben sich bei 18 Abständen der Zentimeter-Skalenstriche gleiche Ergebnisse, lediglich einer war nach der Rotation um 1 Pixel größer. Dies entspricht einem Unterschied von weniger als 0,05 mm.

Die lineare Regression ergab die folgenden Durchschnittswerte:

	Pixel pro cm	Standardabweichung	Auflösung in DPI
Original-Skala	235,92	1,08	599,24
gedrehte Skala	235,95	1,09	599,31
Unterschied in %	+0,01 %	+0,58 %	+0,01 %

Tabelle 2: Vergleich für Lineal 5 zwischen gedrehter und ungedrehter Bilddatei

Somit ist der Einfluss der Rotation so minimal, dass er vernachlässigt werden kann.

Es zeigt sich also, dass die (Un-)Genauigkeit des Scanners in horizontaler Richtung weit unterhalb der Zeichengenauigkeit liegt und somit keinen Einfluss auf die Messergebnisse hat.

Bei den weiteren Untersuchungen können wir von einer Scanner-Auflösung von 600 DPI ausgehen, da die ermittelte Abweichung vernachlässigbar ist und zudem nicht sichergestellt werden kann, in wie weit das verwendete Lineal kalibriert war.

2. Die Zeichengenauigkeit Mercators bei linearen Skalen

Einen ersten Eindruck bekommt man, wenn man die Längenskala am Äquator (auf den eingescannten Teilen 3 und 4) und die im Organum (auf dem eingescannten 6. Teil) untersucht.

Die Längenskala der Karte erstreckt sich über 6 Druckplatten, jede erfasst einen Bereich von 60°.

Diese 6 Bereiche wurden getrennt untersucht, um eventuelle Unterschiede zwischen den insgesamt 6 Druckplatten erfassen zu können.

Wie man z.B. der Windrose bei 120° (s. Abb. 3) entnehmen kann, sind diese Teile nicht sehr exakt zusammengeklebt worden. Daher wurde grundsätzlich der erste und letzte Grad-Abschnitt ausgespart und die Untersuchung mit den verbleibenden 58 Grad-Abständen durchgeführt.

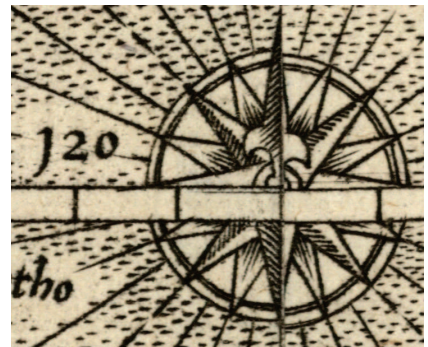


Abb. 3: Windrose bei 120°

Die folgende Tabelle gibt Auskunft über Mittelwert, Standardabweichung von den durch Regression ermittelten Werten, minimalen und maximalen Wert der Abweichungen von den gemessenen Grad-Abständen in Pixeln:

Bereich	Mittelwert	σ	minimale Abweichung vom Regressionswert	maximale Abweichung vom Regressionswert
181° - 239°	130,521	2,934	-7,83	8,474
241° - 299°	130,607	1,294	-2,45	3,44
301° - 359°	130,927	2,0354	-5,02	4,01
1° - 59°	130,486	2,091	-4,66	5,03
61° - 119°	130,193	1,962	-5,69	3,99
121° - 179°	130,501	2,2566	-5,23	4,33
Gesamtbereich	130,539	2,095		

Tabelle 3: Auswertung der Längenskala am Äquator